УДК 517.98

А. А. Ковалевский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О сходимости решений вариационных неравенств с двусторонними препятствиями в перфорированных областях

Устанавливаются условия и характер сходимости решений эллиптических вариационных неравенств с двусторонними препятствиями в перфорированных областях.

Установлюються умови і характер збіжності розв'язків еліптичних варіаційних нерівностей з двосторонніми перешкодами в перфорованих областях.

В настоящей работе изучается сходимость решений $u_s \in V_s$ вариационных неравенств $\langle A_s u_s - f_s, v - u_s \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in V_s$, где A_s — эллиптический оператор, действующий из соболевского пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ в сопряженное с ним пространство $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, V_s — множество функций $v \in W^{1,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющих ограничению $\varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s$; Ω_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — перфорированные области в $\mathbb{R}^n$. Основное условие, при котором устанавливается сходимость последовательности $\{u_s\}$, — условие G-сходимости операторов A_s. При этом условии результаты о сходимости решений вариационных неравенств с односторонними препятствиями получены в [1, 2].

1. Предположения, обозначения и определения. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω. Предполагается, что существуют постоянная $\nu > 1$, конечные множества J_s $(s \in \mathbb{N})$, точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ j \in J_s)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B_s^j,$$

$$\lim_{s \to \infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0, \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall j \in J_s \quad 2(\nu - 1) r_s^j < \rho_s^j,$$

где B_s^j — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j, ρ_s^j — расстояние от B_s^j до множества $\bigcup\limits_{J_s \ni l \neq j} B_s^l \cup \partial\Omega$.

Пусть $m > 1$, для любого $s \in \mathbb{N}$ q_s — отображение $W^{1,m}(\Omega)$ в $W^{1,m}(\Omega_s)$ такое, что для $u \in W^{1,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех последовательностей $\{p_s\}$, удовлетворяющих условиям: для любого $s \in \mathbb{N}$ p_s — линейное непрерывное отображение $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $W^{1,m}(\Omega)$; $\sup\limits_s \| p_s \| < \infty$; если $s \in \mathbb{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, то $q_s(p_s u) = u$.

Из предположений относительно областей Ω_s вытекает, что $\mathcal{P} \neq \varnothing$ и выполняется условие:

$$\text{если } u \in W^{1,m}(\Omega) \text{ и } \varliminf_{s\to\infty} \| q_s u \|_{L^m(\Omega_s)} = 0, \text{ то } u = 0 \text{ почти всюду на } \Omega. \quad (1)$$

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $u \in W^{1,m}(\Omega)$, если*

$$\sup_s \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty, \quad \lim_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{L^m(\Omega_s)} = 0.$$

Заметим, что если последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ удовлетворяет неравенству $\sup\limits_s \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty$, то у этой последовательности существуют слабо сходящиеся подпоследовательности. Это легко установить, используя непустоту множества $\mathcal{P}$.

Определение. *Будем говорить, что последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ сильно сходится к $u \in W^{1,m}(\Omega)$, если*

$$\lim_{s\to\infty} \| u_s - q_s u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0.$$

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, если из слабой сходимости произвольной последовательности $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ к $u \in W^{1,m}(\Omega)$ следует, что $\lim\limits_{s\to\infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle$.*

Заметим, что если последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к какому-либо элементу $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, то последовательность норм $\| f_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$ ограничена. Кроме того, отметим, что для всякого элемента $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ существует последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящаяся к f. В качестве такой последовательности можно взять последовательность $\{f \circ p_s\}$, где $\{p_s\} \in \mathcal{P}$.

