УДК 519.21

Ю. В. Коломиец, мл. науч. сотр.
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Об усреднении эволюционных уравнений, возмущаемых случайными процессами со скачками

Доказывается слабая сходимость мер, порождаемых решениями эволюционного уравнения, зависящих от малого параметра, к единственному решению проблемы мартингалов, соответствующей стохастическому эволюционному уравнению. Коэффициенты исходного уравнения зависят от случайных марковских процессов со скачками.

Доводиться слабка збіжність мір, породжених розв'язками еволюційного рівняння, залежних від малого параметра, до єдиного розв'язку проблеми мартингалів, що відповідає стохастичному еволюційному рівнянню. Коефіцієнти вихідного рівняння залежать від випадкових марковських процесів з стрибками.

Рассматривается слабая сходимость в смысле распределений решений уравнения (при $\varepsilon \to 0$)

$$\frac{d}{dt} u_t^\varepsilon + A(\alpha_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} B(\alpha_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon = 0, \quad u_0^\varepsilon = f_0 \in H^1(R^n), \qquad (1)$$

где A и B — операторы в частных производных по переменной $x \in R^n$

второго (в дивергентной форме) и первого порядков соответственно, $\alpha_t^\varepsilon = \alpha_{\frac{t}{\varepsilon^2}}$ — случайный процесс, возмущающий коэффициенты операторов.

В работе [1] исследуется асимптотическое поведение решений уравнения (1) в случае, когда α_t — стационарный диффузионный процесс. Показана слабая сходимость решений u_t^ε при $\varepsilon \to 0$ к решению проблемы мартингалов. Слабая сходимость решений уравнения с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами изучена в [2].

В настоящей работе рассматривается случай, когда $\alpha_t = (z_t, y_t)$ является однородным марковским процессом в $R^d \times S$ $(S = \{1, 2, \ldots, N\})$, заданном на вероятностном пространстве (Ω, F, P), с производящим оператором

$$\mathscr{L}\varphi(z, y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(z, y)\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\varphi(z, y) + \sum_{i=1}^{d} b_i(z, y)\frac{\partial}{\partial z_i}\varphi(z, y) + \Pi_z\varphi(z, y),$$

определенном на некотором классе функций φ, заданных на $R^d \times S$, дважды дифференцируемых по z. При фиксированном z оператор Π_z является производящим оператором скачкообразного однородного марковского процесса с конечным множеством состояний S.

Буквой C будем обозначать различные постоянные, не зависящие от ε, по повторяющимся индексам в одночленах предполагается суммирование. Символ «$\Rightarrow$» используется для указания слабой сходимости мер; $C_{z,x}^{k,l}$ — класс функций $f(z, x)$, k раз непрерывно дифференцируемых по z и l раз — по x; символ «b» в обозначении этого класса $(C_{z,x,b}^{k,l})$ указывает на ограниченность этих функций и их производных указанного порядка.

Если H — гильбертово пространство, то $k \boxtimes h$ — элемент $\mathscr{L}(H)$, который определяется следующим образом: $(k \boxtimes h)\, u = (h, u)_H k$; $k, h, u \in H$.

Относительно оператора $\mathscr{L}$ предположим:

$\alpha 1)$ функции $a_{ij}(z, \lambda)$, $b_i(z, \lambda)$, $i, j = 1, \ldots, d$, определены на $R^d \times S$;

$\alpha 2)$ $a_{ij}, b_i \in C_z^3$ и являются периодическими по z с периодом 1 функциями;

$\alpha 3)$ существует $\delta > 0$: $\forall \zeta \in R^d$ $a_{ij}(z, \lambda)\zeta_i\zeta_j \geqslant \delta|\zeta|^2$;

$\alpha 4)$ производящий оператор Π_z определяется матрицей $Q_z = (q_{\lambda\mu}(z))_{\lambda,\mu=\overline{1,N}}$, элементы которой $q_{\lambda\mu}(z) \in C_z^3$ и являются периодическими по z с периодом 1 функциями, $q_{\lambda\mu} > 0$, $\lambda \neq \mu$, $\sum_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu} = 0 \quad \forall \lambda \in S$.

Далее, предполагаем, что операторы A и B имеют вид

$$A(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{a}_{ij}(\alpha, x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\right) + \bar{a}_i(\alpha, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{a}_0(\alpha, x),$$

$$B(\alpha) = \bar{b}_i(\alpha, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{b}_0(\alpha, x), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \alpha \in R^d \times S, \quad x \in R^n.$$

О коэффициентах этих операторов предположим:

B1) коэффициенты $\bar{b}_i \in C_{z,x,b}^{3,3}$, $\bar{b}_0 \in C_{z,x,b}^{3,2}$, $\bar{a}_{ij} \in C_{z,x,b}^{3,1}$, $\bar{a}_i, \bar{a}_0 \in C_{z,r,b}^{3,0}$; периодичны по z с периодом 1;

B2) существует $\gamma > 0$: $\forall \eta \in R^n$ $\bar{a}_{ij}(\alpha, x)\eta_i\eta_j \geqslant \gamma|\eta|^2$.

