УДК 517.9

Б. В. Базалий, д-р физ.-мат. наук,
С. П. Дегтярев, канд. физ.-мат. наук.
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе

Рассмотрена задача Стефана с кинетическим условием на границе раздела фаз $u^+ = u^- = \varepsilon k(y, \tau) - \varepsilon v$, где $k(y, \tau)$ — полусумма главных кривизн свободной границы, v — скорость ее перемещения в направлении нормали.

Доказана разрешимость модифицированной задачи Стефана в пространствах гладких функций и сходимость ее решений к решению классической задачи Стефана при $\varepsilon \to 0$.

Розглянута задача Стефана з кінетичною умовою на вільній границі розподілу фаз $u^+ = u^- = \varepsilon k(y, \tau) - \varepsilon v$, де $k(y, \tau)$ — напівсума головних кривин, v — швидкість її переміщення у напрямку нормалі.

Доведена розв'язність модифікованої задачі Стефана в просторах гладких функцій та збіжність її розв'язків до розв'язку класичної задачі Стефана, коли $\varepsilon \to 0$.

Сравнительно недавно появилась серия работ (см., например, [1]), в которых математическая модель задачи кристаллизации обосновывается как некоторый предел в краевой задаче для уравнений фазовых полей. При этом наряду с классической задачей Стефана, в которой на искомом фронте кристаллизации задается условие постоянства температуры, возникает модифицированная задача Стефана, в которой это условие заменяется более общим кинетическим условием, содержащим первые производные по времени и вторые производные по пространственным переменным от неизвестной (свободной) границы. В работе [2] авторами доказана резрешимость в пространствах Гельдера модифицированной задачи Стефана. При этом, как оказалось, модифицированная задача Стефана является регуляризацией классической задачи. В настоящей работе мы изучаем вопросы предельного перехода в множестве гладких решений модифицированной задачи Стефана, при котором кинетическое условие на свободной границе переходит в классическое. В случае одной геометрической переменной задача Стефана с кинетическим условием на свободной границе рассматривалась [3, 4].

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^3$ — заданная область с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух непересекающихся компонент Γ^+ и Γ^-, причем Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-. Пусть поверхность $\Gamma \subset \Omega$ делит Ω на две связные подобласти $\Omega^\pm$, так что $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \Gamma^\pm$. Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ — некоторые координаты на Γ, $y(\omega) \in \Gamma$ — соответствующая точка в R^3, $\vec{\nu}(\omega)$ — единичная нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+. Пусть $\gamma_0 > 0$ такое, что поверхности $\{y = y(\omega) \pm 2\vec{\nu}(\omega)\gamma,\ 0 < \gamma < \gamma_0\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с Γ и $\Gamma^\pm$. Введем обозначения $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$, $\Omega_{\rho,T}^\pm$ — область, ограниченная плоскостями $\tau = 0$, $\tau = T$, поверхностями $\Gamma_T^\pm$ и поверхностью $\Gamma_{\rho,T} = \{(y, \tau) : y = y(\omega) + \vec{\nu}(\omega)\rho(\omega, \tau),\quad \tau \in [0, T]\}$, где $|\rho(\omega, \tau)| < \gamma_0$. Искомая поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ задается, таким образом, в терминах ее отклонения по нормали от заданной цилиндрической поверхности $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$ [5], так что неизвестной теперь является функция $\rho\ (\omega, \tau)$.

В общем случае задача Стефана состоит в нахождении функций $u^\pm\ (y, \tau)$ и $\rho\ (\omega, \tau)$, определенных в областях $\Omega_{\rho T}^\pm$ и на Γ_T соответственно и удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \tau} = a^\pm \Delta_y u^\pm, \quad (y, \tau) \in \Omega_{\rho,T}^\pm;$$

$$\varkappa v = (a^- \nabla_y u^- - a^+ \nabla_y u^+, \vec{n}(y, \tau)), \tag{1}$$

$$u^+ = u^- = \varepsilon k(y, \tau) - \varepsilon v, \quad (y, \tau) \in \Gamma_{\rho,T};$$

$$u^\pm = b^\pm(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \Gamma_T^\pm;$$

$$u^\pm(y, 0) = u_0^\pm(y), \quad \rho(\omega, 0) = 0,$$

где $a^\pm$, $\varkappa$ — заданные положительные постоянные, $k(y, \tau)$ — сумма главных кривизн свободной поверхности $\Gamma_{\rho,T}$, v — скорость перемещения свободной границы в направлении нормали $\vec{n}(y, \tau)$ к $\Gamma_{\rho,T}$, направленной внутрь $\Omega_{\rho,T}^+$, $b^\pm(y, \tau)$, $u_0^\pm(y)$—заданные функции, $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, \partial/\partial y_3)$, $\Delta_y = \nabla_y^2$. При $\varepsilon > 0$ имеем модифицированную задачу Стефана, а при $\varepsilon = 0$ — классическую задачу Стефана. При $\varepsilon = 0$ классическая разрешимость задачи Стефана, и в более общем случае квазилинейных параболических уравнений, в малом по времени изучена в работах [5—8]. При $\varepsilon > 0$ в [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены условия согласования до первого порядка,* $\Gamma \in H^{5+\alpha}$, $\Gamma^\pm \in H^{5+\alpha}$, $b^\pm(y, \tau) \in H^{4+\alpha}$, $u_0^\pm(y) \in H^{4+\alpha}$. *Тогда найдется такое* $T_0 > 0$, *зависящее от данных задачи, что при* $0 < T \leqslant T_0$ *существует решение* $u_\varepsilon^\pm(y, \tau) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_{\rho,T}^\pm)$, $\rho_\varepsilon(\omega, \tau) \in H^{3+\alpha}(\Gamma_T)$.

Пусть теперь $\{u_\varepsilon^\pm(y, \tau),\ \rho_\varepsilon(\omega, \tau)\}$ — некоторая совокупность решений задачи (1) с $\varepsilon > 0$. Вопрос заключается в том, можно ли из этой совокупности выделить подпоследовательность, сходящуюся в некоторых классах так, чтобы ее предел являлся решением задачи (1) при $\varepsilon = 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда на некотором интервале* $[0, T_0]$, *не зависящем от* $\varepsilon \geqslant 0$, *при* $\varepsilon \to 0$ *последовательность* $\rho_\varepsilon(\omega, \tau)$ *сходится к* $\rho_0(\omega, \tau)$ *в пространстве* $\widehat{H}^{2+\alpha'}$, $u_\varepsilon^\pm(y, \tau)$ *сходится к* $u_0^\pm(y, \tau)$ *в пространстве* $H^{2+\alpha'}$, *где* $(u_0^\pm, \rho_0)$ — *решение задачи* (1) *при* $\varepsilon = 0$, $0 < \alpha' < \alpha$.