2. G-сходимость эллиптических операторов. Пусть $m' = \dfrac{m}{m-1}$, $0 < m_1 \leqslant \min(m, m')$, $m_2 \geqslant \max(m, 2)$, $c \geqslant 1$, и пусть для любых $s \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a_i^s — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, причем для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} | a_i^s(x, 0, 0) | = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} | a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta') |^{m'} \leqslant c(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} \times \\ \times (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_1} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta'))(\eta_i - \eta_i') + (a_0^s(x, \xi, \eta) - a_0^s(x, \xi', \eta'))(\xi - \xi') \geqslant \\ \geqslant c^{-1}(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_2}. \quad (4)$$

Определим операторы A_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v\rangle = \int\limits_{\Omega_s} \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^s(x, u, \nabla u)\,\partial_i v + a_0^s(x, u, \nabla u)\, v\right\} dx.$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\| A_s u - A_s v\|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \lambda\,(1 + \| u\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_1}\, \| u - v\|^{m_1}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{5}$$

$$\langle A_s u - A_s v, u - v\rangle \geqslant \lambda^{-1}(1 + \| u\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| v\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_2} \times$$

$$\times \| u - v\|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{6}$$

где $\lambda > 1$ и зависит только от $n, m, m_2, c, \operatorname{mes}\Omega$. Положив $\mu = 2^{m_2}\lambda$, из неравенств (5), (6) и равенства $A_s 0 = 0$ выводим, что для $s \in \mathbb{N}$ и $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\| A_s u\|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \mu\, \| u\|^{m}_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \mu, \tag{7}$$

$$\langle A_s u, u\rangle \geqslant \mu^{-1}\, \| u\|^{m}_{W^{1,m}(\Omega_s)} - \mu^{-1}. \tag{8}$$

Из неравенств (5) — (8) вытекает, что операторы A_s обратимы [3]. Используя (8) и неравенство Юнга, устанавливаем, что для $s \in \mathbb{N}$ и $f \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$

$$\| A_s^{-1} f\|^{m}_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leqslant \mu^{m'}\, \| f\|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} + m'. \tag{9}$$

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$, если из сильной сходимости произвольной последовательности $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ следует, что последовательность $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к $A^{-1} f$.*

Это определение является аналогом определения G-сходимости операторов с единой областью задания из [4].

Заметим, что если последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$, то оператор A строго монотонен на $W^{1,m}(\Omega)$]. Это нетрудно показать, используя неравенство (6).

3. Сходимость решений вариационных неравенств с двусторонними препятствиями. Пусть $\varphi_s, \psi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$—последовательности, сильно сходящиеся соответственно к $\varphi, \psi \in W^{1,m}(\Omega)$; $\alpha > 0$. Будем предполагать, что выполняется условие

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \varphi_s + \alpha \leqslant \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s. \tag{10}$$

Положим

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad V_s = \{v \in W^{1,m}(\Omega_s) : \varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s\},$$

$$V = \{v \in W^{1,m}(\Omega) : \varphi \leqslant v \leqslant \psi \text{ почти всюду на } \Omega\}.$$

Лемма 1. *Пусть последовательность $v_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $v \in W^{1,m}(\Omega)$, N_1 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$. Тогда $v \in V$.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ и положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$w_s^+ = \max\{p_s v_s, \varphi\}, \quad w_s^- = \min\{p_s v_s, \psi\}.$$

Ясно, что существуют возрастающая последовательность $\{s_l\} \subset N_1$ и $w^\pm \in$

$\in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что

$$w_{s_l}^{\pm} \to w^{\pm} \text{ слабо в } W^{1,m}(\Omega). \tag{11}$$

Учитывая, что $\forall s \in N_1 \ v_s \in V_s$, для $s \in N_1$ почти всюду на Ω_s имеем

$$|q_s w_s^+ - v_s| \leqslant |\varphi_s - q_s \varphi|, \quad |q_s w_s^- - v_s| \leqslant |\psi_s - q_s \psi|.$$

Отсюда и из сильной сходимости последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ и ψ вытекает

$$\lim_{l \to \infty} \| q_{s_l} w_{s_l}^{\pm} - v_{s_l} \|_{L^m(\Omega_{s_l})} = 0. \tag{12}$$

