УДК 517.53

**А. А. Довгошей**, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

# О семействах функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами

Исследуется задача о приближении функций из классов Харди ограниченными аналитическими функциями. Доказана теорема, характеризующая множества функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами как предельные точки семейства ограниченных подмножеств пространства $H^\infty$.

Досліджується задача про наближення функцій із класів Харді обмеженими аналітичними функціями. Доведена теорема, що характеризує множини функцій з одностайно абсолютно неперервними інтегралами як граничні точки сім'ї обмежених підмножин простору $H^\infty$.

Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство, $\exp_m X$ — семейство замкнутых ограниченных подмножеств пространства $X$, $F_i \in \exp_m X$, $i = 1, 2$.

Определение 1. *Отклонением множества* $F_2$ *от множества* $F_1$ *называют величину*

$$\alpha(F_1, F_2) =: \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0,\ F_2 \subset O_\varepsilon F_1\}, \tag{1}$$

*где* $O_\varepsilon F_1$ — *ε-окрестность множества* $F_1$ [1, *с.* 98].

Следующие простые соотношения справедливы для любых $F_1$, $F_2$, $F_3$ из $\exp_m X$:

$a_1$) $0 \leqslant \alpha(F_1, F_2) < \infty$;

$a_2$) $(\alpha(F_1, F_2) = 0) \Leftrightarrow (F_1 \supset F_2)$;

$a_3$) $\alpha(F_1, F_3) \leqslant \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3)$.

Очевидно, в силу отсутствия симметрии отклонение не является метрикой на $\exp_m X$. Однако, если для множества $\mathfrak{D} \subset \exp_m X$ определить его замыкание $\mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{D}) \subset \exp_m X$ соотношением

$$(F \in \mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{D})) \Leftrightarrow (\inf\{\alpha(F_i, F) : F_i \in \mathfrak{D}\} = 0), \tag{2}$$

то, используя $(a_1)$ — $(a_3)$, легко показать, что оператор $\mathrm{cl}_\alpha(\cdot)$ удовлетворяет аксиомам замыкания Куратовского и определяет на $\exp_m X$ топологическую структуру.

Пусть $X$ — компакт. Для множества $\exp_c X$, состоящего из компактных подмножеств $X$ (при этом семейства $\exp_c X$ и $\exp_m X$ совпадают с $\exp X$ — множеством всех замкнутых подмножеств $X$) можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Многозначное отображение* $\Phi$ *топологического пространства* $Y$ *в* $X$, *ставящее в соответствие точкам из* $Y$ *замкнутые подмножества* $X$, *будет полунепрерывным снизу* (*т. е. таким, что для любого* $A \in \exp X$ *множество*

$$\{y \in Y : \Phi(y) \in \exp A\}$$

*замкнуто в* $Y$) *тогда и только тогда, когда однозначное отображение*

$$\Phi : Y \to \exp X$$

*будет непрерывным в топологии, порожденной на пространстве* $\exp X$ *отклонением* $\alpha$.

Этот факт вполне аналогичен тому, что топология Вьеториса на $\exp_c X$ порождается метрикой Хаусдорфа, и может быть доказан с помощью сходных рассуждений [1, с. 138]. Таким образом, отклонение $\alpha$ порождает $\lambda$-топологию на пространстве $\exp X$ [2, с. 183]. Это обозначение будет использовано ниже и в случае некомпактного пространства $X$ для топологии, задаваемой на $\exp_m X$ оператором $\mathrm{cl}_\alpha(\cdot)$.