2. Редукция исходной задачи к задаче в фиксированной области. В соответствии с выбранной параметризацией свободной границы $\Gamma_{\rho,T}$ первоначальную задачу для функций $u^\pm(y, \tau)$, определенных в переменных областях $\Omega^\pm_{\rho,T}$, мы сводим к задаче нахождения некоторых функций, определенных в фиксированных областях $\Omega^\pm_T = \Omega^\pm \times (0, T)$, где $\Omega^\pm$ — области, заданные начальными условиями [5].

Пусть $N = \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \Gamma) < \gamma_0\}$ — окрестность поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Введем координаты (ω, λ) такие, что

$$y(\omega, \lambda) = y(\omega) + \lambda\vec{v}(\omega), \quad |\lambda| < \gamma_0, \quad y(\omega) \in \Gamma.$$

Тогда $N = \{y(\omega, \lambda) : (\omega, \lambda) \in \Gamma \times (-\gamma_0, \gamma_0)\}$. Пусть $\chi(\lambda) \in C_0^\infty$ и равна единице при $\lambda = 0$. Определим взаимно-однозначное отображение $e_\rho(x, t)$ области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ на себя, действующее по правилу

$$e_\rho : (x, t) \mapsto (y, \tau) = (y(\omega(x), \lambda(x) + \chi(\lambda(x))\rho(\omega(x), t)), t),$$

где $(\omega(x), \lambda(x))$ — координаты точки $x \in N$. Ясно, что при этом точки поверхности Γ_T, для которых $\lambda(x) = 0$, являются точками поверхности $\Gamma_{\rho,T}$, а вследствие финитности $\chi(\lambda)$, точки поверхностей $\Gamma_T^\pm$ остаются на месте. В координатах (ω, λ) уравнение поверхности $\Gamma_{\rho,T}$ имеет вид

$$\Phi_\rho(y, \tau) \equiv \lambda(y) - \rho(\omega(y), \tau) = 0,$$

и следовательно, $\vec{n}(y, \tau) = \nabla_y\Phi_\rho / |\nabla_y\Phi_\rho|$, $v = -\Phi_{\rho\tau}/|\nabla_y\Phi_\rho|$. При таком задании границы $\Gamma_{\rho,T}$ первое условие на свободной границе в (1) можно записать в виде

$$\varkappa \frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\tau} = a^-(\nabla_y u^-, \nabla_y\Phi_\rho) - a^+(\nabla_y u^+, \nabla_y\Phi_\rho) \tag{2}$$

и затем перейти к переменным (x, t). Функцию $u^\pm(y, \tau) \circ e_\rho(x, t)$ обозначим прежним символом $u^\pm(x, t)$. Имеем

$$\varkappa \frac{\partial\rho}{\partial t} = a^-(\nabla_\rho u^-, \nabla_\rho\Phi_\rho) - a^+(\nabla_\rho u^+, \nabla_\rho\Phi_\rho),$$

где $\nabla_\rho = (E_\rho^*)^{-1}\nabla_x$, $\nabla = \nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $E_\rho^*(x, t)$ — матрица, сопряженная к матрице Якоби отображения $e_\rho(x, t)|_{t=\mathrm{const}}$: $x \to y$. Поскольку это условие должно выполняться на Γ_T, где $\Phi_\rho(y, \tau) \circ e_\rho(x, t) = 0$, то $\partial\Phi_\rho/\partial\omega_i = 0$ на Γ_T, поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\varkappa \frac{\partial\rho}{\partial t} = a^-\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial u^-}{\partial\omega_k}\nabla_\rho\omega_k + \frac{\partial u^-}{\partial\lambda}\nabla_\rho\lambda, \frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\lambda}\nabla_\rho\lambda\right) -$$

$$- a^+\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial u^+}{\partial\omega_k}\nabla_\rho\omega_k + \frac{\partial u^+}{\partial\lambda}\nabla_\rho\lambda, \frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\lambda}\nabla_\rho\lambda\right) \equiv S(\omega, \rho, \rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial\lambda} -\right.$$

$$\left. - a^+\frac{\partial u^+}{\partial\lambda}\right] + \sum_{k=1}^{2} S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial\omega_k} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial\omega_k}\right],$$

где $S(\omega, \rho, \rho_\omega)$, $S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega)$ — гладкие функции своих аргументов,

$$S(\omega, \rho, \rho_\omega) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial y_i} (y(\omega, \rho(\omega, t))) - \sum_{j=1}^{2} \rho_{\omega_j}(\omega, t) \frac{\partial \omega_j}{\partial y_i} (y(\omega, \rho(\omega, t))) \right\}^2,$$

$$S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{\partial \omega_k}{\partial y_i} \frac{\partial \lambda}{\partial y_i} (y(\omega, \rho(\omega, t))) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \rho}{\partial \omega_j} (\omega, t) \frac{\partial \omega_j}{\partial y_i} (y(\omega, \rho(\omega, t))) \right\}^2,$$

причем

$$S(\omega, 0, 0) = 1, \quad S_{\rho_{\omega_i}}(\omega, 0, 0) = 0, \quad S^{(k)}(\omega, 0, 0) = 0.$$

Введем в рассмотрение вектор $\vec{h}_\rho(x, t) = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \tau}, \frac{\partial x_2}{\partial \tau}, \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \right\} \Big|_{(y,\tau)=e_\rho(x,t)}$ и величину $m(\omega, \rho, \rho_\omega) = |\nabla_\rho \lambda(y)|^{-1}$, для которой $m(\omega, 0, 0) = 1$.

Поверхность $\Gamma \subset \Omega$ с помощью координат (ω_1, ω_2) зададим в виде $\vec{R} = \vec{R}(\omega_1, \omega_2) = (y_1(\omega_1, \omega_2), y_2(\omega_1, \omega_2))$ и, как было сказано, поверхность $\Gamma_{\rho, T}$ задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(\omega) = \vec{R}(\omega) + \vec{v}(\omega)\rho(\omega, \tau)$. Сумма главных кривизн $\Gamma_{\rho, T}$ в сечении $\tau = \text{const}$ вычисляется по формуле [9]

$$k(y, \tau) = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}, \tag{3}$$

где $L = (\vec{r}_{\omega_1\omega_1}, \vec{n})$, $M = (\vec{r}_{\omega_1\omega_2}, \vec{n})$, $N = (\vec{r}_{\omega_2\omega_2}, \vec{n})$, $E = (\vec{r}_{\omega_1}, \vec{r}_{\omega_1})$, $F = (\vec{r}_{\omega_1}, \vec{r}_{\omega_2})$, $G = (\vec{r}_{\omega_2}, \vec{r}_{\omega_2})$, $\vec{n} = \vec{n}(y, \tau)$, т. е. коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхности $\Gamma_{\rho, T}$. Будем предполагать, что $(EG - F^2)|_{\rho=0} \geqslant \geqslant \delta > 0$. Из (3) следует, что кривизну поверхности $\Gamma_{\rho, T}$ можно выразить в терминах функции $\rho(\omega, \tau)$, т. е.

