УДК 517.54

В. Я. Гутлянский, д-р физ.-мат. наук,
В. И. Рязанов, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О решениях с особенностями одного уравнения математической физики

Получена теорема представления решений с особенностями логарифмического типа одного уравнения математической физики через квазиконформные отображения.

Одержана теорема зображення розв'язків з особливостями логарифмічного типу одного рівняння математичної фізики через квазіконформні відображення.

Развитие вариационного исчисления в теории квазиконформных отображений преследует, по крайней мере, две цели. Одна из них — это нахождение экстремума конкретного функционала в заданном семействе отображений и определение экстремальных функций. Другая — доказательство теорем существования решений некоторых уравнений в частных производных и систем с заданными свойствами и их представление через квазиконформные гомеоморфизмы за счет выбора подходящего функционала в надлежащем компактном классе отображений. Первое направление достаточно развито (см., например, [1—4] и цитируемую там литературу). Что касается второго направления, то здесь следует отметить две оригинальные работы Шиффера и Шобера [5, 6] и некоторые результаты авторов [7, 8].

Подход, изложенный в работах [5, 6], сопряжен с жесткостью в выборе ассоциированного функционала и дополнительными ограничениями на поведение коэффициентов уравнений в окрестности особых точек. Цель данной работы состоит в развитии нового вариационного подхода к исследованию проблем существования и представления, свободного, в определенной мере, от упомянутых выше ограничений. Не умаляя общности рассуждений, ограничимся исследованием известного уравнения математической физики

$$\operatorname{div}(Q \operatorname{grad} U) = 0 \tag{1}$$

с коэффициентом $Q(z): \overline{\mathbb{C}} \to [1, \infty)$ класса L^∞.

1. Переходя к комплексной записи уравнения (1), под решением с особенностями в точках $z_0 \in \mathbb{C}$ и ∞ будем понимать функцию $U \in W^1_{2,\text{loc}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$, обладающую сопряженной функцией $V \in W^1_{2,\text{loc}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ такой, что пара (U, V) удовлетворяет почти всюду (п. в.) обобщенной системе Коши — Римана

$$\begin{aligned} V_x &= Q(z) U_y, \\ V_y &= -Q(z) U_x, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = x + iy$. В терминах комплекснозначной функции $F(z) = U + iV$ система (2) имеет вид

$$F_{\bar z} = -k(z)\overline{F_z}, \tag{3}$$

где $k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$.

Гомеоморфизм f области $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ класса $W^1_{2,\text{loc}}(D)$ называется $Q(z)$-квазиконформным ($Q(z)$-к. к.), если он удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z \text{ п. в.} \tag{4}$$

с некоторой комплексной дилатацией $\mu \in L^\infty(D)$, модуль которой $|\mu(z)| \leqslant k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$ [4, с. 136; 9, с. 194].

Теорема 1. *Пусть $Q(z): \overline{\mathbb{C}} \to [1, \infty)$ — функция класса L^∞. Тогда существует $Q(z)$-к. к. гомеоморфизм $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$*

такой, что функция

$$U(z) + iV(z) = \ln [\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)] \tag{5}$$

является решением системы (2) *с особенностями логарифмического типа в точках* z_0 *и* ∞.

Теорема 2. *Если, дополнительно,* $Q(z)$ *удовлетворяет в точке* z_0 *условию Тейхмюллера*

$$\iint\limits_{|z-z_0|\leqslant\delta} \frac{|Q(z) - Q(z_0)|}{|z - z_0|^2} dxdy < \infty, \tag{6}$$

а $Q(1/z)$ — *аналогичному условию в нуле, то существуют конечные пределы*

$$\lim_{z\to z_0} \left\{ U(z, z_0) - \frac{1}{Q(z_0)} \ln |z - z_0| \right\}, \tag{7}$$

$$\lim_{z\to\infty} \left\{ U(z, z_0) - \frac{1}{Q(\infty)} \ln |z| \right\}. \tag{8}$$

2. Условимся говорить, что измеримая функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Дини в точке z_0, если ее существенный модуль непрерывности

$$\omega(r) = \omega(r, z_0, \varphi) = \operatorname*{ess\,sup}_{|z-z_0|\leqslant r} |\varphi(z) - \varphi(z_0)|$$

удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(r)}{r} \mathrm{dr} < \infty \tag{9}$$

для некоторого $\delta > 0$ [5, 6].

