

**В. Ф. Акулов**, (Макеев. инж.-строит. ин-т),  
**А. Е. Шишков**, д-р физ.-мат. наук  
 (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

## О единственности решений смешанных задач и задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограниченными коэффициентами

Найдены новые классы (обобщенные классы Тэклинда) единственности обобщенных решений начально-краевых задач для линейных и квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка с растущими на бесконечности коэффициентами.

Знайдені нові класи (узагальнені класи Теклінда) єдиності узагальнених розв'язків початково-краєвих задач для лінійних та квазілінійних дивергентних параболических рівнянь високого порядку з необмежено зростаючими на нескінченності коефіцієнтами.

В неограниченной области  $G = \Omega \times (0, T) \subset R_{x,t}^{n+1}$ ,  $n > 1$ ,  $T < \infty$ , с кусочно  $C^1$ -гладкой границей  $\partial G = \Omega_0 \cup \Omega_T \cup \Gamma$  рассматривается смешанная задача

$$\begin{aligned} Pu &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha a_\alpha(t, x, u, \nabla_x u, \dots, \nabla_x^m u) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha D_x^\alpha F_\alpha(t, x); \end{aligned} \quad (1)$$

$$u|_{\Omega_0} = \varphi(x); \quad D^\alpha u|_\Gamma = 0 \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq m-1. \quad (2)$$

Здесь каратеодориевы функции  $a_\alpha(t, x, \xi)$ ,  $\xi = (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$ , удовлетворяют  $\forall (t, x, \xi) \in G \times R^{N(m)}$  условиям

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(t, x, \xi) \xi_\alpha^{(m)} \geq (m-l)A - la_0(t, x, \xi) \xi^{(0)} - d_1 B, \quad d_1 < \infty; \quad (3)$$

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha^2(t, x, \xi) \leq d_2 M_1(|x|)(A+B), \quad d_2 < \infty; \quad (4)$$

$$(m-l) \sum_{|\beta| \leq m-1} a_\beta^2(t, x, \xi) \leq d_3 K(|x|)(A+B), \quad d_3 < \infty; \quad (4^*)$$

где  $A \equiv M_0(|x|)|\xi^{(m)}|^2$ ,  $B \equiv K(|x|) \sum_{i=0}^{m-1} |\xi^{(i)}|^2$ ,  $M_0(s)$ ,  $M_1(s)$ ,  $K(s)$  — непрерывные неотрицательные функции;  $l$  равно 0 или 1.

**З а м е ч а н и е 1.** Условие (3) для  $m > 1$  является, очевидно, более общим при  $l = 0$ . Но при  $l = 1$  оно позволяет охватить также вырождающиеся параболические уравнения второго порядка ( $m = 1$ ,  $l = 1$ ). В последнем случае необходимо налагать дополнительное условие на структуру функций  $a_i(t, x, s, \xi)$ :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i(t, x, s, \xi) \eta_i \right| &\leq c \left( \sum_{i=1}^n a_i(t, x, s, \xi) \xi_i \right)^{1/2} \times \\ &\times \left( \sum_{i=1}^n a_i(t, x, s, \eta) \eta_i \right)^{1/2} \quad \forall (s, \xi, \eta) \in R^{2n+1}, \quad c < \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

выполняющееся, например, при  $a_i(t, x, s, \xi) \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x, s) \xi_j$ .

Предполагаем, что функции  $M_0(\tau)$ ,  $M_1(\tau)$ ,  $K(\tau)$  удовлетворяют условиям

$$M(\tau) \equiv (M_0(\tau))^{\frac{1-m}{2m}} (M_1(\tau))^{\frac{1}{2}} \leq \tau h(\tau), \quad \max_{0 < s < \tau} K(s) \leq h^2(\tau); \quad (6)$$

$$\max_{\tau < s < d\tau} M_i(s) \leq d_0^{2m} \min_{\tau < s < d\tau} M_i(s), \quad i = 0, 1; \quad d_0 < \infty, \quad 1 < d < \infty, \quad (7)$$