$$k(y, \tau) = k(\omega, \rho, \rho_\omega, \rho_{\omega\omega}) = \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega) \rho_{\omega_i\omega_j} + k_0(\omega, \rho, \rho_\omega),$$

причем при $\rho \equiv 0$

$$k_{11}(\omega, 0, 0) = \frac{1}{2} \vec{R}^2_{\omega_2} | \mathscr{D}^2, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{1}{2} \vec{R}_{\omega_1} \vec{R}_{\omega_2} | \mathscr{D}^2,$$

$$k_{22}(\omega, 0, 0) = \frac{1}{2} \vec{R}^2_{\omega_1} | \mathscr{D}^2, \quad \mathscr{D}^2 \equiv \vec{R}^2_{\omega_1} \vec{R}^2_{\omega_2} - (\vec{R}_{\omega_1}, \vec{R}_{\omega_2})^2,$$

$\det\{k_{ij}\} = \frac{1}{2}$. Величина $\mathscr{D}^2$ определяется выбором координат (ω_1, ω_2) на поверхности Γ, в частности, для гладкой поверхности (ω_1, ω_2) могут быть выбраны так, чтобы $\mathscr{D}^2 \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

Таким образом, после перехода к переменным (x, t) задача (1) преобразуется в следующую. Требуется найти функции $u^\pm(x, t)$, определенные в области $\Omega_T^\pm$, и функцию $\rho(\omega, t)$, определенную на Γ_T, по условиям

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial t} + (\vec{h}_\rho, \nabla) u^\pm - a^\pm \nabla^2_\rho u^\pm = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T^\pm;$$

$$\varkappa \frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\omega, \rho, \rho_\omega) \left[a^- \frac{\partial u^-}{\partial \lambda} - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \lambda} \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) \left[a^- \frac{\partial u^-}{\partial \omega_k} - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \omega_k} \right],$$

$$u^+ = u^- = \varepsilon \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega)\rho_{\omega_i\omega_j} - \varepsilon\rho_t m(\omega, \rho, \rho_\omega) + \varepsilon k_0(\omega, \rho, \rho_\omega), \quad (x, t) \in \Gamma_T;$$

$$u^\pm = b^\pm(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T^\pm; \qquad u^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x), \quad \rho(\omega, 0) = 0. \tag{4}$$

3. Функциональное уравнение для исходной задачи. Прежде всего от задачи (4) перейдем к задаче с нулевыми начальными условиями. Для этого построим функции $s(\omega, t) \in H^{4+\alpha}(\Gamma_T)$ и $w^\pm(x, t) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$ такие, что $w^+ = w^-$ на Γ_T, $w^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x)$, $\partial w^\pm/\partial t(x, 0) = u_t^\pm(x, 0)$, $s(\omega, 0) = 0$, $\partial s/\partial t(\omega, 0) = \partial\rho/\partial t(\omega, 0)$, где $u_t^\pm(x, 0)$ определяются из уравнений задачи, а $\rho_t(\omega, 0)$ — из условий на Γ_T, т. е. фактически из условий согласования. Способ построения таких функций указан в [10], так что для указанных функций выполняется неравенство

$$|w^+|_{\Omega_T^+}^{(4+\alpha)} + |w^-|_{\Omega_T^-}^{(4+\alpha)} + |s|_{\Gamma_T}^{(4+\alpha)} \leqslant C(T)(|u_0^+|_{\Omega^+}^{(4+\alpha)} + |u_0^-|_{\Omega^-}^{(4+\alpha)})$$

при достаточной гладкости Γ, например, $\vec{R}(\omega) \in H^{5+\alpha}$.

В качестве новых неизвестных определим теперь функции $v^\pm(x, t) = u^\pm(x, t) - w^\pm(x, t)$, $\sigma(\omega, t) = \rho(\omega, t) - s(\omega, t)$, что приводит к задаче с нулевыми начальными условиями.

Произведем в задаче еще одну замену неизвестных функций: $\theta^\pm(x, t) = v^\pm(x, t) - (\nabla w^\pm, \delta e_\sigma)$, где $\delta e_\sigma(x, t) = \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}(\omega, \lambda)\chi(\lambda)\sigma(\omega(x), t)$.

Определим операторы $L_0^\pm \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} - a^\pm\nabla^2$, $L_\rho^\pm = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\vec{h}_\rho, \nabla) - a^\pm\nabla_\rho^2$, которые связаны между собой соотношением $(L_0^\pm u)\circ e_\rho = L_\rho^\pm(u\circ e_\rho)$. Теперь из соотношений (4), записанных для неизвестных функций $\theta^\pm(x, t)$, $\sigma(\omega, t)$, выделим некоторые линейные относительно этих неизвестных части, а все остальные члены перенесем в правую часть, тогда соотношения (4) принимают вид

$$L_0^\pm\theta^\pm = -[(L_0^\pm w^\pm)\circ e_\rho - (L_\rho^\pm w^\pm)\circ e_s] - L_s^\pm w^\pm - (L_\rho^\pm - L_0^\pm)(w^\pm -$$
$$- w^\pm\circ e_\rho) + (L_s^\pm - L_0^\pm)(w^\pm - w^\pm\circ e_s) - L_0^\pm[w^\pm + (\nabla w^\pm, \delta e_\rho) - w^\pm\circ e_\rho] +$$
$$+ L_0^\pm[w^\pm + (\nabla w^\pm, \delta e_s) - w^\pm\circ e_s] - (L_\rho^\pm - L_0^\pm)v^\pm \equiv \mathcal{F}_0^\pm(v^\pm, \sigma); \tag{5}$$

$$\varkappa\frac{\partial\sigma}{\partial t} + a^+\frac{\partial\theta^+}{\partial n} - a^-\frac{\partial\theta^-}{\partial n} + \sum_{i=1}^{2} b_i(\omega, t)\sigma_{\omega_i} = -\varkappa\frac{\partial s}{\partial t} + \left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial n} -\right.$$
$$\left.- a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}\right)S(\omega, s, s_\omega) + \sum_{k=1}^{2} S^{(k)}(\omega, s, s_\omega)\left[a^-\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k} - a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k}\right] +$$
$$+ \left(a^+\frac{\partial v^+}{\partial n} - a^-\frac{\partial v^-}{\partial n}\right)(1 - S(\omega, \rho, \rho_\omega)) - \left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial n} - a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}\right)\times$$
$$\times\left[S(\omega, \rho, \rho_\omega) - S(\omega, s, s_\omega) - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial S}{\partial s_{\omega_i}}(\omega, s, s_\omega)\sigma_{\omega_i}\right] - \sum_{k=1}^{2}\left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k} -\right.$$
$$\left.- a^-\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k}\right)\left[S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) - S^{(k)}(\omega, s, s_\omega) - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega, s, s_\omega)\sigma_{\omega_i}\right] -$$
$$- \sum_{k=1}^{2}\left(a^+\frac{\partial v^+}{\partial\omega_k} - a^-\frac{\partial v^-}{\partial\omega_k}\right)S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) -$$

$$-\left(a^{+}\frac{\partial^2 w^{+}}{\partial n^2}-a^{-}\frac{\partial^2 w^{-}}{\partial n^2}\right)\sigma\equiv\mathcal{F}_1(v^{+},v^{-},\sigma), \tag{6}$$

