УДК 517.956

Е. А. Калита, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Свойства решений полулинейных эллиптических систем недивергентного вида

Для полулинейных эллиптических систем, удовлетворяющих аналогу условия Кордеса получены результаты по несуществованию конечных и бесконечных особых точек.

Для напівлінійних еліптичних систем, які задовольняють аналогу умови Кордеса, одержані результати про неіснування скінченних і нескінченних особливих точок.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n \cup \infty$ рассматривается эллиптическая система

$$A^i(x, u, Du, D^2u) = f^i(u), \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

при выполнении условий

$$\exists K < 1, \ \beta > 0: \sum_i \Big| \sum_{k=1}^n \eta^i_{kk} - \beta A^i(x, u, \xi, \eta) \Big|^2 \leqslant K |\eta|^2, \tag{2}$$

$$|f(u)|^2 \geqslant \mu |u|^q, \quad \sum_{i,j} \frac{\partial f^i}{\partial u^j} \xi_i \xi_j \geqslant 0, \tag{3}$$

$q \in (0, \infty)$, $\mu > 0$. Далее для краткости считаем, что нормирующий множитель $\beta \equiv 1$. Условие (2) для квазилинейного уравнения

$$A_{kl}(x, u, Du) D_{kl}^2 u = f(u) \tag{4}$$

эквивалентно условию Кордеса

$$(A_{kk})^2 \geqslant (n-1+\varepsilon) A_{kl}^2, \quad \varepsilon > 0,$$

по повторяющимся индексам идет суммирование. Решение системы (1) будем рассматривать из пространства W функций с конечной энергией $\int U(x)\,dx$, $U = |D^2 u|^2 + |f(u)|^2$, (1) считаем выполненным для почти всех x.

Полулинейным уравнениям посвящено большое количество работ, но почти все они относятся к случаю, когда главная часть — лапласиан или p-лапласиан. Отметим работы [1—3], в которых рассматриваются уравнения с линейной главной частью и измеримыми ограниченными коэффициентами. В [1—3] получен ряд результатов по несуществованию у решения особых точек и особых множеств. В данной работе аналогичные вопросы изучаются для систем вида (1). Установлено, что решение не может иметь особенности на бесконечности при $q > 2$, т. е. решение из $W_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \infty)$ принадлежит $W(\Omega)$. Конечные точки рассматриваются, если функция f имеет специальный вид $f(u) = u|u|^{q/2-1}$. В таких точках отсутствует изолированная особенность при $q \geqslant q_*$, где q_*, в отличие от уравнения дивергентного вида и недивергентного уравнения с непрерывными по Дини коэффициентами [1], зависит не только от n, но и от K. Построен пример уравнения вида (4), имеющего решение с неустранимой особенностью в конечной точке при $q < q_*$, и решение с особенностью на бесконечности. При $q < 2$ решение $\equiv 0$ в окрестности бесконечности при определенных ограничениях скорости роста (для одного уравнения аналогичный результат получен в [1]). Доказательства основаны на интегральных оценках с весом, что отличается как от техники работ [1, 3] (принцип максимума), так и [2] (итерационный метод Мозера).

Обозначим $B_R = B(x_0, R)$ — шар радиуса R с центром x_0, $\Omega_R = \Omega \cap B_R$, $U(G) = \int_G U(x)\,dx$. Буквой c будем обозначать различные несущественные константы.

Для доказательства основных результатов работы будем пользоваться вспомогательными фактами, которые сформулируем в виде леммы.