Из этих условий следует

$$A \in L^\infty(R^d \times S; \mathscr{L}(H^1(R^n), H^{-1}(R^n))), \quad B \in L^\infty(R^d \times S; \mathscr{L}(H^1(R^n), L^2(R^n)))$$

и существуют постоянные $\bar{\gamma} > 0$, $\bar{\lambda} > 0$ такие, что $\forall u \in H^1(R^n)$, $\alpha \in R^d \times S$

$$\langle A(\alpha)\, u, u\rangle + \bar{\lambda}|u|^2 \geqslant \bar{\gamma}\|u\|^2, \tag{2}$$

здесь $|\cdot|$ — норма в $L^2(R^n)$, $\|\cdot\|$ — норма в $H^1(R^n)$, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — отношение двойственности между $H^{-1}(R^n)$ и $H^1(R^n)$. Через $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L^2(R^n)$.

При этих предположениях выполнены условия $A_1 - A_5$ [3] при $p = 2$, $H = L^2(R^n)$, $V = H^1(R^n)$, $f = 0$. Поэтому уравнение (1) имеет единственное V-решение и существует его H-непрерывная модификация [3]. Кроме того, $\forall T > 0$

$$M \sup_{t \leqslant T} | u_t^\varepsilon |^2 + M \int_0^T \| u_t^\varepsilon \|^2 dt \leqslant C(\varepsilon, T) M | f_0 |^2.$$

Обозначим через L_λ^* формально сопряженный оператор к оператору

$$L_\lambda = \frac{1}{2} a_{ij}(z, \lambda) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + b_i(z, \lambda) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \lambda \in S.$$

Через Y обозначим единичный тор в R^d.

Рассмотрим функции $m_\lambda(z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{gathered} L_\lambda^* m_\lambda(z) + \sum_{\mu=1}^N q_{\mu\lambda}(z) m_\mu(z) = 0, \quad \lambda \in S, \\ z \to m_\lambda(z) \text{ периодично}, \ \sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_\lambda(z) dz = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Из результатов [4] следует, что система (3) имеет единственное решение. Кроме того, $\exists C_1, C_2$ такие, что

$$0 < C_1 \leqslant m_\lambda(z) \leqslant C_2. \tag{4}$$

Введем теперь предположение о согласованности уравнения (1) с возмущающей его системой

$$\alpha B) \quad \sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_\lambda(z) \bar{b}_i(z, \lambda, x) dz = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Зафиксируем $T > 0$ и введем пространство

$$\Omega = C([0, T]; \overline{L^2(R^n)}) \cap L^2(0, T; H^1(R^n)),$$

наделенное супремумом из топологий равномерной сходимости на $C([0, T]; \overline{L^2(R^n)})$ ($\overline{L^2(R^n)}$ — пространство $L^2(R^n)$ со слабой топологией) и слабой топологией на $L^2(0, T; H^1(R^n))$, $\mathcal{F}$ — борелевская σ-алгебра на Ω. Для всех $\varepsilon > 0$ через μ^ε будем обозначать вероятностную меру на $(\Omega, \mathcal{F})$, порождаемую $\{u_t^\varepsilon, t \in [0, T]\}$.

Покажем, что семейство мер $\{\mu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ является слабо компактным и любая его предельная мера μ^0 является решением проблемы мартингалов, из единственности решения которой будет следовать, что $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu^0$.

Пусть $\mathcal{B}_S$ — класс всех подмножеств S, $(\Theta, \cdot)$ — некоторое измеримое пространство с конечной мерой $m(d\theta)$ и $\nu(d\theta \times dt)$ — пуассоновская мера с независимыми значениями на $\Theta \times R_+$, для которой $M\nu(d\theta \times dt) = m(d\theta) dt$. Можно построить [5] такую $\mathcal{B}_S \otimes \Gamma$-измеримую функцию $f(z, \lambda, \theta)$ из $S \times \Theta$ в Θ при каждом z, что пара $(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$ будет определяться системой

$$dz_t^\varepsilon = \varepsilon^{-2} b(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) dt + \varepsilon^{-1} \sigma(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) dw_t, \quad z_0^\varepsilon = z_0,$$

$$dy_t^\varepsilon = \int_\Theta f(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon, \theta) \nu^\varepsilon(d\theta \times dt), \quad y_0^\varepsilon = y_0,$$

где $M\nu^\varepsilon(d\theta \times dt) = \varepsilon^{-2} m(d\theta) dt$, $\sigma \times \sigma^T = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,d}}$, w_t — стандартный d-мерный винеровский процесс.

Лемма 1. *Пусть u^ε — решение уравнения* (1), *тогда* $\exists C>0$ *такая, что*

$$M\left[\sup_{0\le t\le T}|u_t^\varepsilon|^4\right]\le C, \tag{5}$$

$$M\left[\int_0^T \|u_r^\varepsilon\|^2 dr\right]\le C. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим случай малых ε, поскольку для $\varepsilon\ge\varepsilon_0>0$ утверждение леммы очевидно. Возьмем функцию $\varphi(u)=|u|^4$, $\varphi'(u)=4|u|^2u$. Далее, определим функции $\psi_k(z,\lambda,x)$, $k=\overline{1,n}$, как единственное решение системы уравнений

$$L_\lambda\psi_k(z,\lambda,x)+\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\psi_k(z,\mu,x)=\overline{b}_k(z,\lambda,x),\quad \lambda\in S, \tag{7}$$

$$z\to\psi_k(z,\lambda,x)\ \text{периодично},\ \sum_{\lambda=1}^N\int_Y \psi_k(z,\lambda,x)\,dz=0.$$

Существование единственного решения системы (7) следует из условий $\alpha1-\alpha4$, $B1$, αB [4]. Функции $\frac{\partial}{\partial z_i}\psi_k\in C_z^2$ [4] при каждом $\lambda\in S$, по x ψ_k обладает той же гладкостью, что и функции $\overline{b}_k$.