где

$$b_i(\omega,t)=\left(a^{+}\frac{\partial w^{+}}{\partial n}-a^{-}\frac{\partial w^{-}}{\partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)+\sum_{k=1}^{2}\left(a^{+}\frac{\partial w^{+}}{\partial\omega_k}-\right.$$

$$\left.-a^{-}\frac{\partial w^{-}}{\partial\omega_k}\right)\frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega);$$

$$\theta^{\pm}+\frac{\partial w^{\pm}}{\partial n}\sigma-\varepsilon\sum_{i,j=1}^{2}k_{ij}(\omega,s,s_\omega)\sigma_{\omega_i\omega_j}+\varepsilon\sigma_t m(\omega,s,s_\omega)\equiv\varepsilon\mathcal{F}_3(\sigma)+\mathcal{F}_4^{\pm}(\omega,t),$$

$$\mathcal{F}_3(\sigma)=-s_t m(\omega,\rho,\rho_\omega)+\sum_{i,j=1}^{2}[k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)-k_{ij}(\omega,s,s_\omega)]\sigma_{\omega_i\omega_j}+k_0(\omega,\rho,\rho_\omega)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)s_{\omega_i\omega_j}-\sigma_t[m(\rho,\rho_\omega,\omega)-m(s,s_\omega,\omega)]+s_t m(\omega,0,0), \tag{7}$$

$$\mathcal{F}_4^{\pm}(\omega,t)=-w^{\pm}-\varepsilon s_t m(\omega,0,0);$$

$$\theta^{\pm}(x,t)|_{x\in\Gamma^{\pm}}=b^{\pm}(x,t)-w^{\pm}-(\nabla w^{\pm},\delta e_\sigma)\equiv\mathcal{F}_2^{\pm}(\sigma). \tag{8}$$

Обозначим $\psi=(\theta^{+},\theta^{-},\sigma)$, тогда соотношения (5)—(8) можно записать в виде $A\psi=\mathcal{F}(\psi)$, причем линейный оператор A определен левыми частями этих соотношений, а нелинейный оператор $\mathcal{F}(\psi)=(\mathcal{F}_0^{+}(\psi),\mathcal{F}_0^{-}(\psi),$ $\mathcal{F}_1(\psi),\mathcal{F}_2^{+}(\psi),\mathcal{F}_2^{-}(\psi),\mathcal{F}_3(\psi),\mathcal{F}_4^{+}(\psi),\mathcal{F}_4^{-}(\psi))$ — правыми частями этих соотношений.

Определим банаховы пространства

$$\underset{0}{\hat{H}}{}^{k+\alpha}(\Gamma_T)=\{\sigma\in\underset{0}{H}{}^{k+\alpha}(\Gamma_T):\|\sigma\|_{\Gamma_T}^{(k+\alpha)}\equiv|\sigma|_{\Gamma_T}^{(k+\alpha)}+|\sigma_t|_{\Gamma_T}^{(k-1+\alpha)}<\infty\},$$

$k=1,2$, $\underset{0}{\hat{H}}{}^{\alpha}(\Gamma_T)$ — подпространство пространства $\underset{0}{H}{}^{\alpha}(\Gamma_T)$, состоящее из функций $f(\omega,t)$, имеющих производную по t в обобщенном смысле, причем

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)=a(\omega,t)+\nabla_\omega\vec{b}(\omega,t),$$

где a, b_i, $i=1,2$, принадлежат $H_0^{\alpha}(\Gamma_T)$. Норму в этом пространстве определим так:

$$\|f\|_{\Gamma_T}^{(\alpha)}=\inf_{a,\vec{b}}(|a|_{\Gamma_T}^{(\alpha)}+|\vec{b}|_{\Gamma_T}^{(\alpha)}).$$

Далее,

$$\mathcal{H}_\psi\equiv\underset{0}{H}{}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{+})\times\underset{0}{H}{}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{-})\times\underset{0}{\hat{H}}{}^{2+\alpha}(\Gamma_T),$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\equiv\underset{0}{H}{}^{\alpha}(\bar{\Omega}_T^{+})\times\underset{0}{H}{}^{\alpha}(\bar{\Omega}_T)\times\underset{0}{H}{}^{1+\alpha}(\Gamma_T)\times\underset{0}{H}{}^{2+\alpha}(\Gamma_T^{+})\times$$

$$\times\underset{0}{H}{}^{2+\alpha}(\Gamma_T^{-})\times\underset{0}{\hat{H}}{}^{\alpha}(\Gamma_T)\times\underset{0}{H}{}^{2+\alpha}(\Gamma_T)\times\underset{0}{H}{}^{2+\alpha}(\Gamma_T).$$

Оператор A ограничен из $\mathcal{H}_\psi$ в $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$. В объяснении при этом нуждается лишь тот факт, что $f(\omega,t)\equiv k_{ij}(\omega,s,s_\omega)\sigma_{\omega_i\omega_j}\in\hat{H}^{\alpha}(\Gamma_T)$, $\|f\|^{(\alpha)}\leqslant$ $\leqslant c\|\sigma\|^{(2+\alpha)}$. Для проверки последнего неравенства достаточно представить f в виде $f=\frac{\partial}{\partial\omega_i}(k_{ij}(\omega,s,s_\omega)\sigma_{\omega_j})-\sigma_{\omega_j}\frac{\partial}{\partial\omega_i}k_{ij}(\omega,s,s_\omega)$ и учесть, что k_{ij} — гладкая функция своих аргументов, $s \in H^{4+\alpha}(\Gamma_T)$, $|\sigma_{t\omega_k}|^{(\alpha)} \leqslant \leqslant \|\sigma\|^{(2+\alpha)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega_i} b_i + a, \quad b_i = \frac{\partial}{\partial t}(k_{ij}(\omega, s, s_\omega)\sigma_{\omega_j}),$$

$$a = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma_{\omega_j}\frac{\partial}{\partial \omega_i} k_{ij}(\omega, s, s_\omega)\right].$$

4. Модельная задача для модифицированной задачи Стефана. Ближайшей целью является изучение свойств оператора A из предыдущего пункта, в частности, доказательство его обратимости. Доказательство существования ограниченного обратного оператора A^{-1} проводится с помощью построения регуляризатора аналогично тому, как это делается в теории параболических уравнений ([10], гл. 4). При этом рассматривается ряд модельных задач, отвечающих различным случаям расположения $(x^{(k)}, t)$, в которых «замораживаются» коэффициенты в соотношениях, определяющих оператор A. Сейчас рассмотрим случай $t = 0$, $x^k \in \Gamma$, поскольку остальные случаи соответствуют изученным ранее [10].

