УДК 517.53

В. В. Маймескул, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Аппроксимация аналитических функций полиномами, «близкими» к полиномам наилучшего приближения

Исследуется скорость аппроксимации аналитических функций во внутренних точках компактов со связным дополнением полиномами, «близкими» к полиномам наилучшего приближения.

Досліджується швидкість апроксимації аналітичних функцій у внутрішніх точках компактів, що мають зв'язне доповнення, поліномами, «близькими» до поліномів найкращого наближення.

1. Введение. Пусть K — компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, дополнение Ω которого связно, $A(K)$ — класс функций, непрерывных на K и аналитических на множестве K^0 его внутренних точек. Величину наилучшего равномерного приближения функции $f \in A(K)$ полиномами степени не выше n обозначим $E_n(f) = E_n(f, K)$:

$$E_n(f) := \inf_{P_n : \deg P_n \leqslant n} \| f - P_n \|_{C(K)},$$

$P_n(f, z)$ — полином, минимизирующий $\| f - P_n \|$. В [1] установлено, что $| f(z) - P_n(f, z) |$ во внутренних точках K не может убывать быстрее, чем $E_n(f)$ (за исключением подмножества первой категории из $A(K)$). При некоторых ограничениях на геометрию K было доказано существование полиномов, «близких» к полиномам наилучшего приближения, сходящихся к f на компактных подмножествах из K^0 с более высокой скоростью.

Мы докажем возможность улучшения скорости аппроксимации на компактных подмножествах из K^0 «близкими» к наилучшим полиномами для произвольного компакта K со связным дополнением.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $K = \bigcup_{i=1}^{s} K_i$, *где* K_i, $i = \overline{1, s}$, — *компактные множества, дополнения и внутренности которых связны, и* $K_i \cap K_j = \varnothing$ *для* $i \neq j$; $f \in A(K)$. *Тогда существует последовательность полиномов* p_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\deg p_n \leqslant n$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\| f - p_n \|_{C(K)}}{E_n(f)} \leqslant 2 \tag{1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z) - p_n(z)}{E_n(f)} = 0 \tag{2}$$

равномерно на компактных подмножествах K^0.

Упомянутый выше результат [1] является частным случаем теоремы 1 при $s = 1$. Константа 2 в (1) точна ([1], т. 3). Следующий результат показывает, что полиномы, «близкие» к наилучшим, могут сходиться более быстро, чем $P_n(f, z)$, на компактных подмножествах K^0 для произвольного компакта K со связным дополнением.

Теорема 2. *Существует константа* $C > 0$ *такая, что для любых компакта* K *и* $f \in A(K)$ *существуют полиномы* p_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\deg p_n \leqslant n$ *такие, что*

$$\| f - p_n \|_{C(K)} \leqslant C E_n(f) \tag{3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z) - p_n(z)}{E_n(f)} = 0 \tag{4}$$

равномерно на компактных подмножествах из K^0.

© В. В. МАЙМЕСКУЛ, 1992

В отличие от теоремы 1 мы не знаем точного значения C, однако можно легко получить ее оценку.

В случае, когда $K = \overline{G}$ есть замыкание области с аналитической границей, утверждение (4) в теореме 2 может быть усилено ([1], т. 4):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{|f(z)-p_n(z)|}{E_n(f)}\right]^{1/n} < 1. \tag{4$'$}$$

Как установил Н. А. Широков, этот результат может не иметь места, если отказаться от аналитичности границы ∂G. В этой связи Е. Сафф поставил вопрос о возможном аналоге соотношения (4$'$) для произвольного компакта K. Этому посвящена следующая теорема.

Будем предполагать, не оговаривая этого особо, что последовательность $\{\omega_n\}_1^\infty$ является монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n = \infty$.

Теорема 3. *Для произвольного компакта K со связным дополнением существует последовательность $\{\omega_n\}_1^\infty$ такая, что $\forall f \in A(K)$ существуют полиномы p_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\deg p_n \leqslant n$, удовлетворяющие* (3), *для которых*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(z)-p_n(z)}{E_n(f)}\,\omega_n\right] = 0 \tag{5}$$

равномерно на компактных подмножествах из K^0.