где  $h(\tau)$  — произвольная монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая следующему условию «тэклиндовского» типа:

$$\int_1^\infty (h(s))^{1-2m} (M(s))^{-1} ds = \infty. \quad (8)$$

Вначале рассматривается поведение на бесконечности произвольного обобщенного решения задачи (1), (2), под которым, как обычно, понимается функция  $u(t, x)$  такая, что для любой ограниченной подобласти  $\Omega' \subset \Omega$   $u(t, x) \in L_2(0, T; H^m(\Omega', \partial\Omega' \setminus \partial\Omega))$ ,  $u_t(t, x) \in L_2(\Omega' \times (0, T))$  выполнено первое из условий (2), а также следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Omega' \times (\rho, s)} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} v + \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t, x, u, \dots, \nabla_x^\alpha u) D^\alpha v - \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha D^\alpha v \right] dx dt = 0 \quad (9)$$

для любых  $\rho, s: 0 \leq \rho < s \leq T$ , и произвольной функции  $v(t, x) \in L_2(0, T; H^m(\Omega'))$ .

**Теорема 1 (типа Фрагмена — Линделефа).** Пусть  $u(t, x)$  — произвольное обобщенное решение однородной ( $F_\alpha \equiv \varphi \equiv 0$ ) задачи (1), (2). Тогда существует постоянная  $a^* > 0$ , зависящая лишь от известных параметров, такая, что если

$$\|u\|_{L_2(G(\tau))=L_2(G \cap \{t < \tau\})} \leq \exp\left(a \int_{\tau_0}^\tau h(s) (M(s))^{-1} ds\right) \quad \forall \tau > \tau' \quad (10)$$

с некоторой постоянной  $a < a^*$ , то  $u(t, x) \equiv 0$ .

Зафиксируем  $C^m$  — гладкую срезающую функцию  $\zeta(s): \zeta(s) = 1$  при  $s < 0$ ,  $\zeta(s) = 0$  при  $s > 1$ , и пусть  $d_4 = \max_{0 \leq s \leq 1, j \leq m} |\zeta^{(j)}(s)|$ . Обозначим  $G_\rho^s(\tau) = G(\tau) \cap \{(t, x): \rho < t < s\}$ ,  $G(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_2) \setminus G(\tau_1)$ ,  $\Omega_t(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1, \tau_2) \cap \{t = \text{const}\}$ . В дальнейшем будет использоваться следующее мультипликативное неравенство:

$$\int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} |\nabla_x^j v|^2 dx \leq d_5 \left( \int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} |\nabla_x^m v|^2 dx \right)^{\frac{j}{m}} \left( \int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} v^2 dx \right)^{\frac{m-j}{m}} + d_6 (\tau_2 - \tau_1)^{-2j} \times \\ \times \int_{\Omega_t(\tau_1, \tau_2)} v^2 dx \quad \forall \tau_2 > \tau_1 > 0, \quad j < m, \quad v \in H^m(\Omega_t(\tau_1, \tau_2)), \quad 0 < d_5, d_6 < \infty. \quad (11)$$

Доказательство теоремы 1 проводится с использованием метода введения параметра [1]. Зафиксируем постоянные  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\mu > 0$  и подставим в интегральное тождество (9) пробную функцию  $v(t, x) = u(t, x)g^2(t)\eta_\tau(|x|)$ , где  $g(t) = \exp(-\mu^2 t)$ ,  $\eta_\tau(s) = \zeta^{2m}\left(\frac{s-\tau}{\delta}\right)$ ,  $\delta \equiv \delta(\tau) = \varepsilon_0^{-1}\mu^{-1/m}M(\tau)$ . Введя обозначения

$$\omega(t, x) \equiv ug(t), \quad F_s(\tau) \equiv 2^{-1} \int_{\Omega_s(\tau)} \omega^2 dx, \quad \mathcal{F}(\tau) \equiv \int_{G_{s-v}^s(\tau)} \omega^2 dx dt,$$