Пусть требуется найти функции $u^\pm(z, t)$, определенные в областях $R_T^\pm = \{(z, t): z = (z', z_3),\ z' \in R^2,\ t \in (0, T),\ \pm z_3 > 0\}$, и функцию $\rho(z', t)$, определенную на $R_T' = \partial R_T^\pm$ согласно условиям

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial t} - a^\pm \Delta u^\pm = f^\pm(z, t), \quad (z, t) \in R_T^\pm;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + k^+\frac{\partial u^+}{\partial z_3} - k^-\frac{\partial u^-}{\partial z_3} + \sum_{i=1}^{2} b_i \rho_{z_i} = f_1(z', t), \tag{9}$$

$$u^\pm + d^\pm \rho - \varepsilon \sum_{i,j=1}^{2} \mu_{ij}\rho_{z_i z_j} + \varepsilon \rho_t = \varepsilon f_3(z', t) + f_4^\pm(z', t), \quad (z', t) \in R_T';$$

$$u^\pm(z, 0) = 0, \quad \rho(z', 0) = 0,$$

где $a^\pm$, $d^\pm$ — положительные постоянные, $\vec{b} = (b_1, b_2) \in R^2$, матрица $\{\mu_{ij}\}$ положительно определена и удовлетворяет условию

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} \mu_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2,$$

число $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где ε_0 — некоторое фиксированное положительное число. Будем предполагать, что

$$f^\pm \in \underset{0}{H}^{\alpha}(R_T^\pm), \quad f_1 \in \underset{0}{H}^{1+\alpha}(R_T'),$$

$$f_3 \in \underset{0}{\hat{H}}^{\alpha}(R_T'), \quad f_4^\pm \in \underset{0}{H}^{2+\alpha}(R_T')$$

и являются финитными, и искать решение задачи сопряжения (9) в классах

$$u^\pm(z, t) \in \underset{0}{H}^{2+\alpha}(R_T^\pm), \quad \rho(z', t) \in \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha}(\Gamma_T).$$

Заметим также, что от системы (9) легко перейти к системе, в которой $f^\pm \equiv 0$, $f_4^\pm \equiv 0$:

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial t} - a^\pm \Delta u^\pm = 0, \quad (z, t) \in R_T^\pm;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + k^+\frac{\partial u^+}{\partial z_3} - k^-\frac{\partial u^-}{\partial z_3} + \sum_{i=1}^{2} b_i \rho_{z_i} = f_1(z', t), \tag{10}$$

$$u^{\pm}+d^{\pm}\rho-\varepsilon\sum_{i,j}\mu_{ij}\rho_{z_iz_j}+\varepsilon\rho_t=\varepsilon f_3(z',t),\qquad (z',t)\in \overset{\circ}{R_T}$$

с сохранением нулевых начальных условий.

Обозначим через $\widetilde{f}(\lambda, z_3, p)$ преобразование Фурье по переменным $z'=(z_1, z_2)$ и преобразование Лапласа по переменной t функции $f(z_1, z_2, z_3, t)$, т. е.

$$\widetilde{f}(\lambda, z_3, p)=\int_{R^2}dz'\int_0^\infty f(z', z_3, t)\,e^{-i(z',\lambda)-pt}dt.$$

После применения этого интегрального преобразования к соотношениям (10) получим

$$p\widetilde{u}^{\pm}+a^{\pm}\lambda^2\widetilde{u}^{\pm}-a^{\pm}\frac{\partial^2\widetilde{u}^{\pm}}{\partial z_3^2}=0;$$

$$p\widetilde{\rho}+k^{+}\frac{\partial\widetilde{u}^{+}}{\partial z_3}-k^{-}\frac{\partial\widetilde{u}^{-}}{\partial z_3}-i\sum_{j=1}^{2}b_j\lambda_j\widetilde{\rho}=\widetilde{f}_1(\lambda, p),$$

$$\widetilde{u}^{\pm}+d^{\pm}\widetilde{\rho}+\varepsilon\sum_{i,j=1}^{2}\mu_{ij}\lambda_i\lambda_j\widetilde{\rho}+\varepsilon p\widetilde{\rho}=\varepsilon\widetilde{f}_3(\lambda, p). \tag{11}$$

Из первого уравнения в (11) имеем

$$\widetilde{u}^{\pm}(\lambda, z_3, p)=M^{\pm}e^{\pm\sqrt{\frac{p+a^{\pm}\lambda^2}{a^{\pm}}}z_3},$$

$$\left.\frac{\partial\widetilde{u}^{\pm}}{\partial z_3}\right|_{z_3=0}=\mp M^{\pm}\sqrt{\frac{p+a^{\pm}\lambda^2}{a^{\pm}}}.$$

Теперь из остальных соотношений в (11) получим линейную систему для нахождения величин $M^{\pm}$, $\widetilde{\rho}$:

$$p\widetilde{\rho}-k^{+}M^{+}\sqrt{\frac{p+a^{+}\lambda^2}{a^{+}}}-k^{-}M^{-}\sqrt{\frac{p+a^{-}\lambda^2}{a^{-}}}-i(b,\lambda)\widetilde{\rho}=\widetilde{f}_1,$$

$$M^{\pm}+d^{\pm}\widetilde{\rho}+\varepsilon[(\mu\lambda,\lambda)+p]\widetilde{\rho}=\varepsilon\widetilde{f}_3.$$

Из полученной системы следует, в частности,

$$\widetilde{\rho}=\widetilde{\mathcal{K}}_0(\lambda, p)\widetilde{f}_1+\widetilde{\mathcal{K}}_1(\lambda, p)\widetilde{f}_3, \tag{12}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{K}}_0(\lambda, p)=\Big\{\varepsilon[(\mu\lambda,\lambda)+p](q^{+}+q^{-})+d^{+}q^{+}+d^{-}q^{-}+p-i\sum_j b_j\lambda_j\Big\}^{-1},$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}_1(\lambda, p)=\varepsilon(q^{+}+q^{-})\widetilde{\mathcal{K}}_0(\lambda, p),\quad q^{\pm}=k^{\pm}\sqrt{\frac{p+a^{\pm}\lambda^2}{a^{\pm}}}.$$

Для изучения гладкости функции $\rho(z', t)$ воспользуемся результатами теорем 2.1, 2.2 работы [11], поэтому для полноты изложения сформулируем их здесь в том виде, в котором они будут применены ниже.