Теперь определим оператор

$$F(z,\lambda)=\psi_k(z,\lambda,x)\frac{\partial}{\partial x_k}+\psi_0(z,\lambda,x). \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию $\overline{F}(z,\lambda,u)=(F(z,\lambda)u,\varphi'(u))=2(D(z,\lambda)u,u)|u|^2$, где $D(z,\lambda)=F(z,\lambda)+F^*(z,\lambda)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_k(z,\lambda,x)+2\psi_0(z,\lambda,x)$. Функция $\overline{F}(z,\lambda,u)$ удовлетворяет соотношениям, $\forall\lambda\in S$,

$$L_\lambda\overline{F}(z,\lambda,u)+\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\overline{F}(z,\mu,u)=4(B(z,\lambda)u,u)|u|^2.$$

Очевидно, существует $C>0$ такая, что $\forall\lambda\in S$

$$|D(z,\lambda)u|\le C|u|,\qquad \|D(z,\lambda)u\|\le C\|u\|. \tag{9}$$

Далее, $\frac{\partial}{\partial u}\overline{F}(z,\lambda,u)=4u(D(z,\lambda)u,u)+4|u|^2D(z,\lambda)u$.

Запишем теперь приращение функции $\varphi(u_t^\varepsilon)+\varepsilon\overline{F}(z_t^\varepsilon,y_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon)$ и, используя соотношение (7), сократим члены порядка ε^{-1}. Таким образом, имеем

$$|u_t^\varepsilon|^4+2\varepsilon(D(z_t^\varepsilon,y_t^\varepsilon)u_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon)|u_t^\varepsilon|^2+4\int_0^t\langle A(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon\rangle|u_r^\varepsilon|^2dr=$$

$$=|f_0|^4+2\varepsilon(D(z_0,y_0)f_0,f_0)|f_0|^2-4\int_0^t\langle[\varepsilon A(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)+B(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)]u_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon\rangle\times$$

$$\times(D(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon)dr-4\int_0^t\langle[\varepsilon A(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)+B(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)]u_r^\varepsilon,D(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon\rangle|u_r^\varepsilon|^2dr+$$

$$+2\varepsilon\int_0^t\int_\Theta([D(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon+f(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon,\theta))-D(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)]u_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon)|u_r^\varepsilon|^2\times$$

$$\times\chi^\varepsilon(d\theta\times dr)+2\int_0^t(\nabla_zD(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon)|u_r^\varepsilon|^2\sigma(z_r^\varepsilon,y_r^\varepsilon)\,dw_r,$$

где $\chi^\varepsilon(d\theta \times dt) = \nu^\varepsilon(d\theta \times dt) - \varepsilon^{-2}m(d\theta)\,dt$ — мартингальная мера, ∇_z — символ градиента по z. Обозначим два последних слагаемых через $2\varepsilon\gamma_t^\varepsilon$ и $2\delta_t^\varepsilon$ соответственно и, воспользовавшись соотношением (2), с учетом оценки (9) получим

$$|u_t^\varepsilon|^4(1-\varepsilon C) + 4\bar{\gamma}\int_0^t |u_r^\varepsilon|^2 \|u_r^\varepsilon\|^2 dr \leqslant |f_0|^4(1+\varepsilon C) + (\varepsilon C + \bar{\gamma}) \times$$

$$\times \int_0^t |u_r^\varepsilon|^2 \|u_r^\varepsilon\|^2 dr + (C + 4\bar{\lambda})\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4 dr + 2\varepsilon\gamma_t^\varepsilon + 2\delta_t^\varepsilon.$$

Отсюда для достаточно малых ε имеем

$$M(\sup_{r\leqslant t}|u_r^\varepsilon|^4) + \bar{\gamma}M\int_0^t |u_r^\varepsilon|^2 \|u_r^\varepsilon\|^2 dr \leqslant C|f_0|^4 + CM\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4 dr +$$

$$+ \varepsilon CM(\sup_{r\leqslant t}|\gamma_r^\varepsilon|) + CM(\sup_{r\leqslant t}|\delta_r^\varepsilon|). \tag{10}$$