$$\mathcal{F}_1(\tau) \equiv \frac{m-1}{2} \int_{G_{s-v}^s(\tau)} M_0(|x|) |\nabla_x^m \omega|^2 dx dt,$$

$$R_1 \equiv 4^{-1} \int_{G_{s-v}^s(\tau+\delta)} \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\dots) D_x^\alpha u + la_0(\dots)u \right) g^2(t) \eta_\tau dx dt,$$

$$R_2 \equiv \int_{G_{s-v}^s(\tau+\delta)} K(|x|) \sum_{i=0}^{m-1} |\nabla_x^i w|^2 dxdt,$$

$$R_3 \equiv \int_{G_{s-v}^s(\tau, \tau+\delta)} M_1(|x|) \sum_{i=1}^m \delta^{-2i} |\nabla_x^{m-i} w|^2 dxdt,$$

$$R_4 \equiv (m-1) \int_{G_{s-v}^s(\tau, \tau+\delta)} K(|x|) \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^j \delta^{-2i} |\nabla_x^{j-i} w|^2 dxdt$$

и учитывая условие (3), получаем при  $l \neq m$  после простых преобразований

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\tau) \equiv F_s(\tau) + \mu^2 \mathcal{J}(\tau) + \mathcal{J}_1(\tau) + 2R_1 \leq & \int_{G_{s-v}^s(\tau+\delta)} \sum_{|\beta| \leq m-1} a_\beta(t, x, \dots, \nabla_x^m u) \times \\ & \times D^\beta(u \eta_\tau) g^2(t) dxdt + c_1 d_4 \int_{G_{s-v}^s(\tau, \tau+\delta)} \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(\dots)| \times \\ & \times \sum_{i=1}^m \delta^{-i} |\nabla_x^{m-i} u| g^2(t) \eta_\tau^{1/2} dxdt + F_{s-v}(\tau + \delta). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и в дальнейшем  $c_i$  — постоянные, зависящие лишь от известных параметров. Применяя к слагаемым в правой части неравенства (12) неравенство Юнга с «ε» и далее условия (3), (4), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\tau) \leq & 4(\varepsilon_1 d_3 + \varepsilon_2 d_2) R_1 + (\varepsilon_1 d_3 + c_3 \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2 d_2) R_2 + c_1^2 d_4^2 \varepsilon_2^{-1} R_3 + \\ & + c_2 d_4^2 \varepsilon_1^{-1} R_4 + F_{s-v}(\tau + \delta) \quad \forall \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае  $l = m = 1$  после той же подстановки, оценивая слагаемое

$\int_{G_{s-v}^s(\tau+\delta)} \left| \sum_{i=1}^n a_i(\dots) D_x^i \eta_\tau \cdot w \right| dxdt$  с помощью неравенства (5), условий (4) и неравенства Юнга, получаем соотношение

$$\mathcal{J}_3(\tau) \leq \varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_2^{-1} d_4^2 d_2 R_3 + F_{s-v}(\tau + \delta). \quad (13^*)$$

Оценивая  $R_2$  с помощью интерполяционного неравенства (11) при  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \tau + \delta$  и используя условие (6), имеем

$$R_2 \leq \varepsilon_3 \mathcal{J}_1(\tau + \delta) + c_3 \varepsilon_3^{-m} h^{2m}(\tau + \delta) \mathcal{J}(\tau + \delta) \quad \forall \varepsilon_3 > 0. \quad (14)$$

Аналогичным образом оцениваем  $R_3 + R_4$ :

$$R_3 + R_4 \leq \varepsilon_4 \mathcal{J}_1(\tau + \delta) + (\varepsilon_0 \mu^2 + h^{2m}(\tau + \delta)) c_4 \varepsilon_4^{-m} \mathcal{J}(\tau + \delta) \quad \forall \varepsilon_4 > 0. \quad (15)$$