Из (11), (12) и слабой сходимости последовательности $\{v_s\}$ к v выводим

$$\varliminf_{s \to \infty} \| q_s (w^{\pm} - v) \|_{L^m(\Omega_s)} = 0.$$

Отсюда и из условия (1) следует, что $w^{\pm} = v$ почти всюду на Ω. А так как $w^+ \geqslant \varphi$, $w^- \leqslant \psi$ почти всюду на Ω, то $v \in V$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{A_s\}$ *G-сходится к обратимому оператору* $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$, *последовательность* $g_s \in \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *сильно сходится к* $g \in A(V)$. *Тогда существует последовательность* $w_s \in V_s$ *такая, что*

$$\lim_{s \to \infty} \| w_s - A_s^{-1} g_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Положим $v = A^{-1} g$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$v_s = A_s^{-1} g_s,$$

$$\delta_s = \{\| v_s - q_s v \|_{L^1(\Omega_s)} + \| \varphi_s - q_s \varphi \|_{L^1(\Omega_s)} + \| \psi_s - q_s \psi \|_{L^1(\Omega_s)}\}^{1/2},$$

$$E_s^- = \{x \in \Omega_s : v_s(x) < \varphi_s(x) - \delta_s\}, \quad E_s^+ = \{x \in \Omega_s : v_s(x) > \psi_s(x) + \delta_s\}.$$

В силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A последовательность $\{v_s\}$ слабо сходится к v. Отсюда и из сильной сходимости последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ вытекает

$$\lim_{s \to \infty} \delta_s = 0. \tag{14}$$

Из этого равенства и неравенства $\operatorname{mes} E_s^{\pm} \leqslant \delta_s \ (\forall s)$ следует

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{mes} E_s^{\pm} = 0. \tag{15}$$

Покажем, что

$$\lim_{s \to \infty} \int_{E_s^{\pm}} |\nabla v_s|^m dx = 0. \tag{16}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$u_s^- = \min\{v_s - \varphi_s, -\delta_s\}, \quad u_s^+ = \max\{v_s - \psi_s, \delta_s\}.$$

Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle A_s v_s, u_s^{\pm} \rangle = \langle g_s, u_s^{\pm} \rangle.$$

Отсюда получаем

$$\int_{E_s^{\pm}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^s(x, v_s, \nabla v_s)\, \partial_i v_s + a_0^s(x, v_s, \nabla v_s)\, v_s \right\} dx \leqslant \langle g_s, u_s^{\pm} \rangle +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \int_{E_s^{\pm}} | a_i^s(x, v_s, \nabla v_s)| (|\partial_i \varphi_s| + |\partial_i \psi_s|)\, dx + \delta_s \int_{\Omega_s} | a_0^s(x, v_s, \nabla v_s| \, dx.$$

Из этого неравенства, используя соотношения (2) — (4), выводим

$$2^{m-m_1}c^{-1}\int\limits_{E_s^{\pm}}|\nabla v_s|^m dx-\operatorname{mes}E_s^{\pm}\leqslant\langle g_s,u_s^{\pm}\rangle+c\,(1+\operatorname{mes}\Omega)\times$$

$$\times(1+\|v_s\|_{L^m(\Omega_s)}+\|\nabla v_s\|_{L^m(\Omega_s)})^{m-1}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(\|\partial_i\varphi_s\|_{L^m(E_s^{\pm})}+\|\partial_i\psi_s\|_{L^m(E_s^{\pm})})+\delta_s\Big\}.$$

Отсюда, используя (14), (15), сильную сходимость последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$, $\{g_s\}$ соответственно к φ, ψ, g, слабую сходимость последовательностей $\{u_s^{\pm}\}$ к нулю и ограниченность последовательности норм $\|v_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$, выводим (16).