Процессы γ_t^ε и δ_t^ε являются локальными мартингалами, для которых последовательность $\tau_n = \inf\{t : |u_t^\varepsilon|^4 \geqslant n\} \wedge T$ является локализующей. Применив неравенство Дэвиса [6], можем записать

$$\varepsilon M\sup_{r\leqslant t}|\gamma_r^\varepsilon| + M\sup_{r\leqslant t}|\delta_r^\varepsilon| \leqslant C\Big\{M\Big[\int_0^t\int_\Theta ([D(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon + f(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon, \theta)) -$$

$$- D(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)]u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon)^2 |u_r^\varepsilon|^4 m(d\theta)\,dr\Big]^{1/2} + M\Big[\int_0^t a_{ij}(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)|u_r^\varepsilon|^4 \times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial z_i}D(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_j}D(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right)dr\Big]^{1/2}\Big\} \leqslant CM\Big[\int_0^t |u_r^\varepsilon|^8 dr\Big]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant CM\Big[\sup_{r\leqslant t}|u_r^\varepsilon|^2\Big\{\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4 dr\Big\}^{1/2}\Big] \leqslant CM\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4 dr + \frac{1}{2}M\sup_{r\leqslant t}|u_r^\varepsilon|^4.$$

Подставив последнюю оценку в правую часть (10), получим

$$\frac{1}{2}M|u_r^\varepsilon|^4 \leqslant \frac{1}{2}M(\sup_{r\leqslant t}|u_r^\varepsilon|^4) + \bar{\gamma}M\int_0^t |u_r^\varepsilon|^2\|u_r^\varepsilon\|^2 dr \leqslant C|f_0|^4 +$$

$$+ CM\left(\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4 dr\right).$$

После применения леммы Гронуолла к последнему неравенству получаем оценку (5).

Полагая $\varphi(u) = |u|^2$, аналогично доказывается оценка (6).

Теперь получим оценку модуля непрерывности функции (u_t^ε, β) для всех β из плотного подмножества $L^2(R^n)$.

Пусть $\beta \in H^3(R^n)$. Определим для $\eta > 0$, $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ модуль непрерывности

$$\gamma_\varepsilon(\bar{\omega}, \eta) = \sup\{|(u_t^\varepsilon(\bar{\omega}), \beta) - (u_r^\varepsilon(\bar{\omega}), \beta)|,\ |t - r| \leqslant \eta,\ r, t \in [0, T]\}.$$

Л е м м а 2. *Существует R_+-значная функция $\rho(\nu, \eta)$, определенная для $0 < \nu \leqslant 1$ и $0 < \eta \leqslant T$, такая, что*

1) *для всех фиксированных* $\nu \in [0, 1]$ *при* $\eta \searrow 0$ $\rho(\nu, \eta) \searrow 0$;

2) $P(\gamma_\varepsilon(\bar{\omega}, \eta) \leqslant \rho(\nu, \eta),\ \forall \eta \in [0, T]) \geqslant 1 - \nu,\ \forall \varepsilon > 0,\ \nu \in [0, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (1), умножая скалярно на β, получаем

$$|(u_t^\varepsilon, \beta) - (u_r^\varepsilon, \beta)| \leqslant \int_r^t |(u_s^\varepsilon, A^*(z_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon)\beta) + \varepsilon^{-1}(u_s^\varepsilon, B^*(z_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon)\beta)|\,ds.$$

Отсюда

$$\gamma_\varepsilon(\overline{\omega}, \eta) \leqslant (C + \varepsilon^{-1})\, \eta \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |u_t^\varepsilon(\overline{\omega})|.$$

Для малых ε получим другую оценку. Используя введенный в лемме 1 (см. (8)) оператор $F(z, \lambda)$, записываем приращение функции

$$\rho_t^\varepsilon = (u_t^\varepsilon, \beta) - \varepsilon\,(u_t^\varepsilon, F^*(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\beta):$$

$$\rho_t^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon + \int_0^t (u_r^\varepsilon, A^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\beta)\, dr + \int_0^t (u_r^\varepsilon, [\varepsilon A^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) + B^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)] \times$$

$$\times F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\beta)\, dr = \varepsilon \int_0^t \int_\Theta (u_r^\varepsilon, [F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon + f(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon, \theta)) -$$

$$- F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)]\beta)\, \chi^\varepsilon(d\theta \times dr) + \int_0^t (u_r^\varepsilon, \nabla_z F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\beta)\, \sigma(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\, dw_r.$$

Обозначая слагаемые в правой части через $\varepsilon\gamma_\varepsilon^*(t)$ и $\delta_\varepsilon^*(t)$ соответственно и используя неравенство Буркхольдера — Ганди [6], получаем

$$\varepsilon^4 M(|\gamma_\varepsilon^*(t) - \gamma_\varepsilon^*(s)|^4) + M(|\delta_\varepsilon^*(t) - \delta_\varepsilon^*(s)|^4) \leqslant CM\Big[\int_s^t \int_\Theta (u_r^\varepsilon, [F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon +$$

$$+ f(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon, \theta)) - F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)]\beta)^2 m(d\theta)\, dr\Big]^2 + CM\Big(\int_s^t \Big(u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial z_i} F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\beta\Big) \times$$

$$\times \Big(u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial z_j} F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\beta\Big) a_{ij}(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\, dr\Big]^2.$$

Теперь, используя оценку (5), правую часть оцениваем величиной

$$C\,|t - s|^2$$

Далее доказательство леммы аналогично доказательству предложения 2.4 в [1].

Таким образом, объединяя результаты лемм 1, 2, получаем следующее утверждение [1].