Пусть теперь $X$ — класс Харди аналитических в единичном круге $D$ функций $f$. Класс $H^p$ при $p \geqslant 1$ является пространством Банаха, а при $p < 1$ — полным метрическим пространством с нормой (метрикой), определяемой по формуле

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \tag{3}$$

$$\rho(f, g) = (\|f - g\|_p)^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it}) - g(e^{it})|^p dt, \quad 0 < p < 1.$$

Обозначим через $B_r^\infty$ замкнутый шар радиуса $r$ в $H^\infty$, т. е.

$$B_r^\infty = \{f \in H^\infty : \|f\|_\infty \leqslant r\}, \tag{4}$$

а через $\mathfrak{B}$ — семейство всех таких шаров:

$$\mathfrak{B} = \{B_r^\infty : 0 < r < \infty\}. \tag{5}$$

Очевидно, $\mathfrak{B} \subset \exp_m H^p$ при любом $p$ из $(0, \infty]$.

Основное внимание в настоящей работе будет уделено задаче описания предельных точек семейства $\mathfrak{B}$ в $\lambda$-топологии пространства $\exp_m H^p$ при $0 < p < \infty$.

Прежде чем переходить к изучению сформулированной задачи, отметим некоторые простые, связанные с ней, факты.

Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство всех подмножеств, ограниченных в $H^\infty$ и замкнутых в $H^p$. Тогда $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}$ и $\mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{M}) = \mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{B})$. Если рассмотреть семейство $\mathfrak{B}_N$, состоящее из шаров с целочисленными радиусами, то и в этом случае $\mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{B}_N) = \mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{M})$. Эти равенства без труда выводятся из (2).

Так как внутренность любого шара $B_r^\infty$ пуста в $H^p$ при $0 < p < \infty$, то $H^\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^\infty$ есть $F_\sigma$ множество первой категории, всюду плотное в $H^p$.

Если $m$ — нормированная линейная мера Лебега на единичной окружности $T$, то пространство $H^p$ совпадает с $L^p(m, T)$-замыканием диск-алгебры $A_0$ — множеством всех функций, непрерывных в замкнутом круге $D$ и аналитических в открытом круге $D$. Аналогично, при любом $p$ из $(0, \infty)$, шар $B_r^\infty$ (4) есть $L^p(m, T)$ замыкание $B_r =: B_r^\infty \cap A_0$ — шара радиуса $r$ из $A_0$.

Эти замечания позволяют переформулировать рассматриваемую задачу для более широкого класса функциональных пространств, включающего в себя и пространства Харди $H^p$.

З а д а ч а 1. Пусть $W$ — компакт, $A$ — равномерная алгебра непрерывных на $W$ функций с нормой

$$\|f\|_\infty =: \max\{|f(z)| : z \in W\},$$

$\omega$ — положительная конечная борелевская мера на $W$, $G^p$ — замыкание алгебры $A$ в $L^p(\omega, W)$. Если $\overline{B}_r$ есть $L^p(\omega, W)$-замыкание шара радиуса $r$ из $A$, то какие множества из $\exp_m G^p$ будут являться предельными точками семейства

$$\widetilde{\mathfrak{B}} =: \{\overline{B}_r : 0 < r < \infty\} \tag{6}$$

в $\lambda$-топологии пространства $\exp_m G^p$?

Другими словами, для каких множеств $Z$ из $L^p(\omega, W)$ может быть построена последовательность ограниченных множеств $\{M_n\}_{n=1}^\infty$, $M_n \subset A$ так, чтобы $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n \in N)$:

$$(\forall f \in Z), \quad (\exists g \in M_n), \quad \|f - g\|_{G^p} < \varepsilon?$$

Пусть $F$ — семейство функций из $L^p(\omega, W)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Следуя* [3, с. 144], *будем говорить, что семейство функций*

$$|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$$

*имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для любого* $\omega$*-измеримого подмножества* $E$ *множества* $W$ *и любой* $f \in F$ *из неравенства* $\omega(E) \leqslant \delta$ *следует неравенство*

$$\int\limits_E |f|^p d\omega \leqslant \varepsilon.$$

Ниже сформулированы и доказаны простые предложения, необходимые для дальнейшего, при этом использованы обозначения, принятые в задаче 1.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если множество* $F$ *является предельной точкой семейства* $\mathfrak{B}$ (6) *в* $\lambda$*-топологии пространства* $\exp_m G^p$, $0 < p < \infty$, *то семейство функций $|F|^p$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Выберем $r > 0$ таким, что

$$\sup_{f\in F} \inf_{g\in \overline{B}_r} \int_W |f-g|^p d\omega \leqslant \varepsilon (2)^{-p-1}.$$