Л е м м а 1. *Пусть $q > 2$, $u \in W(\Omega_{2R})$ — решение (1), $u|_{\partial\Omega} = 0$ в B_{2R}, средняя кривизна $\partial\Omega$ в направлении внешней нормали неположительна в B_{2R} (или $B_{2R} \subset \Omega$). Тогда*

$$U(\Omega_R) \leqslant cR^{n - \frac{4q}{q-2}}, \tag{5}$$

с зависит только от q, K, n, μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем (1) в виде

$$\Delta u^i - f^i(u) = \Delta u^i - A^i(x, u, Du, D^2 u).$$

Возводя это равенство в квадрат и интегрируя с весом φ^s, находим

$$\int (|\Delta u|^2 + 2DuDf + f^2)\varphi^s dx \leqslant \int (K|D^2 u|^2 \varphi^s - 2fDuD\varphi^s)\,dx, \tag{6}$$

φ — гладкая неотрицательная функция: $\varphi = 0$ вне B_{2R}, $\varphi = 1$ в B_R, $|D^j\varphi| \leqslant c_j R^{-j}$, $s > 0$ достаточно большое. Из условий (3) имеем

$$DuDf = D_k u^i \frac{\partial f^i}{\partial u^j} D_k u^j \geqslant 0.$$

Для второго слагаемого в правой части (6) получаем оценку

$$\left|\int fDuD\varphi^s dx\right| \leqslant \int (\varepsilon f^2\varphi^s + c_\varepsilon R^{-2}|Du|^2\varphi^{s-2})\,dx,$$

$$R^{-2}\int |Du|^2\varphi^{s-2}dx = R^{-2}\int\left(-u\Delta u\varphi^{s-2} + \frac{1}{2}|u|^2\Delta\varphi^{s-2}\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int (\varepsilon|D^2u|^2\varphi^s + c_\varepsilon R^{-4}|u|^2\varphi^{s-4})\,dx,$$

$\varepsilon > 0$ произвольно малое. Для главного члена в левой части (6), интегрируя по частям и учитывая неположительность средней кривизны $\partial\Omega$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, находим

$$\int |\Delta u|^2\varphi^s dx \geqslant \int (|D^2u|^2\varphi^s - cR^{-2}|Du|^2\varphi^{s-2})\,dx.$$

Собирая полученные оценки вместе и учитывая, что $K < 1$, из (6) получаем

$$\int U\varphi^s dx \leqslant cR^{-4}\int |u|^2\varphi^{s-4}dx \leqslant cR^{n\frac{q-2}{q}-4}\left(\int |u|^q\varphi^s dx\right)^{\frac{2}{q}}, \qquad (7)$$

если $s > \dfrac{4q}{q-2}$. Применяя неравенство Юнга, получаем (5).

Теорема 1. *Пусть* $q > 2$, $\infty \in \Omega$, $u \in W_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\setminus\infty)$. *Тогда* $u \in W(\Omega)$. *Если* $\infty \in \partial\Omega$, *то утверждение справедливо при условии неположительности средней кривизны* $\partial\Omega$ *в направлении внешней нормали в окрестности* ∞ *и* $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Доказательство. Пусть ρ столь большое, что или $\partial\Omega \subset B_\rho$, или вне B_ρ выполнены условия теоремы на $\partial\Omega$ (здесь и далее в доказательстве $x_0 = 0$), $R > 2\rho$, φ — гладкая неотрицательная функция, $\varphi = 0$ вне $B_{2R}\setminus B_\rho$, $\varphi = 1$ в $B_R\setminus B_{2\rho}$, $|D^j\varphi| \leqslant c_jR^{-j}$ в $E_R \equiv B_{2R}\setminus B_R$ и аналогично в E_ρ. Положим

$$\omega(r) = \begin{cases}1, & r \leqslant \tau,\\ r^a\tau^{-a}, & r > \tau,\end{cases} \qquad r = |x|, \quad 2\rho < \tau < R,$$