Теорема 1. *Семейство вероятностных мер* $\{\mu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F})$ *слабо компактно.*

Определим процесс $u_t(\omega) = \omega(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть $\mathcal{F}_t = \sigma\{u_r, r \in [0, t]\}$. Заметим, что $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Пусть μ^0 — предельная точка некоторой слабо сходящейся подпоследовательности μ^{ε_k} на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Докажем, что $\forall \beta \in H^3(R^n)$ для функций $\varphi(x) = x$ и $\varphi(x) = x^2$ выражение

$$\varphi((u_t, \beta)) - \varphi((f_0, \beta)) + \int_0^t \langle \hat{A} u_r, \beta \rangle\, \varphi'((u_r, \beta))\, dr - \frac{1}{2}\int_0^t (R(u_r)\beta, \beta)\, \varphi''((u_r, \beta))\, dr$$

является $(\mu^0; \mathcal{F}_t)$-локальным мартингалом, где

$$\hat{A} = \sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_\lambda(z)\, [A(z, \lambda) + F(z, \lambda)\, B(z, \lambda)]\, dz,$$

$$R(u) = -\sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_\lambda(z)\, (B(z, \lambda)\, u \boxtimes F(z, \lambda)\, u + F(z, \lambda)\, u \boxtimes B(z, \lambda)\, u)\, dz.$$

Согласно [7] это означает, что мера μ^0 является решением проблемы мартингалов с коэффициентами $\hat{A}$, $R(u)$ (в дальнейшем: П. М. $(\hat{A}, (R(u))$.

Теорема 2. *Мера* μ^0 — *решение П. М.* $(\hat{A}, R(u))$.

Доказательство. Пусть $\beta \in H^4(R^n)$, $\varphi(x) = x$ или $\varphi(x) = x^2$. Определим с помощью оператора $F(z, \lambda)$ функцию

$$\varphi_1(z, \lambda, u) = (F(z, \lambda) u, \beta) \varphi'((u, \beta)),$$

удовлетворяющую системе уравнений

$$L_\lambda \varphi_1(z, \lambda, u) + \sum_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu}(z) \varphi_1(z, \mu, u) = (B(z, \lambda) u, \beta) \varphi'((u, \beta)),$$

$$z \to \varphi_1(z, \lambda, u) \text{ периодично}, \ \lambda \in S,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \int_Y \varphi_1(z, \lambda, u)\, dz = 0.$$

Пусть $U_s: \Omega \to R$ — ограниченный $\mathcal{F}_s$-согласованный функционал. Тогда, взяв условное математическое ожидание от приращения функции $\varphi((u_t^\varepsilon, \beta)) + \varepsilon\varphi_1(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$, $s < t$, получим

$$M\Big\{U_s(u^\varepsilon)\Big[\varphi((u_t^\varepsilon, \beta)) - \varphi((u_s^\varepsilon, \beta)) + \int_s^t \langle [A(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) +$$

$$+ F(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) B(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)] u_r^\varepsilon, \beta\rangle \varphi'((u_r^\varepsilon, \beta))\, dr + \int_s^t (B(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \beta) \times$$

$$\times (F(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \beta) \varphi''((u_r^\varepsilon, \beta))\, dr\Big]\Big\} = \varepsilon M\Big\{U_s(u^\varepsilon)\Big[\varphi_1(z_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \varphi_1(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) -$$

$$- \int_s^t \langle A(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, F^*(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon)\beta\rangle \varphi'((u_r^\varepsilon, \beta))\, dr - \int_s^t \langle A(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \beta\rangle \times$$

$$\times (F(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \beta) \varphi''((u_r^\varepsilon, \beta))\, dr\Big]\Big\}. \tag{11}$$

Далее, введем в рассмотрение функции $\alpha_{ij}(z, \lambda, x)$, $\hat{a}_{ij}(z, \lambda, x)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, следующим образом: $\forall i\ \hat{a}_{i0} = \hat{a}_{0i}$, $\alpha_{i0} = \alpha_{0i}$,

$$\alpha_{ij}(z, \lambda, x) = \begin{cases} \psi_i(z, \lambda, x) \bar{b}_j(z, \lambda, x), \quad i \neq 0, \quad j \neq 0; \\ \bar{b}_j(z, \lambda, x)\Big[\psi_0(z, \lambda, x) - \dfrac{\partial}{\partial x_k} \psi_k(z, \lambda, x)\Big] + \\ + \psi_j(z, \lambda, x) \bar{b}_0(z, \lambda, x), \quad i = 0, \quad j \neq 0; \\ \psi_0(z, \lambda, x) \bar{b}_0(z, \lambda, x) - \psi_k(z, \lambda, x) \dfrac{\partial}{\partial x_k} \bar{b}_0(z, \lambda, x), \ i = 0, \ j = 0, \end{cases}$$

$$\hat{a}_{ij}(z, \lambda, x) = \begin{cases} \bar{a}_{ij}(z, \lambda, x), \quad i \neq 0, \quad j \neq 0; \\ \bar{a}_i(z, \lambda, x), \quad i = 0, \quad j \neq 0; \\ \bar{a}_0(z, \lambda, x), \quad i = 0, \quad j = 0. \end{cases}$$