Теорема 3 (*И. Ш. Могилевский, В. А. Солонников*). *Пусть функция* $f(z',t)\in \overset{\circ}{H}{}^l(\overset{\circ}{R_T})$, *а функция* $u(z',t)$, *удовлетворяющая нулевым начальным условиям, связана с ней соотношением* $\widetilde{u}(\lambda, p)=\widetilde{\mathcal{K}}(\lambda, p)\widetilde{f}(\lambda, p)$, *причем* $(i, j=1, 2)$

$$|\widetilde{\mathcal{K}}|\leqslant c_1|r|^{-\beta},\quad |\partial\widetilde{\mathcal{K}}/\partial p|\leqslant c_2|r|^{-\beta-2},$$

$$|\partial\widetilde{\mathcal{K}}/\partial\lambda_j|\leqslant c_3|r|^{-\beta-1},\quad |\partial^2\widetilde{\mathcal{K}}/\partial p\partial\lambda_j|\leqslant c_4|r|^{-\ \,-3},$$

$$|\partial^2\widetilde{\mathcal{K}}/\partial\lambda_i\partial\lambda_j|\leqslant c_5|r|^{-\beta-2},\quad |\partial^3\widetilde{\mathcal{K}}/\partial p\partial\lambda_i\partial\lambda_j|\leqslant c_6|r|^{-\beta-4}$$

при $p=a+i\xi_0,\ a>0,\ \beta\geqslant 0,\ r=\sqrt{p+\lambda^2}$.

Тогда справедливо неравенство

$$|u|^{(l+\beta)}_{R'_T}\leqslant ce^{aT}\langle f\rangle^{(l)}_{R'_T},$$

где c зависит от c_i, $i=\overline{1,6}$, a, l и β.

Обратимся теперь к введенным функциям $\widetilde{\mathcal{K}}_i(\lambda, p)$. Обозначим

$$z_1=\varepsilon[p+(\mu\lambda,\lambda)](q^{+}+q^{-}),\quad z_2=p,\quad z_3=d^{+}q^{+}+d^{-}q^{-}.$$

Лемма 1. *Существуют постоянные $a>0$, $\nu_0>0$, зависящие только от μ, $k^{\pm}$, $d^{\pm}$, $a^{\pm}$, $\vec{b}$ и не зависящие от $\varepsilon>0$, такие, что при $p=a+$ $+i\xi_0$, $\xi_0\in R$,*

$$|z_1+z_2+z_3-i(b,\lambda)|\geqslant\nu_0(\varepsilon|r|^3+|p|+|r|). \tag{13}$$

Доказательство заключается в рассмотрении двух случаев: $|\lambda|\leqslant\delta|p|$ и $|p|\leqslant\delta^{-1}|\lambda|$, где δ — «малое» положительное число, которое будет выбрано ниже. В каждом из этих случаев покажем сначала, что выполнено

$$|z_1+z_2+z_3|\geqslant c_1(\varepsilon|r|^3+|p|+|r|), \tag{14}$$

$c_1=c_1(\mu, k^{\pm}, d^{\pm}, a^{\pm})$, а затем и неравенство (13). В обоих случаях ограничимся предположением, что $\operatorname{Im}p\geqslant 0$, так как противоположный случай соответствует переходу к сопряженным числам в (13).

Итак, пусть $|\lambda|\leqslant\delta|p|$. Из геометрических соображений очевидно, что, так как $\operatorname{Re}p=a>0$, $\operatorname{Im}p\geqslant 0$, то $0\leqslant\arg z_3\leqslant\frac{1}{2}\arg p$. Пусть $a=$ $=\delta^{-2}\zeta^{-1}$, $\zeta\in(0,1)$, тогда $|p|\geqslant\zeta^{-1}\delta^{-2}$, поэтому

$$|z_3|\leqslant 2\max d^{\pm}k^{\pm}(a^{\pm})^{-1/2}(|p|+a^{\pm}\lambda^2)^{1/2}\leqslant 2\max\frac{d^{\pm}k^{\pm}}{\sqrt{a^{\pm}}}\sqrt{\zeta\delta^2|p|^2+a^{\pm}\delta^2|p|^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\delta|p|\max\frac{d^{\pm}k^{\pm}}{\sqrt{a^{\pm}}}\sqrt{1+a^{\pm}},$$

т. е. при соответствующем выборе δ, $\delta=\delta(d^{\pm}, k^{\pm}, a^{\pm})$, справедливо неравенство $|z_3|\leqslant|p|$.

Оценки для аргумента и модуля z_3 ввиду простых геометрических соображений означают, что

$$\frac{1}{2}\arg p\leqslant\arg(p+z_3)\leqslant\arg p,\quad |p+z_3|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(|p|+|z_3|),$$

где последнее неравенство есть следствие того, что реальные и мнимые части p и z_3 неотрицательны.

Рассмотрим число $w=z_1/(p+z_3)$. Нетрудно видеть, что, так как $0\leqslant\arg z_1\leqslant\frac{3}{2}\arg p$, то $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg w=\arg z_1-\arg(p+z_3)\leqslant\frac{\pi}{2}$, поэтому $\operatorname{Re}w\geqslant 0$. Следовательно, $|z_1+p+z_3|=|p+z_3|\left|\frac{z_1}{p+z_3}+1\right|\geqslant$ $\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|p+z_3|\left(\frac{|z_1|}{|p+z_3|}+1\right)\geqslant\frac{1}{2}(|z_1|+|z_3|+|p|)$, что ввиду очевидных неравенств $\nu_1\leqslant|z_1/\varepsilon r^3|\leqslant\nu_2$, $\nu_1\leqslant|z_3/r|\leqslant\nu_2$, $\nu_1,\ \nu_2=\mathrm{const}>0$, приводит к оценке (14). Уменьшая, если это необходимо, число δ, будем считать, что $\delta\leqslant c_1/2|b|$. Тогда $|i(b,\lambda)|\leqslant(c_1/2)|p|$, поэтому $|z_1+p+$ $+z_3-i(b,\lambda)|\geqslant|z_1+z_2+z_3|-(b,\lambda)|\geqslant\frac{c_1}{2}(\varepsilon|r|^3+|p|+|r|)$, т. е. выполнено (14) с $\nu_0=c_1/2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $|p| < \delta^{-1}|\lambda|$. В этом случае $|\operatorname{Im} p| = |\xi_0| < \delta^{-1}|\lambda|$, $|\lambda| > \delta|\operatorname{Re} p| = \delta a$. Следовательно, $|\operatorname{tg}(\arg(p + a^{\pm}\lambda^2))| = \dfrac{|\xi_0|}{a + a^{\pm}\lambda^2} \leqslant \delta^{-1}|\lambda|/a^{\pm}|\lambda|^2 = \dfrac{\delta^{-1}}{a^{\pm}|\lambda|} \leqslant (a^{\pm}a\delta^2)^{-1} = \zeta/a^{\pm}$. Аналогично проверяется неравенство $|\operatorname{tg}(\arg(p + (\mu\lambda, \lambda)))| \leqslant \nu^{-1}\zeta$. Выбирая число ζ достаточно малым, можем добиться того, чтобы $0 < \arg z_i < \pi/4$, $i = 1, 3$. Отсюда, во-первых, следует, что реальные и мнимые части z_1, z_3 и p неотрицательны, поэтому, как и выше, выполнена оценка (14). Кроме того, $|z_3| \geqslant k^+ d^+ \left|\sqrt{\dfrac{p + a^+\lambda^2}{a^+}}\right| \geqslant k^+ d^+ \left|\sqrt{\dfrac{a^+\lambda^2}{a^+}}\right| \geqslant k^+ d^+ |\lambda| > k^+ d^+ \delta^{-1}|p|$. Поэтому $0 \leqslant \arg(z_1 + p + z_3) \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varphi_0(a^{\pm}, d^{\pm}, k^{\pm})$, $\varphi_0 = \mathrm{const} > 0$, следовательно,