Фиксируя  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  так, чтобы  $4(\varepsilon_1 d_3 + \varepsilon_2(1 + d_2)) < 1$ , из оценок (13)—(15) получаем

$$\mathcal{J}_3(\tau) \leq \varepsilon_5 - c_5 \mathcal{J}_1(\tau + \delta) + (\varepsilon_0 \mu^2 + h^{2m}(\tau + \delta)) c_6 \varepsilon_5^{-m} \mathcal{J}(\tau + \delta) + F_{s-v}(\tau + \delta), \quad (16)$$

где  $\varepsilon_5 = \min(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ . Подставляя в тождество (9)  $v(t, x) = w(t, x) \zeta^{2m}(|x| - \tau - (1 + 2^{-j})\delta) 2^{j+1} \delta^{-1}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , и действуя так же, как при выводе оценки (16), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\tau + \delta_j) \leq & \varepsilon \mathcal{J}_1(\tau + \delta_{j+1}) + (\varepsilon_0 \mu^2 + h^{2m}(\tau + \delta_{j+1})) c_7 \varepsilon^{-m} 2^{2mj} \times \\ & \times \mathcal{J}(\tau + \delta_{j+1}) + F_{s-v}(\tau + \delta_{j+1}), \quad \delta_j \equiv (1 - 2^{-j})\delta. \end{aligned}$$

Полагая  $\varepsilon = 2^{-(m+1)}$  и итерируя последнее неравенство, начиная с  $j=0$

до бесконечности, получаем

$$\mathcal{J}_3(\tau) \leq (\varepsilon_0^{2m} \mu^2 + h^{2m}(\tau + \delta)) c_8 \mathcal{J}(\tau + \delta) + c_9 F_{s-\nu}(\tau + \delta). \quad (17)$$

Выберем теперь последовательность  $\tau_i \rightarrow \infty$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$h(\tau_i) \leq d_7 h(\tau_{i-1}), \quad 1 < d_7 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_{i-1}} h(s) (M(s))^{-1} ds \leq d_8 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h(s) (M(s))^{-1} ds \equiv d_8 S_i, \quad 0 < d_8 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

для любого номера  $i > 0$  существует натуральное число  $n_i$  такое, что

$$\tau_i = \underbrace{f(f(\dots(f(\tau_{i-1}))) \dots)}_{n_i}, \quad (18^*)$$

где  $f(\tau) = 1 + \delta(\tau)$ ,  $\delta(\tau) = \varepsilon_0^{-1} \mu_i^{-1/m} M(\tau)$ ,  $\mu_i = \varepsilon_0^{-m} h^m(\tau_{i-1})$ . По последовательности  $\tau_i$  определяем последовательность  $t_i$  соотношением

$$t_i = t_{i-1} - \nu_i, \quad \nu_i = \varepsilon_0^{2m} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (h(s))^{1-2m} (M(s))^{-1} ds. \quad (19)$$

Предполагаем, что параметр  $\varepsilon_0$  удовлетворяет неравенству

$$c_8 (1 + d_7^{2m}) \varepsilon_0^{2m} = \theta < 1.$$

Тогда  $\forall \tau \in \{\tau_{i-1}, \underbrace{f(f(\dots(f(\tau_{i-1}))) \dots)}_{n_i-1}\}$ , полагая  $\mu \equiv \mu_i$ , из соотношения (17)

получаем

$$F_s(\tau) + \mu_i^2 \mathcal{J}(\tau) \leq \theta \mu_i^2 \mathcal{J}(\tau + \delta(\tau)) + c_9 F_{s-\nu}(\tau + \delta(\tau)). \quad (20)$$

Учитывая, что  $1 = \frac{\tau + \delta - \tau}{\delta} \geq d_0^{-1} \int_{\tau}^{\tau + \delta(\tau)} \delta(s)^{-1} ds$ , проинтегрируем оценку (20)  $n_i$  раз, начиная с  $\tau_{i-1}$ ; получаем

$$F_s(\tau_{i-1}) + \mu_i^2 \mathcal{J}(\tau_{i-1}) \leq \mu_i^2 \exp\left(-d_0^{-1} \ln \theta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \delta(s)^{-1} ds\right) \mathcal{J}(\tau_i) + c_9 (1 - \theta)^{-1} F_{s-\nu}(\tau_i).$$