Теперь определим функции $e_{ij}(z, \lambda, x)$, $c_{ij}(z, \lambda, x)$, $g_{ij}(z, \lambda, x, h)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, $x, h \in R^n$, как единственные периодические с периодом 1 решения соответствующих систем уравнений

$$\begin{cases} L_\lambda e_{ij}(z, \lambda, x) + \sum\limits_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu}(z) e_{ij}(z, \mu, x) = \sum\limits_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y m_\lambda(z) \hat{a}_{ij}(z, \lambda, x)\, dz - \hat{a}_{ij}(z, \lambda, x); \\ \sum\limits_{\mu=1}^{N} \int\limits_Y e_{ij}(z, \mu, x)\, dz = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_\lambda c_{ij}(z, \lambda, x) + \sum\limits_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu}(z) c_{ij}(z, \mu, x) = \\ = \sum\limits_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y \alpha_{ij}(z, \lambda, x) m_\lambda(z)\, dz - \alpha_{ij}(z, \lambda, x); \\ \sum\limits_{\mu=1}^{N} \int\limits_Y c_{ij}(z, \mu, x)\, dz = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_\lambda g_{ij}(z, \lambda, x, h) + \sum\limits_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu}(z) g_{ij}(z, \mu, x, h) = \\ = \sum\limits_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y m_\lambda(z) \psi_i(z, \lambda, x) \bar{b}_j(z, \lambda, h)\, dz - \psi_i(z, \lambda, x) \bar{b}_j(z, \lambda, h); \\ \sum\limits_{\mu=1}^{N} \int\limits_Y g_{ij}(z, \mu, x, h)\, dz = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

В эти системы переменные x, h входят в качестве параметров.

С помощью функций e_{ij}, c_{ij} введем операторы

$$E(z, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e_{ij}(z, \lambda, x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\right) + e_i(z, \lambda, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + e_0(z, \lambda, x),$$

$$C(z, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ij}(z, \lambda, x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\right) + c_i(z, \lambda, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_0(z, \lambda, x).$$

Введем обозначения $u_i(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(x)$, $u_0(x) = u(x)$ и определим функцию

$$H(z, \lambda, u) = \langle [E(z, \lambda) + C(z, \lambda)] u, \beta \rangle \varphi'((u, \beta)) +$$
$$+ \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \sum_{i,j=0}^{n} g_{ij}(z, \lambda, x, h) u_i(x) u_j(h) \beta(x) \beta(h)\, dx dh \varphi''((u, \beta)),$$

удовлетворяющую соотношениям ($\lambda = 1, \ldots, N$)

$$L_\lambda H(z, \lambda, u) + \sum_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu}(z) H(z, \mu, u) = \mathcal{M}(z, \lambda, u), \tag{12}$$

где

$$\mathcal{M}(z, \lambda, u) = \langle \Big\{ \sum_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y m_\lambda(z) [A(z, \lambda) + F(z, \lambda) B(z, \lambda)]\, dz - [A(z, \lambda) +$$

$$+ F(z, \lambda) B(z, \lambda)] \Big\} u, \beta \rangle \varphi'((u, \beta)) + \Big[\sum_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y m_\lambda(z) (B(z, \lambda) u, \beta)(F(z, \lambda) u, \beta) dz -$$

$$- (B(z, \lambda) u, \beta)(F(z, \lambda) u, \beta) \Big] \varphi''((u, \beta)). \tag{13}$$

Теперь запишем приращение функции $\varepsilon^2 H(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$ при $s < t$, воспользовавшись соотношением (12):

$$\varepsilon^2 M \Big\{ U_s(u^\varepsilon) \Big[H(z_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) - H(z_s^\varepsilon, y_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) + \int\limits_s^t \langle A(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} H(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon) \rangle\, dr \Big] \Big\} + \varepsilon M \Big\{ U_s(u^\varepsilon) \Big[\int\limits_s^t (B(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} H(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon)\Big) dr\Big]\Big\} = M\Big\{U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \mathcal{M}(z_r^\varepsilon, y_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon)\,dz\Big]\Big\}. \quad (14)$$

Далее, учитывая соотношения (13), (14), из соотношения (11) получаем

$$M^\varepsilon\Big\{U_s(u)\Big[\varphi((u_t,\beta)) - \varphi((u_s,\beta)) + \int_s^t\Big[\sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_\lambda(z)\langle[A(z,\lambda) + F(z,\lambda)B(z,\lambda)]u_r,$$

$$\beta\rangle\,dz\,\varphi'((u_r,\beta))\,dr + \int_s^t\Big[\sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_\lambda(z)(B(z,\lambda)u,\beta)(F(z,\lambda)u,\beta)\,dz\Big]\varphi''((u_r,\beta))dr =$$

$$= \varepsilon^2 M\{\ldots\} + \varepsilon M\{\ldots\}, \quad (15)$$

где M^ε — математическое ожидание по мере μ^ε. Воспользовавшись оценкой (5), перейдем к пределу в соотношении (15) при $\varepsilon_k \to 0$. Из предельного соотношения следует, что мера μ^0 является решением П. М. $(\hat{A},\ R(u))$.