3. Вспомогательные результаты. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений: $\operatorname{dist}(K, F)$ — расстояние между множествами K и F; $\operatorname{diam} F$ — диаметр F; $\operatorname{mes} L$ и $\operatorname{int} L$ — соответственно длина и внутренность жордановой кривой L; $U(z, r)$ — открытый круг с центром в точке z радиуса r. Через $C, c, C_1, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, каждый раз, вообще говоря, различные, значения которых зависят только от указываемых параметров. Если для некоторых переменных $A > 0$, $B > 0$ справедливо неравенство $A \leqslant CB$, в котором значение C либо является абсолютным, либо зависит от несущественных для рассуждений параметров, будем использовать обозначение $A \preccurlyeq B$ (порядковое неравенство).

В дальнейшем нам потребуются несколько вспомогательных лемм. Следующая лемма является простым следствием более общего результата Уолша (см., например, [2], гл. IV).

Лемма 1. *Пусть $K = K_1 \cup K_2$, где K_i, $i = 1, 2$,— компактные множества со связными дополнениями, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$; $g(z)$ — характеристическая функция K_1. Существуют константы $\rho = \rho(K) < 1$, $C_1 = C_1(K)$ и последовательность $\{q_l(z)\}_{l=1}^\infty$ полиномов степени $\leqslant l$ такие, что*

$$\|g - q_l\|_{C(K)} < C_1\rho^l.$$

Лемма 2. *Пусть K — компакт со связным дополнением. Существует континуум $\mathfrak{M} \supset K$ со свойствами:*

a) дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{M}$ есть односвязная область;

b) $\mathfrak{M}^0 = K^0$.

Доказательство. Пусть D — произвольная односвязная область в $\mathbb{C}$, $R \subset D$ — компакт со связным дополнением. Укажем процедуру построения континуума $\mathfrak{N}$ со связным дополнением такого, что $R \subset \mathfrak{N} \subset D$ и $\forall z \in \mathfrak{N}^0$ $\operatorname{dist}(z, R) < t$ для любого наперед заданного $t > 0$.

Пусть $\delta = \min(\operatorname{dist}(R, \partial D)/2, t)$, $\mathfrak{N}'$ есть конечное покрытие R открытыми кругами радиуса δ с центрами на R. Очевидно, $\mathfrak{N}'$ является объединением конечного числа конечносвязных областей:

$$\mathfrak{N}' = \bigcup_{j=1}^{s} G_j.$$

Поскольку $\operatorname{dist}(R, \partial\mathfrak{N}') > 0$, мы можем считать (при необходимости этого нетрудно добиться) что компоненты связности $\partial\mathfrak{N}'$ являются замкнутыми жордановыми кривыми. Более того, каждую из областей G_j можно считать односвязной. Действительно, если какая-либо из областей G_j многосвязна, пусть Γ_0 и Γ_1 обозначают границы неограниченной и какой-либо из ограниченных компонент $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}_j$, $\zeta_l\in\Gamma_l$, $l=0, 1$,— произвольные точки. В силу связности $\mathbb{C}\setminus R$ ζ_0 и ζ_1 могут быть соединены в этой области простой ломаной линией γ. Можно считать, что $\gamma\setminus\{\zeta_0, \zeta_1\}$ лежит в G_j, ибо в противном случае, исходя из γ, такую линию легко построить. Так как

$$\operatorname{dist}(R, \partial G_j\cup\gamma)>0,$$

существует жорданова (аналитическая) кривая $\Gamma_0'\subset G_j\setminus\gamma$ такая, что

$$G_j'=(\operatorname{int}\Gamma_0'\cap G_j)\supset(R\cap G_j).$$

Связность G_j' по крайней мере на единицу меньше связности G_j. Повторяя эту процедуру для G_j' и т. д., через конечное число шагов получим односвязную область $G_j^*\subset G_j$ такую, что $G_j^*\supset(R\cap G_j)$.