Отсюда следует неравенство

$$f_s(\tau_{i-1}) \leq I_{s-\nu}^s(\tau_i) \exp\left(2\mu_i^2 \nu - d_0^{-1} \ln \theta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \delta(s)^{-1} ds\right) + c_{10} \exp(2\mu_i^2 \nu) f_{s-\nu}(\tau_i), \quad (21)$$

где  $f_s(\tau) \equiv \int_{\Omega_s(\tau)} u^2 dx$ ,  $I_{s-\nu}^s(\tau_i) \equiv \mu_i^2 \int_{G_{s-\nu}^s(\tau_i)} u^2 dx dt$ .

Записываем неравенство (21) с учетом (18) — (19) при  $s = t_{i-1}$ ,  $\nu = \nu_i$ , а также, замечая, что  $\mu_i^2 \nu_i \leq S_i$ ,  $\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \delta(s)^{-1} ds \geq d_7^{-1} S_i$ , получаем

$$f_{t_{i-1}}(\tau_{i-1}) \leq P_i I_{t_i}^{t_{i-1}}(\tau_i) + L_i f_{t_i}(\tau_i), \quad (22)$$

$$P_i \leq \exp((2 - (d_0 d_7)^{-1} \ln \theta^{-1}) S_i), \quad L_i \leq c_{10} \exp(2S_i). \quad (23)$$

Так как в силу условия (8) для любых  $\tau_0 < \infty$  и  $t_0 < T$  существует

конечный номер  $E = E(\tau_0, t_0)$  такой, что  $\sum_{i=1}^E v_i > t_0$  и  $f_{t_E}(\tau_E) = 0$ . Отсюда, итерируя оценку (22)  $E$  раз, начиная с  $i = 1$ , получаем

$$f_{t_0}(\tau_0) \leq \sum_{i=1}^E \left( P_i \prod_{j=1}^{i-1} L_j \right) I_{t_i}^{i-1}(\tau_i). \quad (24)$$

Учитывая (23) и (18), имеем

$$P_i \prod_{j=1}^{i-1} L_j \leq \exp(i \ln c_{10} - ((d_0 d_7)^{-1} \ln \theta^{-1} - 2(1 + d_8)) S_i). \quad (25)$$

При достаточно малом  $\varepsilon_0$  из (24), (25), (10) следует оценка

$$f_{t_0}(\tau_0) \leq \sum_{i=1}^E \exp(2(a - a^* - 1) S_i) < \sum_{i=1}^E \exp(-2S_i), \quad (26)$$

$$0 < a^* = 1 + (2d_0 d_7)^{-1} \ln \theta^{-1} - 2d_8 - \max_{i \leq E} (i S_i^{-1}) \ln c_{10} < \infty.$$

Учитывая (18), получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^E \exp(-2S_i) &\leq \exp(-2S_1) + \sum_{i=2}^E \exp(-2d_8^{-1} H_i) \leq \\ &\leq \exp(-2S_1) + \sum_{i=2}^E \exp(-2d_8^{-1} (1 + d_8)^{2-i} S_1), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{где } H_i \equiv \sum_{j=1}^{i-1} S_j.$$

Из (6) следует оценка

$$S_i \geq \ln \tau_i - \ln \tau_0. \quad (28)$$

С учетом (27), (28) оценка (26) принимает вид

$$\begin{aligned} f_{t_0}(\tau_0) &\leq \exp(-2S_1) \left( 1 + \sum_{i=2}^E \exp(-c_{1i} S_1) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^E \left( \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{-c_{1i}} \exp(-2S_1) \leq c_{21} \exp(-2S_1), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $c_{1i} = 2d_8^{-1} (1 + d_8)^{2-i} - 2$ .