Лемма 3. *Пусть* $u,\ \beta \in H^1(R^n)$, *тогда*

$$(R(u)\beta,\beta) = \sum_{\lambda=1}^N \int_Y m_i(z)\,q_{ij}(z)([F(z,i) - F(z,j)]u,\beta)^2 dz +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \int_Y m_i(z)\,a_{kl}(z,i)\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}F(z,i)u,\beta\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial z_l}F(z,i)u,\beta\Big)dz.$$

Доказательство. Имеем

$$(R(u)\beta,\beta) = -2\sum_{i,j=1}^N \int_Y m_\lambda(z)(B(z,\lambda)u,\beta)(F(z,\lambda)u,\beta)\,dz = -2\sum_{\lambda=1}^N \sum_{k,l=0}^n \times$$

$$\times \int_{R^n}\int_{R^n}\int_Y m_\lambda(z)\,\bar{b}_k(z,\lambda,x)\,\psi_l(z,\lambda,h)\,dz\,u_k(x)\,u_l(h)\,\beta(x)\,\beta(h)\,dx\,dh. \quad (16)$$

Из $\alpha 4$ следует, что $\psi_k(z,\lambda,x)\,\psi_l(z,\lambda,h)\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\,m_\lambda(z) = 0$. Тогда, аналогично [2], учитывая (7), (3), преобразуем следующее выражение:

$$\int_Y m_\lambda(z)\,\bar{b}_k(z,\lambda,x)\,\psi_l(z,\lambda,h)\,dz = \int_Y\Big[\psi_k(z,\lambda,x)\,L_\lambda^*(\psi_l(z,\lambda,h)\,m_\lambda(z)) -$$

$$-\psi_l(z,\lambda,h)\,m_\lambda(z)\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\,\psi_k(z,\lambda,x)\Big]dz = \int_Y\Big\{-m_\lambda(z)\,a_{ij}(z,\lambda)\frac{\partial}{\partial z_i}\psi_l(z,\lambda,$$

$$h)\frac{\partial}{\partial z_j}\psi_k(z,\lambda,x) + \psi_l(z,\lambda,h)\,\psi_k(z,\lambda,x)\Big[L_\lambda^* m_\lambda(z) + \sum_{\mu=1}^N q_{\mu\lambda}(z)\,m_\mu(z)\Big] -$$

$$-m_\lambda(z)\,\psi_k(z,\lambda,x)\Big[L_\lambda\psi_l(z,\lambda,h) + \sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\,\psi_l(z,\lambda,h)\Big] + m_\lambda(z)\,\psi_k(z,\lambda,x)\times$$

$$\times\Big[\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\,\psi_l(z,\mu,h)\Big] - \psi_l(z,\lambda,h)\,\psi_k(z,\lambda,x)\Big[\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\,m_\mu(z)\Big] +$$

$$+\psi_l(z,\lambda,h)\,m_\lambda(z)\Big[\sum_{\mu=1}^N q_{\lambda\mu}(z)\,\psi_k(z,\mu,x)\Big] - \psi_k(z,\lambda,x)\,\psi_l(z,\lambda,h)\times$$

$$\times\left[\sum_{\mu=1}^{N} q_{\lambda\mu}(z)\, m_\lambda(z)\right]\Bigg\}\, dz = \int_Y \Bigg\{ - m_\lambda(z)\, a_{ij}(z,\lambda)\, \frac{\partial}{\partial z_i}\, \psi_l(z,\lambda,h)\, \frac{\partial}{\partial z_j}\, \psi_k(z,\lambda,x) -$$

$$- m_\lambda(z)\, \psi_k(z,\lambda,x)\, \bar{b}_l(z,\lambda,h) + N_{k,l}^{\lambda,\mu}(z)\Bigg\}\, dz, \qquad (17)$$

где

$$\sum_{\lambda=1}^{N} N_{k,l}^{\lambda,\mu}(z) = \sum_{\lambda,\mu=1}^{N} [m_\lambda(z)\, q_{\lambda\mu}(z)\, (\psi_k(z,\lambda,x)\, \psi_l(z,\mu,h) - \psi_l(z,\mu,h)\, \psi_k(z,\mu,x) +$$

$$+ \psi_l(z,\lambda,h)\, \psi_k(z,\mu,x) - \psi_k(z,\lambda,x)\, \psi_l(z,\lambda,h))] = \sum_{\lambda,\mu=1}^{N} [m_\lambda(z)\, q_{\lambda\mu}(z)(\psi_k(z,\lambda,x) -$$

$$- \psi_k(z,\mu,x))\, (\psi_l(z,\mu,h) - \psi_l(z,\lambda,h))].$$

Тогда

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{N} \int_{R^n} \int_{R^n} \int_Y \sum_{k,l=0}^{n} N_{k,l}^{\lambda,\mu}(z)\, u_k(x)\, u_l(h)\, \beta(x)\, \beta(h)\, dz dx dh =$$

$$= - \sum_{\lambda,\mu=1}^{N} \int_Y m_\lambda(z)\, q_{\lambda\mu}(z) \int_{R^n} \left[\sum_{k=0}^{n} (\varphi_k(z,\lambda,x) - \psi_k(z,\mu,x))\, u_k(x)\, \beta(x)\right] dx \times$$

$$\times \int_{R^n} \left[\sum_{l=0}^{n} (\psi_l(z,\lambda,h) - \psi_l(z,\mu,h))\, u_l(h)\, \beta(h)\right] dh dz =$$

$$= - \sum_{\lambda,\mu=1}^{N} \int_Y m_\lambda(z)\, q_{\lambda\mu}(z) ([F(z,\lambda) - F(z,\mu)]\, u, \beta)^2. \qquad (18)$$

Преобразуя аналогично (18) первое слагаемое в правой части (17), и, сопоставляя (16), (17), (18), получаем утверждение леммы.