$$\frac{|z_1 + p + z_3 - i(b, \lambda)|}{|z_1 + p + z_3|} \geqslant \frac{|\operatorname{Re}(z_1 + p + z_3)|}{|z_1 + p + z_3|} = \cos(\arg(z_1 + p + z_3)) \geqslant$$

$$\geqslant \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \nu_3 > 0.$$

Последнее неравенство вместе с (14) завершает доказательство леммы 1, причем в качестве ν_0 можно взять число $\min(\nu_3, c_1/2)$.

Из доказанной леммы непосредственно следует следующая лемма.

Лемма 2. *Функции $\widetilde{\mathcal{K}}_i(\lambda, p)$, $i = 0, 1$, удовлетворяют условиям теоремы 3 с $\beta = \beta_i = 1 + i$, $i = 0, 1$.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *При сформулированных предположениях о данных задачи (9) она имеет единственное решение, причем*

$$|u^{\pm}|_{R_T^{\pm}}^{(2+\alpha)} + \|\rho\|_{R'_T}^{(2+\alpha)} \leqslant c(|f^+|_{R_T^+}^{(\alpha)} + |f^-|_{R_T^-}^{(\alpha)} + |f_1|_{R'_T}^{(1+\alpha)} + \|f_3\|_{R'_T}^{(\alpha)} +$$

$$+ |f_4^+|_{R'_T}^{(2+\alpha)} + |f_4^-|_{R'_T}^{(2+\alpha)}), \tag{15}$$

где константа c не зависит от ε.

Доказательство. В силу известных оценок достаточно получить оценки решения задачи (10). Предположим сначала, что f_1 и f_3 — финитные бесконечно-дифференцируемые функции, причем

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = a(z', t) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial b_i}{\partial z_i}(z', t),$$

где a, b_i, $i = 1, 2$, $\in C^{\infty}$ и финитны. Соответствующие им функции u^+, u^- и ρ, дающие решение задачи (9), могут быть построены методом описанного выше интегрального преобразования. При этом оценка (15) для $|\rho|_{R'_T}^{(2+\alpha)}$ немедленно следует из леммы 2 и теоремы 3. Обозначим $\widetilde{g}_1(\lambda_1, p) = \widetilde{\mathcal{K}}_0(\lambda, p)\widetilde{f}_1(\lambda, p)$, $g_2(\lambda, p) = \widetilde{\mathcal{K}}_1(\lambda, p)\widetilde{f}_3(\lambda, p)$. В силу того, что, как легко проверить, функция $p\widetilde{\mathcal{K}}_0(\lambda, p)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 с $\beta = 0$, $\langle \dfrac{\partial g_1}{\partial t} \rangle_{R'_T}^{(1+\alpha)} \leqslant C(T)|f_1|_{R'_T}^{(1+\alpha)}$.

Для функции $g_2(z', t)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial g_2}{\partial t} = \mathcal{K}_1 * a + \sum_{i=1}^{2} \mathcal{K}_1 * \frac{\partial b_i}{\partial z_i}.$$

Легко проверить, что для функции $\lambda_i \widetilde{\mathcal{K}}_1(\lambda, p)$ справедливы условия теоремы 3 при $\beta = 1$. Поэтому из теоремы 3 следуют оценки

$$\langle \frac{\partial g_2}{\partial t} \rangle_{R'_T}^{(1+\alpha)} \leqslant C(T) \left(| a |_{R'_T}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^{2} | b_i |_{R'_T}^{(\alpha)} \right).$$

Для функций $f_1 \in H^{1+\alpha}(R'_T)$ и $f_3 \in \hat{H}^{\alpha}(R'_T)$ приведенные оценки получаются сглаживанием и предельным переходом, откуда получаем

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{R'_T}^{(1+\alpha)} \leqslant C(T) (| f_1 |^{(1+\alpha)} + \| f_3 \|_{R'_T}^{(\alpha)}).$$

Чтобы завершить доказательство леммы, заметим, что функции $u^+(z, t)$ и $u^-(z, t)$ удовлетворяют задаче сопряжения, состоящей из первых двух соотношений в (10) и соотношения

$$u^+ - u^- = (d^- - d^+) \rho, \quad z_3 = 0,$$

получаемого из третьего равенства в (10) вычитанием. Поэтому из полученных оценок нормы $\| \rho \|_{R'_T}^{(2+\alpha)}$ имеем

$$| u^\pm |_{R_T^\pm}^{(2+\alpha)} \leqslant C (| f_1 |_{R'_T}^{(1+\alpha)} + \| f_3 \|_{R'_T}^{(\alpha)}).$$

Лемма 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим в области $\Omega_T = \Omega_T^+ \cup \Omega_T^-$ следующую линейную задачу для неизвестных θ^+, θ^-, σ (см. соотношения (5) — (8)):

$$L_0^\pm \theta^\pm = \mathcal{F}_0^\pm, \quad (x, t) \in \Omega_T^\pm; \qquad \varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial t} + a^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial \theta^-}{\partial n} + \sum_{i=1}^{2} b_i \sigma_{\omega_i} = \mathcal{F}_1,$$

$$\theta^\pm + \frac{\partial w^\pm}{\partial n} \sigma - \varepsilon \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \sigma_{\omega_i \omega_j} + \varepsilon m \sigma_t = \varepsilon \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4^\pm, \quad x \in \Gamma; \tag{16}$$

$$\theta^\pm = \mathcal{F}_2^\pm, \quad x \in \Gamma^\pm; \qquad \theta^\pm(x, 0) = 0, \quad \sigma(\omega, 0) = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $\nu |\xi|^2 \leqslant k_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \nu^{-1} |\xi|^2$, $\nu \leqslant m \leqslant \nu^{-1}$, $\nu > 0$,

$$\mathcal{F}_0^\pm \in \underset{0}{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm), \ \mathcal{F}_1 \in \underset{0}{H}^{1+\alpha}(\Gamma_T), \ \mathcal{F}_2^\pm \in \underset{0}{H}^{2+\alpha}(\Gamma_T^\pm),$$

$$\mathcal{F}_3 \in \underset{0}{\hat{H}}^{\alpha}(\Gamma_T), \quad \mathcal{F}_4^+ \in \underset{r}{H}^{2+\alpha}(\Gamma_T), \quad \mathcal{F}_4^- \in \underset{0}{H}^{2+\alpha}(\Gamma_T).$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача* (16) *имеет единственное решение* $\theta^\pm(x, t) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $\sigma(\omega, t) \in \hat{H}^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, *удовлетворяющее оценке*

$$| \theta^+ |_{\Omega_T^+}^{(2+\alpha)} + | \theta^- |_{\Omega_T^-}^{(2+\alpha)} + \| \sigma \|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant C (| \mathcal{F}_0^+ |_{\Omega_T^+}^{(\alpha)} + | \mathcal{F}_0^- |_{\Omega_T^-}^{(\alpha)} + | \mathcal{F}_1 |_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} +$$

$$+ | \mathcal{F}_2^+ |_{\Gamma_T^+}^{(2+\alpha)} + | \mathcal{F}_2^- |_{\Gamma_T^-}^{(2+\alpha)} + \| \mathcal{F}_3 \|_{\Gamma_T}^{(\alpha)} + | \mathcal{F}_4^+ |_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + | \mathcal{F}_4^- |_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}). \tag{17}$$