Компоненты связности $\mathfrak{N}'$ можно соединить последовательно (перенумеруем их в порядке соединения) конечным числом непересекающихся жордановых дуг γ_l, $l=\overline{1, s-1}$, лежащих в $D\setminus\overline{\mathfrak{N}}'$ (например, с помощью конформного отображения области $D\setminus\overline{\mathfrak{N}}'$ на плоскость с параллельными разрезами). Тогда континуум

$$\mathfrak{N}=\overline{\mathfrak{N}}'\cup\left[\bigcup_{l=1}^{s-1}\gamma_l\right],$$

очевидно, и есть искомый, поскольку $\mathfrak{N}^0=\mathfrak{N}'$.

Итак, положим на первом шаге $R=K$, $D=\mathbb{C}$, $t_1=2^{-1}$ и построим указанным методом континуум $\mathfrak{M}_1$. $\mathfrak{M}_1^0$ состоит из конечного числа s жордановых областей G_j. Проведем теперь указанное построение для $R=K\cap G_j$, $D=G_j$, $t_2=2^{-2}$ и получим континуумы $\mathfrak{M}_{1,j}$, $j=\overline{1, s}$. Осталось соединить $\mathfrak{M}_{1,j}$ непересекающимися жордановыми дугами l_j^1 и l_j^2, лежащими в $G_j\setminus\mathfrak{M}_{1,j}$, с концевыми точками дуг γ_{j-1} и γ_j, воспользовавшись, например, конформным отображением $G_j\setminus\mathfrak{M}_{1,j}$ на круговое кольцо (при $j=1$ и $j=s$ считаем, для удобства, $l_j^1=l_j^2$). Положим

$$\mathfrak{M}_2=\Big(\bigcup_{j=1}^{s}(\mathfrak{M}_{1,j}\cup l_j^1\cup l_j^2)\Big)\cup\Big(\bigcup_{l=1}^{s-1}\gamma_l\Big);$$

$\mathfrak{M}_2$ — континуум со связным дополнением и $\mathfrak{M}_2\subset\mathfrak{M}_1$. Аналогично построим вложенные континуумы $\mathfrak{M}_i$, $i=3, 4, \ldots$.

Тогда $\mathfrak{M}=\bigcap\limits_i\mathfrak{M}_i$ — континуум и условие a), очевидно, выполнено, поскольку дополнение каждого из $\mathfrak{M}_i$ есть односвязная область. Так как $K\subset\mathfrak{M}_i$ при всех i, $K\subset\mathfrak{M}$ и $K^0\subset\mathfrak{M}^0$. Для доказательства b) достаточно показать, что $\mathfrak{M}^0\subset K^0$. Пусть $z\in\mathfrak{M}^0$. Тогда $z\in\mathfrak{M}_i^0$ при всех i. Так как расстояние от любой точки $\mathfrak{M}_i^0$ до K не больше $<2^{-i}$, заключаем, что $\operatorname{dist}(z, K)=0$, т. е. $z\in K$ и $\mathfrak{M}^0\subset K$ и, значит, $\mathfrak{M}^0\subset K^0$. Лемма доказана.

Лемма 3 [3, 4]. *Пусть γ — ограниченный континуум со связным дополнением*, $\operatorname{diam}\gamma=2\delta$. *Тогда $\forall\zeta\in\mathbb{C}$ такой, что* $\operatorname{dist}(\zeta, \gamma)<5\delta$, *существует аналитическая вне γ функция $a_\zeta(z, \gamma)$ со свойствами:*

a) $|a_\zeta(z, \gamma)|\leqslant\dfrac{1}{\delta}$ *при* $\forall z\notin\gamma$;

b) $\left|\dfrac{1}{\zeta-z}-a_\zeta(z, \gamma)\right|\leqslant\dfrac{\delta^2}{|\zeta-z|^3}$ *при* $\forall z: |z-\zeta|\geqslant 16\delta$.

Пусть $K^l=\bigcup\limits_{z\in K}U(z, l)$ обозначает l-окрестность произвольного компактного множества K.