Пусть теперь $2\delta = (2r)^{-p}\varepsilon$, тогда при любых $f \in F$ и $E \subset W$ из неравенства $\omega(E) \leqslant \delta$ следует

$$\int_E |f|^p d\omega \leqslant 2^p \left(\int_E |f-g|^p d\omega + \int_E |g|^p d\omega\right) \leqslant 2^p (\varepsilon (2)^{-p-1} + r^p \omega(E)) \leqslant \varepsilon.$$

В соответствии с определением 2 семейство $|F|^p$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Предложение 3. *Пусть $V$ — компактное подмножество $G^p$, тогда $V$ — предельная точка семейства $\mathfrak{B}$ в $\lambda$-топологии пространства* $\exp_m G^p$, $0 < p < \infty$.

Доказательство. Так как $G^p$ является $L^p(\omega, W)$-замыканием множества $A$, то $A$ всюду плотно в $G^p$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а $O_\varepsilon A$ — $\varepsilon$-окрестность $A$ в $G^p$. Тогда

$$G^p = O_\varepsilon A = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_\varepsilon \overline{B}_n.$$

В силу того, что $V$ — компакт, а $\{O_\varepsilon \overline{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — открытое покрытие $V$, найдется натуральное $k$ такое, что

$$V \subset \bigcup_{n=1}^{k} O_\varepsilon \overline{B}_n = O_\varepsilon \overline{B}_k.$$

В соответствии с определением 1 $V$ является предельной точкой семейства $\widetilde{\mathfrak{B}}$ в $\lambda$-топологии пространства $\exp_m G^p$.

Следствие 1. *Для любого компактного множества $V \subset G^p$ семейство*

$$|V|^p = \{|f|^p : f \in V\}$$

*имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Доказательство следует из предложений 2 и 3.

Непосредственно из определения 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $F \in \exp G^p$, тогда если семейство $|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то семейство $F$ равномерно ограничено в $L^p(\omega, W)$, т. е. $F \in \exp_m G^p$.*

Доказательство. Покроем $W$ открытыми множествами $\{E_i\}$ такими, что $\omega(E_i) \leqslant \delta$ при всех $E_i \in \{E_i\}$. Выберем из покрытия $\{E_i\}$ конечное подпокрытие $\{E_{i_l}\}_{l=1}^n$. Для любой $f \in F$

$$\int_W |f|^p d\omega \leqslant \sum_{l=1}^{n} \int_{E_{i_l}} |f|^p d\omega \leqslant n\varepsilon.$$

Если на $W$ задана $\omega$-измеримая функция $f$, то для $\lambda \geqslant 0$ положим

$$m_f(\lambda) =: \omega\{t \in W : |f(t)| \geqslant \lambda\}, \qquad (7)$$

$m_f(\lambda)$ — функция распределения функции $f$.

Предложение 5. *Пусть семейство*

$$|F|^p = \{|f|^p \cdot f \in F\},$$

*где $F \in \exp G^p$, имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, тогда существует монотонно убывающая функция $\varkappa(\lambda)$, $\lim_{\lambda\to\infty} \varkappa(\lambda) = 0$ та-*

*кая, что для любой* $f \in F$

$$m_f(\lambda) \leqslant \frac{\varkappa(\lambda)}{\lambda^p}. \tag{8}$$

Доказательство. По неравенству Чебышева [4, с. 30]

$$m_f(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_W |f|^p d\omega.$$

В силу предложения 4

$$\sup \left\{ \int_W |f|^p d\omega : f \in F \right\} \leqslant k < \infty,$$

т. е.