Но так как  $S_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ , то  $\exp(-2S_1) \rightarrow 0$  при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , и значит,  $f_{t_0}(\tau_0) = 0 \forall \tau_0 > \tau'$ ,  $t_0 < T$ , откуда следует, что  $u \equiv 0$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В случае уравнений второго порядка условия (3), (4) можно ослабить так, чтобы полностью охватить в линейном случае вырождающиеся уравнения, рассмотренные в [2]:

$$\sum_{i=1}^n a_i(t, x, s, \xi) \xi_i + a_0(t, x, s, \xi) s \geq \sum_{k=1}^n b^k(t, x) \xi_k s - d_1 K(|x|) s^2,$$

$$|a_i| \leq d_2 M_1(|x|) |\xi|, \quad |b^k|^2 \leq d_3 M_1(|x|) K^{2m-1}(|x|), \quad D_{x_k} b^k \leq d_3 K(|x|),$$

где  $b^k$ ,  $D_{x_k} b^k$  измеримы и ограничены в любой конечной подобласти области  $G$ .

Рассмотрим единственность решений задачи (1), (2) в классах растущих на бесконечности функций. Предположим, что вместо условий (3), (4) выполнены следующие структурные условия (совпадающие с (3), (4) в линейном случае):

$$\sum_{|\alpha|=m} E_\alpha (\xi_\alpha^{(m)} - \eta_\alpha^{(m)}) \geq (m - l) A_1 - l E_0 (\xi^{(0)} - \eta^{(0)}) - d_1 B_1; \quad (30)$$

$$\sum_{|\alpha|=m} E_{\alpha}^2 \leq d_2 M_1(|x|)(A_1 + B_1), \quad (m-1) \sum_{|\beta| \leq m-1} E_{\beta}^2 \leq d_3 K(|x|)(A_1 + B_1); \quad (31)$$

где

$$A_1 \equiv M_0(|x|) |\xi^{(m)} - \eta^{(m)}|^2, \quad B_1 \equiv K(|x|) \sum_{i=0}^{m-1} |\xi^{(i)} - \eta^{(i)}|^2, \\ E_{\alpha} \equiv a_{\alpha}(t, x, \xi) - a_{\alpha}(t, x, \eta).$$

**Теорема 2.** Пусть  $u_1(t, x)$ ,  $u_2(t, x)$  — обобщенные решения задачи (1), (2). Тогда если для  $u_1$  и  $u_2$  выполняется оценка

$$R(\tau) \equiv \|u_1 - u_2\|_{L_2(G(\tau))} \leq \exp\left(a \int_{\tau_0}^{\tau} h(s) (M(s))^{-1} ds\right) \quad \forall \tau > \tau' \quad (32)$$

с некоторой постоянной  $a < \infty$ , то  $u_1 \equiv u_2$ , где  $h(s)$ ,  $M(s)$  — функции из (6), (8).

Доказательство с учетом условий (30), (31) стандартным приемом, связанным с подстановкой в интегральное тождество (9) пробной функции  $v(t, x) = (u_1 - u_2) \eta_{\tau} g(t)$ , сводится к повторению рассуждений из доказательства теоремы 1.

Рассмотрим некоторые следствия, получаемые из теоремы 2 при конкретных коэффициентах. Очевидно, для линейных параболических уравнений с ограниченными коэффициентами ( $M(\tau) \leq \text{const}$ ,  $K(\tau) \leq \text{const}$ ) найденные классы являются известными классами Тихонова — Тэклинда [3, 4]. В общем случае ограничимся рассмотрением уравнений, для которых  $M_0(\tau) = M_1(\tau)$ , а значит,  $M(\tau) = (M_1(\tau))^{1/2m}$ . Обозначим через  $\psi(\tau)$  произвольную монотонно не убывающую функцию, удовлетворяющую следующему условию:

$$\int_1^{\infty} (s\psi(s))^{-1} ds = \infty. \quad (33)$$

1.  $M_1(\tau) = \tau^{\alpha} \psi(\tau)$ ,  $0 < \alpha < 2m$ . Условию (8) в этом случае удовлетворяет функция

$$h(\tau) = (\tau^{(2m-\alpha)\gamma} \psi(\tau))^{1/2m}, \quad \gamma = \frac{1}{2m-1},$$