$a = 4 - n$ при $n \geqslant 4$, $a = 0$ при $n = 2, 3$. Аналогично (6) находим

$$\int (|\Delta u|^2 + f^2)\,\omega\varphi^2 dx \leqslant \int (K|D^2u|^2\omega\varphi^2 - 2fDuD(\omega\varphi^2))\,dx. \qquad (8)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int |\Delta u|^2\omega\varphi^2 dx = \int (|D^2u|^2\omega\varphi^2 + D_kuD_luD^2_{kl}(\omega\varphi^2) - |Du|^2\Delta(\omega\varphi^2))\,dx +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} [(\partial_\nu u\Delta u - Du\partial_\nu Du)\,\omega\varphi^2 + |Du|^2\partial_\nu(\omega\varphi^2) - \partial_\nu uDuD(\omega\varphi^2)]\,dS, \qquad (9)$$

∂_ν — дифференцирование по нормали. Поскольку $u = 0$ на $\partial\Omega \cap \operatorname{supp}\varphi$, имеем

$$\partial_\nu u\Delta u - Du\partial_\nu Du = -(n-1)\varkappa|\partial_\nu u|^2, \quad |Du|^2\partial_\nu\psi = \partial_\nu uDuD\psi \quad \forall\psi,$$

$\varkappa(x)$ — средняя кривизна $\partial\Omega$. В полярных координатах (r, θ)

$$D_kuD_luD^2_{kl}\omega - |Du|^2\Delta\omega = -\tilde{a}(n-1)u'^2r^{-2}\omega - \tilde{a}(\tilde{a}+n-3)|\nabla_\theta u|^2r^{-4}\omega -$$

$$- a\tau^{-3}|\nabla_\theta u|^2\delta_\tau(r) \geqslant -\tilde{a}(n-1)u'^2r^{-2}\omega \qquad (10)$$

при $3 - n \leqslant a \leqslant 0$, где $u' = \partial u/\partial r$, $\tilde{a} = \begin{cases}a, & r > \tau\\ 0, & r < \tau\end{cases}$, δ_τ — дельта-функция с носителем в точке τ. Из (9) получаем

$$\int |\Delta u|^2 \omega\varphi^2 dx \geqslant \int (|D^2u|^2 - \widetilde{a}(n-1)u'^2 r^{-2})\omega\varphi^2 dx -$$
$$- c\int_{E_R} (|D^2u|^2 + R^{-4}|u|^2)\omega dx - \mathrm{idem}_\rho. \tag{11}$$

Для второго слагаемого в правой части (8) имеем

$$\left|2\int fDuD(\omega\varphi^2)\,dx\right| \leqslant \int\left[(\alpha+\varepsilon)f^2 + \frac{a^2}{\alpha}u'^2 r^{-2}\right]\omega\varphi^2 dx +$$
$$+ c_\varepsilon \int_{E_R} (|D^2u|^2 + R^{-4}|u|^2)\omega dx + \mathrm{idem}_\rho, \tag{12}$$

$\alpha, \varepsilon > 0$. Выберем $\alpha < 1$ так, чтобы $a^2/\alpha < -a(n-1)$ $\left(\text{т. е. } \alpha > \dfrac{n-4}{n-1}\right)$ и ε возьмем столь малым, чтобы $\alpha + \varepsilon < 1$. Из (8), учитывая (11), (12), получаем

$$U(\Omega_\tau \setminus B_{2\rho}) \leqslant c\tau^{-a}R^a\left[\int_{E_R} |D^2u|^2 dx + R^{n\frac{q-2}{q}-4}\left(\int_{E_R} |u|^q dx\right)^{\frac{2}{q}}\right] + c_\rho.$$

Покроем кольцо E_R конечным, зависящим только от n, числом шаров радиуса $R/8$. Применяя в них лемму 1, находим

$$U(\Omega_\tau \setminus B_{2\rho}) \leqslant c\tau^{-a}R^{a+n-\frac{4q}{q-2}} + c_\rho.$$

Поскольку $a = 4 - n$, $a + n - \dfrac{4q}{q-2} < 0$. При $R \to \infty$ и $\tau \to \infty$ получаем $u \in W(\Omega)$.

Предположим дополнительно к (3), что $f(0) = 0$.

Следствие 1. *Пусть* $q > 2$, $u \in W_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — *решение* (1). *Тогда* $u \equiv 0$.