Далее, пусть для любого $s\in\mathbb{N}$

$$v_s^1=\max\{v_s,\varphi_s-\delta_s\},\quad \chi_s=\min\{v_s^1,\psi_s+\delta_s\}.$$

Легко видеть, что для произвольного $s\in\mathbb{N}$

$$\varphi_s-\delta_s\leqslant\chi_s\leqslant\psi_s+\delta_s \text{ почти всюду на } \Omega_s. \tag{17}$$

Кроме того, используя сильную сходимость последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ, слабую сходимость последовательности $\{v_s\}$ к v, а также (14)—(16), устанавливаем

$$\lim_{s\to\infty}\|\chi_s-v_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}=0. \tag{18}$$

Пусть теперь s_0 — такое число, что $\forall s>s_0$ $\delta<\alpha/2$. Положим для $s\leqslant s_0$ $w_s=\varphi_s$, а для $s>s_0$

$$w_s=\left(1-\frac{2\delta_s}{\alpha}\right)\chi_s+\frac{2\delta_s}{\alpha}(\varphi_s-\delta_s)+\delta_s.$$

Из (17) и (10) вытекает, что для любого $s\in\mathbb{N}$ $\varphi_s\leqslant w_s\leqslant\psi_s$ почти всюду на Ω_s и, следовательно, $w_s\in V_s$. Кроме того, используя ограниченность последовательностей норм $\|\varphi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$, $\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$ и (14), получаем

$$\lim_{s\to\infty}\|w_s-\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}=0.$$

Отсюда и из (18) следует равенство (13). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A:W^{1,m}(\Omega)\to(W^{1,m}(\Omega))^*$, последовательность $f_s\in(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f\in(W^{1,m}(\Omega))^*$, $\forall s\in\mathbb{N}$ $u_s\in V_s$:*

$$\forall s\in\mathbb{N}\quad\forall v\in V_s\quad\langle A_su_s-f_s,v-u_s\rangle\geqslant 0. \tag{19}$$

Тогда существует функция $u\in V$ такая, что

а) $\forall v\in V$ $\langle Au-f,v-u\rangle\geqslant 0$;

б) последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u;

в) последовательность $\{A_su_s\}$ сильно сходится к Au.

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$ ограничена. Действительно, в силу леммы 2 и неравенства (9) существует последовательность $\chi_s\in V_s$ такая, что $\sup\limits_s\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}<\infty$. Согласно (19) для произвольного $s\in\mathbb{N}$ имеем $\langle A_su_s-f_s,\chi_s-u_s\rangle\geqslant 0$. Отсюда, используя ограниченность последовательностей норм $\|f_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$, $\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$, неравенства (7), (8), получаем, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$ ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_i\}\subset\mathbb{N}$ и $u\in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что

$$\{u_{s_i}\}\text{ слабо сходится к } u. \tag{20}$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает, что $u\in V$. Зафиксируем последовательность $g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящуюся к Au. Согласно лемме 2 существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что справедливо равенство (13). При этом

$$\{w_s\} \text{ слабо сходится к } u. \tag{21}$$

Это следует из (13) и того, что в силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательность $\{A_s^{-1} g_s\}$ слабо сходится к u. Кроме того, из (13) и (5) вытекает

$$\lim_{s\to\infty} \| A_s w_s - g_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0. \tag{22}$$

Положим $\tau = \sup_s (\| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| w_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})$. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle A_s u_s - A_s w_s, u_s - w_s \rangle = \langle A_s u_s - f_s, u_s - w_s \rangle + \langle f_s - g_s, u_s - w_s \rangle +$$
$$+ \langle g_s - A_s w_s, u_s - w_s \rangle.$$

Из этого равенства, используя (6) и (19), получаем

$$\| u_s - w_s \|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leqslant \lambda (1 + \tau)^{m_2 - m} (\langle f_s - g_s, u_s - w_s \rangle +$$
$$+ \tau \| A_s w_s - g_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}). \tag{23}$$

Отсюда, учитывая (20) — (22) и сильную сходимость последовательностей $\{f_s\}$, $\{g_s\}$, выводим $\lim_{t\to\infty} \| u_{s_t} - w_{s_t} \|_{W^{1,m}(\Omega_{s_t})} = 0$. Используя это равенство и неравенство (5), устанавливаем

$$\lim_{t\to\infty} \| A_{s_t} u_{s_t} - A_{s_t} w_{s_t} \|_{(W^{1,m}(\Omega_{s_t}))^*} = 0. \tag{24}$$