Докажем единственность решения П. М. $(\hat{A}, R(u))$.

Т е о р е м а 3. *Проблема мартингалов* $(\hat{A}, R(u))$ *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 имеем меру μ^0 — решение П. М. $(\hat{A}, R(u))$, тогда согласно [7] $N_t = u_t - f_0 + \int_0^t \hat{A} u_r dr$ является $(\mu^0; \mathcal{F}_t)$-мартингалом в $L^2(R^n)$ таким, что $N_t \boxtimes N_t - \int_0^t R(u_r)\, dr$ является мартингалом в пространстве операторов с конечным следом из $L^2(R^n)$ в $L^2(R^n)$.

Очевидно, $R(u) = R^*(u)$. Из леммы 3, соотношений (4) и условия α4 следует, что $R(u) \geqslant 0 \quad \forall u \in H^1(R^n)$.

Далее, существует $C > 0$ такая, что

$$\mathrm{Sp}\, R(u) = -2 \sum_{\lambda=1}^{N} \int_Y m_\lambda(z)\, (B(z,\lambda)\, u, F(z,\lambda)\, u) dz \leqslant C \| u \|^2.$$

Ядро оператора $R(u)$ имеет вид

$$\sum_{k,l=0}^{n} u_k(x)\, g((k,x); (l,h))\, u_l(h),$$

где

$$g((k,x);(l,h)) = - \sum_{\lambda=1}^{N} \int_Y m_\lambda(z)\, [\bar{b}_k(z,\lambda,x)\, \psi_l(z,\lambda,h) + \bar{b}_l(z,\lambda,h)\, \psi_k(z,\lambda,x)]\, dz$$

является положительным симметричным ядром. В теореме 2.7 [1] показано, что в этом случае существует $K(u) \in \mathscr{L}(L^2(R^n))$ такой, что $R(u) = K(u) K^*(u)$ и отображение $u \to K(u)$ линейно.

Пусть Q — ядерный симметричный неотрицательный оператор на $L^2(R^n)$ и $0 < \operatorname{Sp} Q < \infty$. Тогда [3] на некотором вероятностном пространстве можно построить отвечающий ему винеровский процесс W_r. Положим $\hat{L}(u) = K(u) Q^{-1/2}$, тогда $R(u) = \hat{L}(u) Q \hat{L}^*(u)$ и $N_t = \int\limits_0^t \hat{L}(u_r)\, dW_r$.

Таким образом, u_t допускает представление в виде решения стохастического уравнения в частных производных

$$u_t + \int\limits_0^t \hat{A} u_r dr = f_0 + \int\limits_0^t \hat{L}(u_r)\, dW_r.$$

Для доказательства единственности решения этого уравнения проверим условия $A_1 - A_5$ теоремы 2.3 из [3].

Заметим, что $\exists\, C > 0$ такая, что

$$\left| 2 \sum_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y m_\lambda(z) \langle F(z, \lambda) B(z, \lambda) u, u \rangle dz - \operatorname{Sp} R(u) \right| =$$

$$= \left| 2 \sum_{\lambda=1}^{N} \int\limits_Y m_\lambda(z) (B(z, \lambda) u, [F(z, \lambda) + F^*(z, \lambda)] u)\, dz \right| \leqslant C \| u \| | u |. \quad (19)$$

Из $B2$ и (19) следует, что $\exists\, K > 0$, $\alpha > 0$ такие, что

$$-2 \langle \hat{A} u, u \rangle + \operatorname{Sp} R(u) + \alpha \| u \|^2 \leqslant K | u |^2,$$

т. е. условие коэрцитивности A_3 выполнено. Выполнение остальных условий легко следует из линейности операторов.

Из теорем 1—3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *При* $\varepsilon \to 0$ $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu^0$ — *единственному решению проблемы мартингалов* $(\hat{A}, R(u))$.

1. *Bouc R., Pardoux E.* Asymptotic analysis of P. D. E. s with wideband noise disturbances, and expansion of the moments // Stochast. Anal. and Appl.— 1984.— **2**, N 4.— P. 369—422.
2. *Коломиец Ю. В.* Усреднение эволюционных уравнений со случайными возмущениями // Теория случайных процессов и ее приложения.— Киев : Наук. думка, 1990.— С. 72—81.
3. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— М. : ВИНИТИ.— 1979.— **14**.— С. 72—147.
4. *Bensoussan A.* Homogenization of nonlinear elliptic systems with zero order term coupling // Ricerche di Matematica Suppl.— 1987.— **36**.— P. 203—232.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 611 с.
6. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. — М. : Наука, 1986.— 512 с.
7. *Viot M.* Solutionce et unicite de diffusions a valeurs dans un espace de Hilbert // Ann. Inst. Henri Poincare.— **1974**.— N 10.— 152 p.

Получено 09.10.91