Следствие 2. *Пусть* $q > 2$, Ω — *неограниченная область, средняя кривизна* $\partial\Omega$ *в направлении внешней нормали неположительна,* $u \in W_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \infty)$ — *решение* (1), $u|_{\partial\Omega} = 0$. *Тогда* $u \equiv 0$.

Доказательство. По теореме 1 $u \in W(\Omega)$. Аналогично (6) имеем

$$\int_\Omega (|\Delta u|^2 + 2DuDf + f^2)\,dx \leqslant K\int_\Omega |D^2u|^2 dx.$$

Интегрируя по частям, с учетом $u|_{\partial\Omega} = 0$ получаем

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \int_\Omega |D^2u|^2 dx - (n-1)\int_{\partial\Omega} \varkappa |\partial_\nu u|^2 dS,$$

$\varkappa(x)$ — средняя кривизна $\partial\Omega$, ∂_ν — дифференцирование по нормали. Учитывая, что $\varkappa < 0$ и $K < 1$, получаем $U(\Omega) \leqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть* $n \geqslant 4$, $f(u) = u|u|^{q/2-1}$, $q \geqslant q_* \equiv 2\dfrac{n + a_*}{n + a_* - 4}$, $a_* \equiv (1-K)^{-1}(\sqrt{n-K} - \sqrt{nK-K})^2$. *Тогда решение* (1) *не может иметь конечных изолированных особых точек внутри* Ω. *Если* $n = 3$, *утверждение справедливо при* $a_* > 1$ $(K < 1/3)$.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, Ω — *конечная область, средняя кривизна* $\partial\Omega$ *в направлении внешней нормали неположительна,* $x_0 \in \Omega$, $u \in W_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \setminus x_0)$ — *решение* (1), $u|_{\partial\Omega} = 0$. *Тогда* $u \equiv 0$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.

Число a_* в теореме 2 определяется как корень уравнения $KM(a) = 1$ на интервале $[0; n]$, где $M(a) = 1 + 4a(n-1)(n-a)^{-2}$.

Обозначим $\|u\|_\omega = \|u\omega^{1/2}; L_2\|$.

Лемма 2. *Пусть* $u \in \overset{0}{W}{}_2^2(\mathbb{R}^n)$, $u \equiv 0$ *в окрестности нуля*. $\omega(r) = \begin{cases} r^a, & r<1, \\ 1, & r \geqslant 1, \end{cases}$ $0 \leqslant a \leqslant n$, $r = |x|$. *Тогда*

$$\|\Delta u\|_\omega \geqslant M(a)^{-1/2} \|D^2 u\|_\omega.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть гладкие функции u. В полярной системе координат аналогично (9), (10) имеем

$$\|D^2u\|_\omega^2 - \|\Delta u\|_\omega^2 = \int \tilde{a}\,[(n-1)\,u'^2 r^{-2} + (\tilde{a}+n-3)|\nabla_\theta u|^2 r^{-4}]\,\omega dx - \\ - a \int_{S_1} |\nabla_\theta u|^2 dS, \tag{13}$$

$\tilde{a} = \dfrac{r\omega'}{\omega} = \begin{cases} a, & r<1, \\ 0, & r>1, \end{cases}$ S_1 — единичная сфера. Далее,

$$\|\Delta u\|_\omega^2 = \int [u''^2 + (n-1)(1-\tilde{a})\,u'^2 r^{-2} + 2|\nabla_\theta u'|^2 r^{-2} + (2-\tilde{a}) \times \\ \times (\tilde{a}+n-4)|\nabla_\theta u|^2 r^{-4} + |\Delta_\theta u|^2 r^{-4}]\,\omega dx + a\int_{S_1} |\nabla_\theta u|^2 dS,$$