Перейдем к непосредственному доказательству предложений а) — в) заключения теоремы. Пусть v — произвольная функция из V. В силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A и леммы 2 существует последовательность $v_s \in V_s$, слабо сходящаяся к v. Положим $\tau_1 = \sup_s \| v_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle g_s - f_s, v_s - u_s \rangle = \langle g_s - A_s w_s, v_s - u_s \rangle + \langle A_s w_s - A_s u_s, v_s - u_s \rangle +$$
$$+ \langle A_s u_s - f_s, v_s - u_s \rangle.$$

Из этого равенства и (19) вытекает

$$\langle g_s - f_s, v_s - u_s \rangle \geqslant -(\tau + \tau_1) (\| A_s w_s - g_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} +$$
$$+ \| A_s u_s - A_s w_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}).$$

Отсюда, используя (22), (24), (20), слабую сходимость последовательности $\{v_s\}$ к v и сильную сходимость последовательности $\{g_s - f_s\}$ к $Au - f$, выводим неравенство $\langle Au - f, v - u \rangle \geqslant 0$, и тем самым предложение а) доказано.

Покажем справедливость предложения б). Предположим, что последовательность $\{u_s\}$ не сходится слабо к u. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_l'\} \subset \mathbb{N}$ и $u' \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $\{u_{s_l'}\}$ слабо сходится к u' и $u' \neq u$. Аналогично тому, как доказано выше для u, имеем: $u' \in V$ и $\forall v \in V$ $\langle Au' - f, v - u' \rangle \geqslant 0$. Отсюда и из предложения а) следует неравенство $\langle Au - Au', u - u' \rangle \leqslant 0$. Но так как $u' \neq u$ и оператор A строго монотонен, то $\langle Au - Au', u - u' \rangle > 0$. Полученное противоречие говорит о том, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, и тем самым предложение б) доказано.

Остается показать справедливость предложения в). Из (23), используя предложение б), (21), (22) и сильную сходимость последовательностей $\{f_s\}$,

$\{g_s\}$, выводим $\lim\limits_{s\to\infty}\| u_s - w_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0$. Отсюда и из (5) следует

$$\lim_{s\to\infty} \| A_s u_s - A_s w_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0.$$

Используя это равенство, равенство (22) и сильную сходимость последовательности $\{g_s\}$ к Au, устанавливаем, что последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au и предложение в) справедливо. Теорема доказана.

В заключение отметим, что операторы в рассмотренных выше вариационных неравенствах являются операторами задачи Неймана в перфорированных областях. Вопрос о G-сходимости этих операторов достаточно подробно изучен в [1]. В случае операторов задачи Дирихле в перфорированных областях сходимость решений соответствующих вариационных неравенств с односторонними препятствиями изучалась в работе [5], методы которой с понятием G-сходимости операторов не связаны. Наконец, отметим, что на основе G-сходимости линейных эллиптических операторов с единой областью определения сходимость решений вариационных неравенств с односторонними препятствиями изучалась в [6, 7].

1. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения. — Донецк, 1990.— 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 90.01).
2. *Ковалевский А. А.* О G-сходимости нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения // Нелинейн. гранич. задачи.— 1991.— Вып. 3.— С. 26—35.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
4. *Усреднение* и G-сходимость дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Ха Тьен Нгоан // Успехи мат. наук.— 1979.— 34, вып. 5.— С. 65—133.
5. *Ламонов С. А.* Нелинейные эллиптические вариационные неравенства второго порядка в областях с мелкозернистой границей.— Донецк, 1983.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1210 Ук-83.
6. *Attouch H., Konishi Y.* Convergence d'operateurs maximaux monotones et inequations variationnelles // C. r. Acad. Sci. Ser. A.— 1976.— 282, N 9.— P. 467—469.
7. *Boccardo L., Marcellini P.* Sulla convergenza delle soluzioni di disequazionali // Ann. mat. pura ed appl.— 1976.— 110.— P. 137—159.

Получено 09.10.91