Лемма 4. *Существует абсолютная константа $C_2 > 0$ такая, что для любых компакта K со связным дополнением, компактного подмножества $E \subset K^0$ и $\varepsilon > 0$ $\exists t = t(K, E, \varepsilon)$ такое, что $\forall f \in A(K)$ существует аналитическая на K^t функция $R(z)$ со свойствами:*

а) $\| R \|_{C(K^t)} \leqslant C_2 \| f \|_{C(K)}$;

б) $\| f - R \|_{C(E)} \leqslant \varepsilon \| f \|_{C(K)}$.

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями, аналогичными доказательству одного результата Мергеляна (см. например, [3], гл. 1, § 7.4, т. 6; [4]).

Без ограничения общности будем считать, что $\| f \|_{C(K)} \leqslant 1$. Продолжим $f(z)$ (оставив за ней прежнее обозначение) с сохранением нормы до непрерывной во всей плоскости функции с компактным носителем. Пусть $d = \mathrm{dist}(E, \partial K)$, $0 < \delta \leqslant d/17$ произвольное, выбор которого укажем ниже. Тогда для δ-усреднения

$$f_\delta(z) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{U(z,\delta)} f(\zeta)\, d\sigma_\zeta$$

функции $f(z)$, очевидно, справедливы соотношения:

1) $\| f_\delta \|_{C(\mathbb{C})} \leqslant 1$;

2) $\left\| \dfrac{\partial f_\delta}{\partial \bar\zeta} \right\|_{C(\mathbb{C})} \leqslant \dfrac{1}{\delta}$; $\dfrac{\partial f_\delta}{\partial \bar\zeta} = 0$ при $\zeta \in K_\delta = \{z \in K\colon \mathrm{dist}(z, \Omega) \geqslant \delta\}$;

3) $f_\delta(z) = f(z)$ при $z \in E$;

4) $\| f - f_\delta \|_{C(\mathbb{C})} \leqslant 2$.

Множество $S_\delta = \overline{K^\delta \setminus K_\delta} = \bigcup\limits_{z \in \partial K} U(z, \delta)$ может быть покрыто по лемме Гейне — Бореля конечным числом кругов $U(\zeta_i, 2\delta)$, $\zeta_i \in \partial K$:

$$S_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{l} U(\zeta_i, 2\delta).$$

Пусть $D_1 = U(\zeta_1, 2\delta) \cap S_\delta$, $D_i = [U(\zeta_i, 2\delta) \cap S_\delta] \setminus \left[\bigcup\limits_{k=1}^{i-1} U(\zeta_k, 2\delta)\right]$, $i = \overline{2, l}$. Для каждого i, $i = \overline{1, l}$, через $z_i \in \Omega \cap \overline{U(\zeta_i, 2\delta)}$ обозначим точку (либо одну из точек), максимально удаленную от ∂K. Поскольку Ω связно, точку z_i можно соединить в Ω дугой с точкой ∞. Выделим на каждой такой дуге поддугу γ_i, одной из концевых точек которой является z_i, такую, что $\mathrm{diam}\, \gamma_i = 2\delta$, и положим $t = t(\delta) = \min\limits_i \mathrm{dist}(\gamma_i, K)/4$. Пусть

$$K^t \subset \bigcup_{j=1}^{m} U(w_j, 2t) = K^*, \quad w_j \in K.$$

Тогда

$$K^* \cap \left[\bigcup_{i=1}^{l} \gamma_i\right] = \varnothing.$$

Представим f_δ по формуле Грина

$$f_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K^*} \frac{f_\delta(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{K^*} \frac{\partial f_\delta}{\partial \bar\zeta} \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in K^t.$$

Отметим, что в силу 2) интегрирование в двойном интеграле фактически производится по множеству $K^* \cap S_\delta = S$. Положим при $\zeta \in D_i \cap S$, $z \in K^*$

$$g(\zeta, z) = a_\zeta(z, \gamma_i),$$

где $a_\zeta(z, \gamma_i)$, $i = \overline{1, l}$,— функции, построенные согласно лемме 3. Тогда функция

$$R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K^*}\frac{f_\delta(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_S\frac{\partial f_\delta}{\partial\bar\zeta}\,g(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta$$