Δ_θ — сферическая часть оператора Лапласа. Используем неравенство Харди в виде

$$\int_\alpha^\beta v'^2 r^{b+1} dr \geqslant c(b-c)\int_\alpha^\beta v^2 r^{b-1} dr - cv^2 r^b\,\Big|_\alpha^\beta, \tag{14}$$

$c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа. Применяя его к u'' на $(0,1)$ и $(1,\infty)$ при $c = \dfrac{a+n-2}{2}$; к $\nabla_\theta u'$ на $(0,1)$ при $c = \dfrac{a+n-4}{2}$, на $(1,\infty)$ при $c = \dfrac{n-4}{2}$; учитывая, что

$$\int_S |\Delta_\theta u(r,\theta)|^2 d\theta \geqslant (n-1)\int_S |\nabla_\theta u(r,\theta)|^2 d\theta$$

(первое отличное от нуля собственное число оператора Лапласа на единичной сфере равно $n-1$), получаем

$$\|\Delta u\|_\omega^2 \geqslant \int_{B_1}\left[\left(\frac{n-a}{2}\right)^2 u'^2 + \left(\frac{n-a}{2}(a+n-4)+n-1\right)|\nabla_\theta u|^2 r^{-2}\right] \times \\ \times r^{a-2}dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\left[\frac{n^2-a^2}{4}u'^2 r^{-2} + \left(\frac{n^2}{2}-n-1\right)|\nabla_\theta u|^2 r^{-4}\right]dx.$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты здесь и в (13), получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть* u, ω, a *те же, что в лемме* 2. *Тогда*

$$-\int u|u|^{q/2-1}\Delta u\omega dx \geqslant 0.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$-2\int |u|^{q/2-1} u\Delta u\omega dx = \int (2|Du|^2 + (q-2)|uDu|^2|u|^{-2})\,|u|^{q/2-1}\omega dx - \\ - \frac{4}{q+2}\int |u|^{q/2+1}\Delta\omega dx.$$

Учитывая, что

$$|Du|^2|u|^{q/2-1} \geqslant |uDu|^2|u|^{q/2-3} = \left(\frac{4}{q+2}\right)^2 |D|u|^{(q+2)/4}|^2,$$

применяем неравенство Харди (14) на $(0,1)$ при $c=\dfrac{a+n-2}{2}$, на $(1,\infty)$ с $c=n-2$:

$$-2\int|u|^{q/2-1}u\Delta u\omega dx\geqslant 4\frac{a+n-2}{q+2}\,\frac{q(n-2)-2a}{q+2}\int_{B_1}|u|^{q/2+1}r^{a-2}dx+$$
$$+\frac{4}{q+2}\,\frac{qa+2n-4}{q+2}\int_{S_1}|u|^{q/2+1}dS.$$

Если $a\leqslant n$, то $q\geqslant\dfrac{2n}{n-2}$, и первое слагаемое положительно.

Доказательство теоремы 2. Пусть u — решение (1), $x_0\in\Omega$, $\exists\rho>0:u\in W(B_{2\rho}\setminus B_R)$ $\forall R>0$. Пусть φ — гладкая неотрицательная функция, $\varphi=0$ вне $B_{2\rho}\setminus B_R$, $\varphi=1$ в $B_\rho\setminus B_{2R}$, $|D^j\varphi|\leqslant c_jR^{-j}$ в E_R и аналогично в E_ρ. Положим

$$\omega(r)=\begin{cases}r^a\tau^{-a}, & r<\tau,\\ 1, & r\geqslant\tau,\end{cases}\quad r=|x-x_0|,\quad 2R<\tau<\rho,\quad 0<a\leqslant a_*.$$