Доказательство данного утверждения основано на лемме 3 и повторяет стандартную процедуру доказательства разрешимости линейных параболических задач ([10], гл. IV). Константа C в (17) зависит от

$$\nu, \ a^\pm, \ \varkappa, \ | b_i |_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}, \quad \left| \frac{\partial w^\pm}{\partial n} \right|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}, \quad | k_{ij} |_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}, \quad | m |_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}$$

и не зависит от $\varepsilon \geqslant 0$.

Как отмечалось в п. 3, исходная задача (4) может быть представлена в виде

$$A\psi = \mathcal{F}(\psi). \tag{18}$$

Отметим, что лемма 4, фактически, утверждает существование ограниченного обратного оператора A^{-1} для оператора A и равномерную по ε

оценку $\| A^{-1} \|_{\mathscr{H}_{\mathscr{F}} \to \mathscr{H}_{\psi}}$. Нелинейный оператор $\mathscr{F}(\psi)$ будем рассматривать на шаре B_r радиус r с центром в нуле в $\mathscr{H}_\psi$. Из определения $\mathscr{F}(\psi)$ следует, что $\mathscr{F}(\psi) \in \mathscr{H}_{\mathscr{F}}$ при $\psi \in \mathscr{H}_\psi$ и справедливы оценки

$$\| \mathscr{F}(0) \|_{\mathscr{H}_{\mathscr{F}}} \leqslant C T^{\alpha/2}, \tag{19}$$

$$\| \mathscr{F}(\psi_2) - \mathscr{F}(\psi_1) \|_{\mathscr{H}_{\mathscr{F}}} \leqslant C (T^{\alpha/2} + g(r)) \| \psi_2 - \psi_1 \|_{\mathscr{H}_\psi}, \tag{20}$$

где $g(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Смысл неравенств (19) и (20) состоит в том, что выражение для $\mathscr{F}(\psi)$ содержит младшие по отношению к норме пространства $\mathscr{H}_{\mathscr{F}}$ слагаемые, а также слагаемые, «квадратичные» по ψ.

Например, пусть $\sigma_k \in B_r$, $k = 1, 2$, $I_k \equiv [k_{ij}^{(k)} - k_{ij}^{(0)}] \sigma_{k\omega_i\omega_j}$,

$$k_{ij}^{(k)} = k_{ij}(\omega, \rho_k, \rho_{k\omega}), \quad k = 1, 2, \quad k_{ij}^{(0)} = k_{ij}(\omega, s, s_\omega);$$

$$I_2 - I_1 = [k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}] \sigma_{2\omega_i\omega_j} + [k_{ij}^{(1)} - k_{ij}^{(0)}] (\sigma_{2\omega_i\omega_j} - \sigma_{1\omega_i\omega_j} \equiv A_1 + A_2;$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = \left\{ \sigma_{2\omega_i\omega_j} \frac{\partial}{\partial t} [k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}] - \sigma_{2\omega_j t} \frac{\partial}{\partial \omega_i} [k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}] \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \omega_i} \{ [k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}] \sigma_{2\omega_j t} \} \equiv a(\omega, t) + \frac{\partial}{\partial \omega_i} b_i(\omega, t).$$

В силу гладкости функции k_{ij} для функций a и b_i справедливы оценки

$$| a |_{\Gamma_T}^{(\alpha)} \leqslant C \| \sigma \|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \| k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)} \|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} \leqslant Cr \| \sigma_2 - \sigma_1 \|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)},$$

$$| b_i |_{\Gamma_T}^{(\alpha)} \leqslant Cr \| \sigma_2 - \sigma_1 \|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}.$$

Из аналогичных оценок для функции $A_2(\omega, t)$ в результате получаем

$$\| I_2 - I_1 \|_{\Gamma_T}^{(\alpha)} \leqslant Cr \| \sigma_2 - \sigma_1 \|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant Cr \| \psi_2 - \psi_1 \|_{\mathscr{H}_\psi}.$$

Оценки (19) и (20) и лемма 4 показывают, что оператор $A^{-1} \circ \mathscr{F}$, определенный на B_r, при достаточно малых не зависящих от $\varepsilon \geqslant 0$ r и T является сжимающим в B_r. Следовательно, уравнение $\psi = A^{-1} \mathscr{F}(\psi)$ имеет единственное решение в B_r при любом $\varepsilon \geqslant 0$, причем величина T в определении B_r не зависит от $\varepsilon \geqslant 0$. Учитывая компактность вложения $H^{l+\alpha}$ в $H^{l+\alpha'}$, $\alpha' < \alpha$, получаем справедливость утверждения теоремы 2.

1. *Caginalp G.* Stefan and Hele-Show type model as asymptotic limits of the phase-field eguations // Phys. Rev.—1989.—**39**, N 11.— P. 5887—5896.
2. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости задачи Стефана с кинетическим условием на свободной границе // Нелинейные граничные задачи.— Киев : Наук. думка.— (В печати).
3. *Visintin A.* Stefan problem with a kinetic condition at the free boundary // Ann. mat. pura ed appl.— 1987.— **14**, N 6.— P. 97—122.
4. *Xie W.* The Stefan problem with a kinetic condition at the free boundary // SIAM. J. Math. Anal.— 1990 — **21**, N 2.— P. 362—373
5. *Hanzawa E. I.* Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J.— 1981.— **33**.— P. 297—335.
6. *Мейрманов А. М.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сб.— 1980.— **100** (142).— С. **170.**
7. *Базалий Б. В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986. — № 11.— С. 3—7.
8. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб.— 1987.— **132** (174). № 1.— С. 3—19.
9. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.— М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1950.— 427 с.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
11. *Могилевский И. Ш., Солонников В. А.* Разрешимость одной некоэрцитивной начально-краевой задачи для системы Стокса в гельдеровских классах функций (случай полупространства) // Zeit. Anal. und Anwendungen.—1989.—8, N 4.—329.

Получено 09.10.91