Отметим, что теорема 1 о существовании и представлении решения системы (2) с логарифмическими особенностями носит законченный характер, в то время как аналогичный результат в [5] доказан при предположении, что коэффициент $Q(z)$ существенно непрерывен в точке z_0, т. е. $\omega(z) \to 0$ при $r \to 0$. Более того, в [5] предполагалось, что $Q(z)$ удовлетворяет условию Дини. Мы получаем этот результат на основе вариационной процедуры в специальном классе $Q(z)$-к. к. отображений расширенной комплексной плоскости (см. п. 5). Далее, заключения теоремы 2 установлены в [5] также при выполнении условия Дини.

Предложение 1. *Из условий Дини следует условие Тейхмюллера.*

Доказательство этого предложения будет проведено в п. 4.

Следующий простой пример показывает, что из условия Тейхмюллера не следует, вообще говоря, ни условие Дини, ни существенная непрерывность $Q(z)$ в точке z_0.

Пример 1. Пусть $Q(0) = 1$ и $Q(z) = 1 + \alpha(|z|)$ при $z \neq 0$, где $\alpha(r) = 1$ при $r \in [1/n, 1/n + 1/n^3]$, $n = 1, 2, \dots$ и $\alpha(r) = 0$ для остальных $r > 0$. Для такого $Q(z)$ модуль непрерывности $\omega(r) \equiv 1$ и, следовательно, не выполняется ни условие Дини, ни существенная непрерывность $Q(z)$ в точке z_0. В то же время условие Тейхмюллера выполнено, так как

$$\iint\limits_{|z|\leqslant\delta} \frac{|Q(z) - Q(0)|}{|z|^2} dxdy = 2\pi \int\limits_0^\delta \frac{\alpha(r)}{r} dr \leqslant 2\pi \sum_{n=N-1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

где N — целая часть числа $1/\delta$.

3. Сделаем также несколько замечаний по поводу аппроксимативной непрерывности, вытекающей из условия Тейхмюллера. Заметим прежде всего, что условие Тейхмюллера (6) равносильно условию

$$\lim_{r\to 0} \iint\limits_{|z-z_0|\leqslant r} \frac{|Q(z) - Q(z_0)|}{|z - z_0|^2} dxdy = 0. \tag{10}$$

Отсюда получаем более слабое, чем (6), условие

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{|z-z_0|\le r}|Q(z)-Q(z_0)|\,dxdy=0. \tag{11}$$

При выполнении условия (11) говорят, что z_0 является точкой Лебега для $Q(z)$. Как известно, при $Q(z)\in L^\infty$ это равносильно тому, что z_0 является точкой аппроксимативной непрерывности функции $Q(z)$.

Напомним, что точка z_0 называется точкой аппроксимативной непрерывности функции $Q(z)$, если существует такое измеримое множество E, на котором $Q(z)\to Q(z_0)$ при $z\to z_0$, и z_0 является точкой плотности для E, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{mes}E\cap K(z_0,\varepsilon)/\operatorname{mes}K(z_0,\varepsilon)=1,$$

где $K(z_0,\varepsilon)=\{z\in C:|z-z_0|\le\varepsilon\}$ [10, с. 199].

Покажем, что при непрерывности $Q(z)$ в точке z_0 конечный предел в (7) может не существовать. Приводимый ниже пример также показывает, что из непрерывности $Q(z)$ не следует условие Тейхмюллера.

Пример 2. Рассмотрим функцию $Q(z)=1-\ln^{-1}|z|$ при $0<|z|<2/e$, доопределенную в нуле и вне круга $|z|<2/e$ единицей. Как легко видеть, $Q(z)$ непрерывна в нуле, а условие Тейхмюллера (6) не выполнено.

Функция $F=U+iV:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ вида $F(0)=\infty$, $F(z)=\ln z+\ln(1-\ln|z|)$ при $0<|z|<2/e$ и $F(z)=\ln z+\ln(2-\ln 2)$ при $|z|\ge 2/e$ является решением уравнения (3) с указанным $Q(z)$ и с особенностями в точках $z_0=0$ и ∞. Это решение представимо в виде $F=\ln f$, где f — $Q(z)$-к. к. гомеоморфизм $\overline{C}$ вида $f(0)=0$, $f(z=z(1-\ln|z|)$ при $0<|z|\le 2/e$ и $f(z)=z(2-\ln 2)$ при $|z|\ge 2/e$. При этом $U-\ln|z|\to\infty$ при $z\to 0$.

Таким образом, в выделенной шкале, условие Тейхмюллера является точным для существования конечного предела в (7). Как показано в статье В. И. Рязанова, публикуемой в этом же номере, при условии аппроксимативной непрерывности существует предел

$$\lim_{z\to z_0}\frac{U(z,z_0)}{\ln|z-z_0|}=\frac{1}{Q(z_0)}. \tag{12}$$

4. Доказательство предложения 1. Прежде всего заметим, что из счетной аддитивности меры и монотонности существенного модуля непрерывности $\omega(r)$ следует его непрерывность слева.