Аналогично (6) находим

$$\int(|\Delta u|^2-2|u|^{q/2-1}u\Delta u+|u|^q)\,\omega\varphi^s dx\leqslant K\int|D^2u|^2\omega\varphi^s dx,$$

s достаточно большое. Применяя лемму 2 к функции $u\varphi^{s/2}$ и лемму 3 к функции $u\varphi^{\frac{2s}{q+2}}$, получаем

$$\int[(M(a)^{-1}-K)|D^2u|^2+|u|^q]\,\omega\varphi^s dx\leqslant c\tau^{-a}R^a\,[\|D^2u;L_2(E_R)\|^2+$$
$$+R^{n\frac{q-2}{q}-4}\|u;L_q(E_R)\|^2+R^{n\frac{q-2}{2q}-2}\|u;L_q(E_R)\|^{\frac{q+2}{2}}]+c_\rho. \tag{15}$$

Покроем E_R конечным, зависящим только от n, числом шаров радиуса $R/8$. Применяя в них лемму 1, при $a=a_*$ находим

$$\int|u|^q\omega\varphi^s dx\leqslant c\tau^{-a_*}R^{a_*+n-\frac{4q}{q-2}}+c_\rho.$$

Поскольку $q\geqslant q_*$ равносильно $a_*+n-\dfrac{4q}{q-2}\geqslant 0$, при $R\to 0$ отсюда следует сходимость $\int|u|^qr^{a_*}dx$ в точке x_0. По абсолютной непрерывности интеграла $R^{a_*}\int_{E_R}|u|^qdx\to 0$ при $R\to 0$. Поэтому из (15), используя (7) для оценки D^2u, получаем

$$\int|u|^q\omega\varphi^s dx\leqslant o(R^{a_*+n-\frac{4q}{q-2}})\,\tau^{-a_*}+c_\rho.$$

При $R\to 0$ и $\tau\to 0$ отсюда следует сходимость $\int|u|^qdx$ в точке x_0.

Пусть теперь a из интервала $\dfrac{4a_*}{n+a_*}<a<a_*$. Имеем $M(a)^{-1}>K$ при $0\leqslant a<a_*$, и из (15), используя (7) для оценки D^2u в правой части, находим

$$U(B_\rho\setminus B_\tau)\leqslant c\tau^{-a}R^{a+n\frac{q-2}{q}-4}+c_\rho\leqslant c\tau^{-a}R^{a-\frac{4a_*}{n+a_*}}+c_\rho.$$

При $R\to 0$ и $\tau\to 0$ отсюда следует $u\in W(B_\rho)$.

Пример неустранимой особенности. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u+\gamma\frac{x_ix_j}{|x|^2}D^2_{ij}u=cu|u|^{q/2-1}. \tag{16}$$

При $\alpha = -\frac{4}{q-2}$, $c = -\frac{4}{q-2}\left(n-1-(\gamma+1)\frac{q+2}{q-2}\right)$ оно имеет решение $u = r^{\alpha}$. Для уравнений вида (4) $K = \varkappa - (A_{ii})^2/A_{ij}^2$, и в данном случае $K = 1-(\gamma+1)\frac{n-\gamma(n-2)}{n+2\gamma+\gamma^2}$, $K < 1$ при $-1 < \gamma < \frac{n}{n-2}$. Непосредственно вычисляя, получаем $a_* = \frac{n-\gamma(n-2)}{1+\gamma}$, $q_* = 2\frac{n+\gamma}{n-2-\gamma}$ при $\gamma > 0$. Из формулы для c находим, что $c > 0$ равносильно $q < 2 \times \times \frac{n+\gamma}{n-2-\gamma} = q_*$. Поскольку $a_* > 0$, имеем $q_* < \frac{2n}{n-4}$ $(n \geqslant 4)$, откуда $\alpha < 2 - n/2$, $r^{\alpha} \notin W$ в окрестности нуля. Таким образом, уравнение (16) имеет решение с неустранимой конечной особой точкой при всех $q \in (2; q_*)$. Если $\gamma > \frac{n}{n-2}$ (нарушается кордесовость, но сохраняется эллиптичность), решение $u = r^{\alpha}$ имеет неустранимую бесконечную особую точку при $\frac{2n}{n-4} < q < 2\frac{n+\gamma}{n-2-\gamma}$.