и из теоремы 2 следует, что если

$$R(\tau) \leq \exp(a\tau^{(2m-\alpha)\gamma}) \quad \forall \tau > \tau', \quad a < \infty, \quad (34)$$

то  $u_1 \equiv u_2$ . В [5] такой класс единственности получен для уравнений (1) с меньшим ростом коэффициентов (в наших обозначениях): при  $M_1(\tau) = c\tau^{\alpha}$ ,  $c < \infty$ ,  $\alpha < 2m$ . Теорема 2 при таком росте коэффициентов дает более широкий класс единственности, а именно: можно положить

$$h(\tau) = (\tau^{\frac{2m-\alpha}{2m}} \psi(\tau))^{\gamma},$$

и при этом

$$R(\tau) \leq \exp(a(\tau^{2m-\alpha} \psi(\tau))^{\gamma}) \quad \forall \tau > \tau', \quad a < \infty.$$

2.  $M_1(\tau) = \tau^{2m}$ . Тогда в качестве  $h(\tau)$  можно положить  $(\psi(\tau))^{\gamma}$  и из теоремы 2 получаем следующий класс единственности:

$$R(\tau) \leq \tau^{a(\psi(\tau))^{\gamma}}, \quad a < \infty.$$

3. Можно найти в определенном смысле предельный рост коэффициентов уравнения (1), при котором соответствующие классы единственности становятся степенными.

Так, если  $M_1(\tau) = \tau^{2m} h(\tau)$ ,  $K(\tau) = h^2(\tau)$ ,  $h(\tau) \equiv (\psi(\tau))^{1/2m}$ , где  $\psi(\tau)$  удовлетворяет условию (33), то, как легко убедиться, соответствующий класс

$$R(\tau) \leq \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^a, \quad a < \infty.$$

**З а м е ч а н и е 3.** Как было сказано выше, полученные в работе результаты охватывают и вырождающиеся параболические уравнения второго порядка. Найденные классы единственности обобщенных решений при этом являются более широкими, чем полученные в [2] обобщенные классы Тихонова. Точные классы единственности классических решений задачи Коши и смешанных задач для линейных недивергентных вырождающихся параболических уравнений второго порядка получены в работах [6, 7]. Наши классы единственности близки к найденным в [6, 7] обобщенным классам Тэклинда, в частности, так же, как и в [7], эти классы становятся классами Тэклинда при ограниченных старших коэффициентах уравнения и предельном росте младших ( $M(\tau) = 1$ ,  $K(\tau) = h^2(\tau)$ ), где  $h(\tau) = \tau\psi(\tau)$ , а  $\psi(\tau)$  — произвольная функция, удовлетворяющая условию (33).

1. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук.— 1978.— 33, № 5.— С. 7—76.
2. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Аналог принципа Сен — Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Там же.— 1976.— 31, № 6.— С. 142—166.
3. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб.— 1935.— 42, № 2.— С. 199—216.
4. Tacklind S. Sur les class quasiaralytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique // Nova Acta Geogial Soc. Schientiarum, Uppsaliensis.— 1963.— 10, N 3.— P. 3—55.
5. Гагнидзе А. Г. О единственности решения задачи Коши для параболического уравнения с растущими коэффициентами // Тр. Тбилис. ун-та.— 1988.— 278.— С. 139—162.
6. Камынин Л. И. О существовании решений задачи Коши и линейных краевых задач для параболического уравнения второго порядка в неограниченной области // Дифференц. уравнения.— 1987.— 23, № 11.— С. 1937—1948.
7. Камынин Л. И. О единственности решения линейных краевых задач для вырождающегося параболического уравнения второго порядка в неограниченной области // Там же.— 1985.— 21, № 11.— С. 1953—1970.

Получено 09.10.91