Покажем, что $\alpha(z)=|Q(z)-Q(z_0)|\le\omega(|z-z_0|)$ для почти всех z из круга $K:|z-z_0|\le\delta$. Действительно, допустим, что множество E из этого круга тех точек z, где $\alpha(z)>\omega(|z-z_0|)$, имеет положительную меру. Тогда в силу счетной аддитивности меры найдется множество $E_n\subseteq E$ положительной меры, где $\alpha(z)\ge\omega(|z-z_0|)+1/n$ для некоторого $n=1,2,\ldots$. Пусть $\chi(z)$ — характеристическая функция этого множества. Тогда для измеримой функции $\beta(z)=\alpha(z)\chi(z)$ найдется хотя бы одна точка аппроксимативной непрерывности ζ из E_n [10, с. 199].

Таким образом, существует измеримое множество $\mathscr{E}\subseteq K$, на котором $\beta(z)\to\beta(\zeta)$ при $z\to\zeta$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{mes}\mathscr{E}\cap K(\zeta;\varepsilon)/\operatorname{mes}K(\zeta;\varepsilon)=1, \tag{13}$$

где $K(\zeta;\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}:|z-\zeta|\le\varepsilon\}$. Поскольку $\beta(z)\ge 1/n$ при $z\in E_n$ и $\beta(z)=0$ при $z\notin E_n$, то для достаточно малых $\varepsilon:\mathscr{E}\cap K(\zeta;\varepsilon)\subseteq E_n$, т. е. без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{E}\subseteq E_n$.

Пусть K_0 — круг $|z-z_0|\le r_0$, где $r_0=|\zeta-z_0|$. В силу (13) для любого $\varepsilon>0$ множество $\mathscr{E}_0=K_0\cap\mathscr{E}\cap K(\zeta;\varepsilon)$ имеет положительную меру. Следовательно, найдется последовательность $z_m\to\zeta$ точек из $\mathscr{E}_0\subseteq E_n$, для которой $\omega(r_0)\ge\alpha(z_m)\ge\omega(r_m)+1/n$, где $r_m=|z_m-\zeta|\to r_0$ и $r_m\le r_0$. В силу непрерывности $\omega(r)$ слева получаем $\omega(r_0)\ge\omega(r_0)+1/n$.

Полученное противоречие и доказывает, что $|Q(z) - Q(z_0)| \leqslant \omega(|z - z_0|)$ для почти всех $z \in K$ и потому из неравенства Дини (9) следует неравенство Тейхмюллера (6).

5. На примере системы (2) опишем вариационную процедуру, приводящую к теоремам существования решений и их представления через квазиконформные гомеоморфизмы.

Пусть $\mathfrak{F}_{r,R}$ — класс $Q(z)$-к. к. автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, конформных в областях $|z - z_0| < r$ и $|z| > R$, $r + |z_0| < R$, с гидродинамической нормировкой на бесконечности*. Обозначим через $\mathfrak{M}_{r,R}$ множество комплексных дилатаций μ в $\overline{\mathbb{C}}$, равных нулю при $|z - z_0| < r$ и $|z| > R$, таких, что $|\mu(z)| \leqslant (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$ для остальных z. Очевидно, $\mathfrak{M}_{r,R}$ — выпуклое множество, а класс $\mathfrak{F}_{r,R}$ совпадает с множеством нормированных решений уравнения Бельтрами $f_{\bar z} = \mu(z) f_z$, когда $\mu \in \mathfrak{M}_{r,R}$. Таким образом, для любого $\nu \in \mathfrak{M}_{r,R}$ семейство функций $\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon(\nu - \mu) \in \mathfrak{M}_{r,R}$, соответственно, $f_\varepsilon \in \mathfrak{F}_{r,R}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, и в силу теоремы о дифференцировании квазиконформных отображений по параметру [11] имеем следующую вариационную формулу (ср. [3] и [8]).

Предложение 2. *Если $f \in \mathfrak{F}_{r,R}$ и $\mu \in \mathfrak{M}_{r,R}$ — ее комплексная дилатация, то для любого $\nu \in \mathfrak{M}_{r,R}$ существует вариация f в классе $\mathfrak{F}_{r,R}$ вида*

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\{\mu(\zeta) - \nu(\zeta)\}}{f(\zeta) - f(z)} f_\zeta^2 \, dm_\zeta + o(\varepsilon), \tag{14}$$

где $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно в $\mathbb{C}$.