Пусть теперь $q < 2$, f удовлетворяет условиям (3).

Теорема 3. *Пусть* $0 < q < 2$, $\infty \in \Omega$. *Тогда найдется* $\varepsilon > 0$, *зависящее только от* q, K, n, μ *такое, что если для решения системы* (1) $u \in W_{\text{loc}}(\Omega \setminus \infty)$ *при больших* R *справедлива оценка*

$$U(\{x : R < |x| < 2R\}) \leqslant \varepsilon R^{n+\frac{4q}{2-q}}, \tag{17}$$

то в окрестности бесконечности $u \equiv 0$.

Теорема следует непосредственно из леммы 4.

Лемма 4. *Пусть* $0 < q < 2$. *Найдется* $\varepsilon(q, K, n, \mu) > 0$ *такое, что если* u — *решение* (1) *в* $B(x_0, R)$,

$$U(B_R) \leqslant \varepsilon R^{n+\frac{4q}{2-q}}, \tag{18}$$

то $u(x_0) = 0$.

Доказательство. Положим $R_j = 2^{-j}R$, $B_j = B_{R_j}$. По (7) находим

$$U(B_{j+1}) \leqslant cR_j^{-4}\int_{B_j}|u|^2 dx.$$

При достаточно малом $t > 0$

$$\int |u|^2 dx \leqslant \left(\int |u|^q dx\right)^{\frac{t}{q}} \left(\int |u|^{q\frac{2-t}{q-t}} dx\right)^{1-\frac{t}{q}}.$$

По вложению пространств Соболева

$$\left(\fint_{B_j} |u|^{q\frac{2-t}{q-t}} dx\right)^{1-\frac{t}{q}} \leqslant cR_j^{4-2t}\left(\fint_{B_j}|D^2u|^2 dx\right)^{1-\frac{t}{2}} + c\left(\fint_{B_j}|u|^q dx\right)^{\frac{2-t}{q}},$$

где $\fint_G = (\operatorname{mes} G)^{-1}\int_G$. Обозначая $U_j = R_j^{-n}U(B_j)$, находим

$$U_{j+1} \leqslant c\left(R_j^{-2t}U_j^{t\frac{2-q}{2q}} + R_j^{-4}U_j^{\frac{2-q}{q}}\right)U_j. \tag{19}$$

Утверждение. *Если* $0 < \theta < 2^{-\frac{4q}{2-q}}$, *то найдется* $\varepsilon > 0$ *такое, что из* (18) *следует*

$$U_j \leqslant \theta^j R^{\frac{4q}{2-q}}. \tag{20}$$

Действительно, если (20) выполнено для некоторого j, то из (19) следует

$$U_{j+1} \leqslant c\,[(4\theta^{\frac{2-q}{2q}})^{tj} + \text{idem}^{2j}]\,U_j \leqslant \theta U_j$$

при $j \geqslant j_0(\theta, q, c, t)$. Для конечного множества $j < j_0$ оценка (20) следует из (18) за счет малости ε.

Поскольку $\theta < 1$, из (20) вытекает $u(x_0) = 0$. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть* $0 < q < 2$. *Найдется* $\varepsilon(q, K, n, \mu) > 0$ *такое, что если* $u \in W_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — *решение* (1), *удовлетворяющее* (17) *при больших* R, *то* $u \equiv 0$.

Точность условия (17) показывает пример простейшего уравнения

$$\Delta u = cu\,|\,u\,|^{q/2-1},$$

имеющего решение $|\,x\,|^{\alpha}$, $\alpha = \dfrac{4}{2-q}$, $c = \alpha(\alpha + n - 2) > 0$ при $q < 2$.

1. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб.— 1988.— **135**, № 3.— С. 346—360.
2. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки.— 1988.— **44**, № 4.— С. 457—468.
3. *Ландис Е. М.* О задаче Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений // Нелинейн. гранич. задачи.— 1991.— Вып. 3.— С. 49—53.

Получено 09.10.91