является аналитической в K^t, причем при $z\in K^t$

$$|R(z)-f_\delta(z)|=\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_S\frac{\partial f_\delta}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{1}{\zeta-z}-g(\zeta,z)\right]d\sigma_\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta}\iint\limits_{U(z,16\delta)}\left[\frac{1}{|\zeta-z|}+\frac{1}{\delta}\right]d\sigma_\zeta+\frac{1}{\delta}\iint\limits_{\mathbb{C}\setminus U(z,16\delta)}\frac{\delta^2}{|\zeta-z|^3}\,d\sigma_\zeta\leqslant 1.$$

При $z\in E$ и $\zeta\in S$ $|\zeta-z|\geqslant d-\delta\geqslant 16/17d\geqslant 16\delta$ и, следовательно,

$$|R(z)-f_\delta(z)|\leqslant\frac{1}{\delta}\iint\limits_{|\zeta-z|>d/2}\frac{\delta^2}{|\zeta-z|^3}\,d\sigma_\zeta\leqslant\frac{\delta}{d}.$$

Выбирая теперь $\delta=c\varepsilon d$, при достаточно малом $c>0$ получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть K — континуум со связным дополнением Ω. Тогда $\forall t>0$, $\forall\varepsilon>0$ существует $n=n(K,t,\varepsilon)$ такое, что $\forall R\in A(K^t)$, $\|R\|_{C(K^t)}\leqslant 1$ существует полином $T_n(z)$ степени не выше n такой, что*

$$\|R-T_n\|_{C(K)}<\varepsilon.$$

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства теоремы Бернштейна — Уолша, предложенным в [4, 5].

Пусть $\Phi(z)$ — функция Римана, конформно и однолистно отображающая Ω на внешность единичного круга, нормированная условиями $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, $\Psi(w)=\Phi^{-1}(w)$, $L_R=\{z\in\Omega:|\Phi(z)|=R\}$, $R>1$ — линия уровня $\Phi(z)$ порядка R. Выберем $\rho=\rho(t,K)>0$ настолько малым, чтобы $\operatorname{int}L_{1+\rho}\subset K^t$ и рассмотрим выражение

$$T_l(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_l(s)\left(\int\limits_{L_{1+\rho}}\frac{R(\zeta)}{\zeta_{-s}-z}\,d\zeta\right)ds,\quad z\in K,$$

где $\zeta_s=\Psi[\Phi(\zeta)e^{-is}]$, $D_l(s)$ — ядро Дирихле порядка l. Как было установлено [4, 5], T_l является полиномом степени не выше l и для разности $R-T_l$ справедливы соотношения

$$|R(z)-T_l(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=l+1}^{\infty}\Pi_j(z)\int\limits_{L_{1+\rho}}\frac{R(z)-R(\zeta)}{|\Phi(\zeta)|^j}\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_3(K)\,\mathrm{mes}\,L_{1+\rho}\sum_{j=l+1}^{\infty}j(1+\rho)^{-j},$$

где $\Pi_j(z)$ — стандартные многочлены Фабера [4]. Поэтому, учитывая, что $\mathrm{mes}\,L_{1+\rho}\leqslant C_4(K)/\rho$, получаем

$$|R(z)-T_l(z)|\leqslant\frac{C_5(K)}{\rho}\sum_{j=l+1}^{\infty}j(1+\rho)^{-j}\leqslant C_6(K)\,\rho^{-2}l(1+\rho)^{-l}\to 0$$

при $l\to\infty$. Поэтому $\exists n(K,\rho,\varepsilon)=n(K,t,\varepsilon)$ такое, что $|R(z)-T_l(z)|<\varepsilon$ при $l\geqslant(K,t,\varepsilon)$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Покажем, какие изменения следует внести в доказательство теоремы 2 [1], чтобы перейти от случая $s=1$ к случаю $s=2$. Для произвольного конечного s доказательство аналогично.