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим на классе $\mathfrak{F}_{r,R}$ экстремальную задачу $\max |f'(z_0)|$. Функционал $|f'(z_0)|$ является непрерывным на классе $\mathfrak{F}_{r,R}$ в топологии локально равномерной сходимости, а сам класс $\mathfrak{F}_{r,R}$ — компактным в этой топологии (см., например, [12]). Отсюда следует существование экстремальной функции в указанном классе. Из условия максимума и вариационной формулы (14) следует необходимое условие экстремума

$$f_{\bar z} = -k(z) \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{f(z) - f(z_0)}} \overline{f_z}, \tag{15}$$

$k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$, в кольцевой области и $f_{\bar z} = 0$ для $|z - z_0| < r$ и $|z| > R$.

Отметим, что отображение $(f(z) - f(0))/(f(1) - f(0))$ также удовлетворяет уравнению (15). Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Обозначим через $\mathfrak{F}(Q(z))$ класс всех $Q(z)$-к. к. отображений плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя с указанными нормировками. Этот класс секвенциально компактен [9, 12]. В силу этого можно выделить последовательности $r_n \to 0$ и $R_n \to \infty$, для которых соответствующие отображения $f_n \to f \in \mathfrak{F}(Q(z))$ локально равномерны. По теореме Боярского [13, с. 484] предельное $Q(z)$-к. к. отображение f удовлетворяет уравнению (15) во всей комплексной плоскости. Таким образом, функция $F(z) = \ln(f(z) - f(z_0))$ является решением уравнения (3) с особенностями в точках z_0 и ∞, т. е. теорема 1 полностью доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Для этого рассмотрим отображение $\Phi = \varphi \circ g$, где $g(z) = f(z_0 + z) - f(z_0)$, $\varphi(w) = w|w|^{Q-1}$, где $Q = Q(z_0)$. Заметим, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(\infty) = \infty$ и удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\varphi_{\bar w} = k \frac{w}{\bar w} \varphi_w \tag{16}$$

с $k = (Q - 1)/(Q + 1)$. Отображение h, обратное g, удовлетворяет уравнению

$$h_{\bar w} = k(z_0 + h(w)) \frac{w}{\bar w} h_w \tag{17}$$

---

* Разложение функции f в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ имеет вид $f = z + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots$

с $k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$ и $h(0) = 0$, $h(\infty) = \infty$. Таким образом, $\Phi = \varphi \circ h^{-1}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \infty$, имеет комплексную дилатацию

$$\mathrm{M}(z) = \frac{k(z_0) - k(z_0 + z)}{1 - k(z_0)\,k(z_0 + z)}\,\frac{\overline{g_z}}{g_z}\,\frac{g(z)}{\overline{g(z)}}. \tag{18}$$

Поскольку $Q \ln |g| = \ln |\Phi|$, то по теореме Тейхмюллера — Виттиха — Белинского [14, 15, 1, 9] предел в (7) конечен. Аналогично доказывается, что конечен предел (8).

1. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений.— Новосибирск: Наука, 1974.— 98 с.
2. *Крушкаль С. Л.*, *Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения.— Новосибирск: Наука, 1984.— 216 с.
3. *Гутлянский В. Я.* О методе вариаций для однолистных функций с квазиконформным продолжением // Докл. АН СССР.— 1977.— **236**, № 5.— С. 1045—1048.
4. *Schober J.* Univalent Functions-Selected Topics.— Berlin etc.; Springer, 1975.— 199 p.
5. *Schiffer M.*, *Schober J.* Representation of fundamental solutions for generalised Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn.— **1976**.— 2.— P. 501—531.
6. *Schiffer M.*, *Schober J.* A variational method for general families of quasiconformal mappings // J. Anal. Math.— 1978.— **34**.— P. 240—264.
7. *Гутлянский В. Я.*, *Рязанов В. И.* О фундаментальном решении одного уравнения математической физики // Комплексные методы в математической физике.— Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1984. — С. 134—138.
8. *Гутлянский В. Я.*, *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику М. А. Лаврентьева // Сиб. мат. журн.— 1990.— **31**, № 2.— С. 21—36.
9. *Lehto O.*, *Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen.— Berlin etc.: Springer, 1965.—269 p.
10. *Сакс С.* Теория интеграла.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— 494 с.
11. *Ahlfors L.*, *Bers L.* Riemann's mappings theorem for variable metrics // Ann. Math.— 1960.— **72**, N 2.— P. 385—404.
12. *Strebel K.* Ein Konvergenzsatz für Folgen quasiconformer Abbildungen // Comment. math. helv.— 1969.— **44**, N 7.— S. 469—475.
13. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб.— 1957.— **43** (85), № 4.— С. 451—503.
14. *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und guasikonforme Abbildung // Deutsche Math.— 1938.— **3**.— S. 621—678.
15. *Wittich H.* Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen // Math. Zeitschr.— 1948.— **51**.— S. 275—288.

Получено 09.10.91