$$m_f(\lambda) \leqslant \frac{k}{\lambda^p}.$$

Если $E_f(\lambda) =: \{t \in W : |f(t)| \geqslant \lambda\}$, то, используя определение (2), получаем

$$\varkappa(\lambda) =: \sup \left\{ \int_{E_f(\lambda)} |f|^p d\omega : f \in F \right\}, \tag{9}$$

где $\varkappa(\lambda)$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

При любом $f \in F$

$$\lambda^p m_f(\lambda) \leqslant \int_{E_f(\lambda)} |f|^p d\omega \leqslant \varkappa(\lambda).$$

В следующей теореме дано решение задачи 1 для пространств Харди, т. е. при $W = \bar{D}$, $A = A_0$, $G^p = H^p$.

Теорема 1. *Замкнутое подмножество* $F$ *пространства* $H^p$, $0 < p < \infty$, *будет предельной точкой семейства* $\mathfrak{B}$ (5) *в* $\lambda$*-топологии пространства* $\exp_m H^p$ *тогда и только тогда, когда семейство функций*

$$|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$$

*имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Доказательство. Если $F$ — предельная точка $\mathfrak{B}$ в $\lambda$-топологии пространства $\exp_m H^p$, то в силу предложения 2 при любом $p$ из $(0, \infty)$ семейство $|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$ имеет абсолютно равностепенно непрерывные интегралы.

Обратно. Пусть $|F|^p$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, тогда в силу предложения 4 $F \in \exp_m H^p$. Покажем, что $F \in \in \mathrm{cl}_\alpha(\mathfrak{B})$.

Произвольная функция $f(z)$ из $F$ может быть разложена на внутренний и внешний сомножители [4, с. 80] по формуле

$$f(z) = e^{i\theta} B(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t)\right) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(t)| dt\right). \tag{10}$$

Возьмем в шаре $B_n^\infty$ (см. формулу (4)) функцию $f_n(z)$ вида

$$f_n(z) = e^{i\theta} B(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t)\right) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f_n(t)| dt\right),$$

где $f_n(t) =: \min(|f(t)|, n)$, а внутренний сомножитель такой же, как и в (10).

Пусть $\tilde{f}(z)$ — внешний сомножитель функции $f(z)$:

$$\tilde{f}(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(t)| dt\right),$$

а $\widetilde{f}_n(z)$ — внешний сомножитель $f_n(z)$:

$$\widetilde{f}_n(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f_n(t)|\,dt\right).$$

Тогда при всех $z \in D$

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant |\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}_n(z)|$$

и

$$\|f - f_n\|_p \leqslant \|\widetilde{f} - \widetilde{f}_n\|_p.$$

Оценим $\|\widetilde{f} - \widetilde{f}_n\|_p$.

Положим при $z \in T$

$$\widetilde{f}(z) = |f|\,e^{i\tau}, \quad \widetilde{f}_n(z) = |f_n|\,e^{i\tau_n}.$$

Тогда

$$(\|\widetilde{f} - \widetilde{f}_n\|_p)^p = \int_T ||f|e^{i\tau} - |f_n|e^{i\tau_n}|^p\,dm \leqslant 2^p\left(\int_T ||f|e^{i\tau} - |f_n|e^{i\tau}|^p\,dm + \right.$$

$$\left. + \int_T |f_n|^p\,|e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p\,dm\right) \leqslant 2^p\left(\int_{E_n}(|f| - n)^p\,dm + n^p\int_T |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p\,dm\right),$$

где $E_n = \{z \in T : |f(z)| \geqslant n\}$.

Используя соотношение (9), получаем

$$\int_{E_n}(|f| - n)^p\,dm \leqslant \int_{E_n}|f|^p\,dm \leqslant \varkappa(n).$$

Функции $\tau$ и $\tau_n$ совпадают с мнимыми частями функций $\ln\widetilde{f}$ и $\ln\widetilde{f}_n$ соответственно. Это однозначные гармонические функции в единичном круге. Легко видеть, что

$$|e^{i\tau} - e^{i\tau_n}| = ((\cos\tau - \cos\tau_n)^2 + (\sin\tau - \sin\tau_n)^2)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\,|\tau - \tau_n|.$$

Следовательно,

$$\int_T |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p\,dm \leqslant 2^{p/2}\int_T |\tau - \tau_n|^p\,dm.$$

При $p > 1$, используя теорему Риса [4, с. 117], имеем

$$\int_T |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p\,dm \leqslant c_p\int_T |\ln|f| - \ln|f_n||^p\,dm = c_p\,\frac{1}{2\pi}\int_{E_n}\left(\ln\left|\frac{f(t)}{n}\right|\right)^p dt,$$

где $c_p$ зависит только от $p$. Воспользовавшись функцией $m_f(\lambda)$ (7), перепишем последний интеграл в виде

$$-\int_n^\infty\left(\ln\frac{\lambda}{n}\right)^p dm_f(\lambda) = p\int_n^\infty \lambda^{-1}m_f(\lambda)\left(\ln\frac{\lambda}{n}\right)^{p-1}d\lambda = p\int_1^\infty m_f(n\lambda)\,\lambda^{-1}(\ln\lambda)^{p-1}\,d\lambda.$$

В силу неравенства (8)

$$\int_1^\infty m_f(n\lambda)\,\lambda^{-1}(\ln\lambda)^{p-1}\,d\lambda \leqslant \frac{\varkappa(n)}{n^p}\int_1^\infty \lambda^{-p-1}(\ln\lambda)^{p-1}\,d\lambda = \frac{\varkappa(n)}{n^p}\exp(-p\ln p)\Gamma(p).$$

И, следовательно, при $p > 1$

$$\|f - f_n\|_p \leqslant K_{p,F}\,(\varkappa(n))^{1/p}, \tag{11}$$

где $K_{p,F}$ — константа, не зависящая от $f \in F$. Для $p > 1$ теорема доказана.

Пусть теперь $0 < p \leqslant 1$, а $F \in \exp_m H^p$ и $|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Не умаляя общности, можно считать, что функции из $F$ не имеют нулей в $D$. В самом деле, если теорема доказана для таких семейств, то общий случай можно получить, умножая приближающие функции на соответствующие произведения Бляшке.

Допустим, что $1/2 < p \leqslant 1$. Если $f \in F \subset H^p$, то $\psi =: (f)^{1/2} \in H^{2p}$, $2p > 1$, и семейство

$$\{|\psi|^{2p} : \psi = f^{1/2},\ f \in F\}$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. По доказанному выше при некотором натуральном $n$ множество $\{\psi : \psi^2 \in F\}$ содержится в $\varepsilon$-окрестности шара $B_n^\infty$ (окрестность шара берется в метрике пространства $H^{2p}$), т. е.

$$(\forall \psi^2 \in F)\,(\exists g_n \in B_n^\infty) : \int_T |\psi - g_n|^{2p} dm < \varepsilon^{2p}.$$

Если $f \in F$, $f = \psi^2$, $g_{n^2} =: (g_n)^2$, то

$$(\|f - g_{n^2}\|_p)^p = \int_T |\psi^2 - g_n^2|^p dm \leqslant \Bigl(\int_T |\psi + g_n|^{2p} dm\Bigr)^{1/2} \times$$

$$\times \Bigl(\int_T |\psi - g_n|^{2p} dm\Bigr)^{1/2} \leqslant C_{p,F}\varepsilon^p.$$

Здесь $C_{p,F}$ равномерно ограничена при всех $f \in F$ в силу равномерной ограниченности $F$ в $H^p$.

Таким образом, теорема доказана и при $1/2 < p < \infty$. Повторяя рассуждения по индукции, можно получить доказательство для $(1/2)^n < p < \infty$, где $n$ — произвольное натуральное число, т. е. при всех $0 < p < \infty$.


1. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988.— 252 с.
2. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т.— М. : Мир, 1966. — Т. 1.— 594 с.
3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.— М. : Мир, 1984.— 470 с.



Получено 09.10.91