Рассмотрим на K_i функцию

$$Q_n(f, z) = \frac{f(z) - P_n(f, z)}{E_n(f)}. \tag{6}$$

Заметим, что $\| Q_n(f, z) \|_{C(K_i)} \leqslant 1$. Поэтому, следуя доказательству т. 2 из [1], построим полиномы $R_{k,n}^{(i)}(f, z)$ степени не выше $n^{(i)}(k)$, $k \geqslant 5$, для которых

$$\| R_{k,n}^{(i)}(f, z) \|_{K_i} \leqslant E_n(f) \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \tag{7}$$

$$| f(z) - P_n(f, z) - R_{k,n}^{(i)}(f, z) | \leqslant E_n(f) e^{-k} \tag{8}$$

при $z \in G_{1-2/k}^{(i)}$, где $G_t^{(i)}$, $t < 1$, есть внутренность внутренней линии уровня области K_i^0 порядка t. Кроме того, можем считать, что для всех k $n^{(i)}(k) < n^{(i)}(k+1)$.

Пусть $\Omega_t^{(i)}$, $t > 1$, — внутренность внешней линии уровня области K_i^0 порядка t, $r = \max(r_1, r_2)$, где $r_i > 1$, $i = 1, 2$, — произвольные фиксированные числа, для которых

$$K_{3-i} \subset \overline{\Omega_{r_i}^{(i)}}.$$

По лемме Бернштейна — Уолша (см., например, [2]) в дополнение к (7) и (8) имеем оценку

$$\| R_{k,n}^{(i)}(f, z) \|_{K_{3-i}} \leqslant E_n(f) r^{n(k)}, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

где $n(k) = \max\limits_i n^{(i)}(k)$.

Пусть $\{q_l(z)\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность полиномов, построенная по лемме 1 для компактов K_1 и K_2. Выберем $l = l(k)$ так, чтобы

$$r^{n(k)} \rho^{l(k)} < e^{-k} \tag{10}$$

и $l(k) < l(k+1)$ при всех k. Рассмотрим выражение

$$T_{k,n}(f, z) = R_{k,n}^{(1)}(f, z) q_l(z) + R_{k,n}^{(2)}(f, z)(1 - q_l(z)).$$

$T_{k,n}(f, z)$ является полиномом степени не выше $n(k) + l(k) = n'(k)$, причем $n'(k) < n'(k+1)$. Используя (7) — (10), заключаем, что

$$\| T_{k,n}(f, z) \|_{C(K)} \leqslant E_n(f) \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)(1 + C_1 \rho^{l(k)}) +$$

$$+ C_7 E_n(f) r^{n(k)} \rho^{l(k)} \leqslant E_n(f) \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right);$$

при, например, $z \in G_{1-2/k}^{(1)}$

$$|f(z) - P_n(f, z) - T_{k,n}(f, z)| \leqslant |f(z) - P_n(f, z) - R_{k,n}^{(1)}(f, z)| + |R_{k,n}^{(1)}(f, z) -$$

$$- R_{k,n}^{(2)}(f, z)| \, |1 - q_l(z)| \leqslant E_n(f) e^{-k} + E_n(f)(1 + r^{n(k)}) \rho^{l(k)} \leqslant E_n(f) e^{-k}.$$

Таким образом, выбирая, как и в [1],

$$p_n(z) := P_n(f, z) + T_{k,n}(f, z),$$

для $n'(k) \leqslant n < n'(k+1)$ получаем требуемую последовательность полиномов, поскольку $\{G_{1-2/k}^{(1)} \cup G_{1-2/k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ образуют возрастающую последовательность множеств, исчерпывающую K^0. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2, 3. Докажем теорему 3, поскольку теорема 2 является ее следствием.

Сначала, пользуясь леммой 2, построим континуум $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условиям *a*) и *b*). Пусть функции $Q_n(f, z)$ определены соотношением

(6). Продолжим их до непрерывных во всей плоскости функций с сохранением нормы. Тогда при всех n $Q_n \in A(\mathfrak{M})$ и их sup-нормы не превышают 1.

Пусть $\{d_m\}_1^\infty$, $\{\varepsilon_m\}_1^\infty$ — произвольные монотонно убывающие к 0 последовательности, $K_m = \{z \in K : \operatorname{dist}(z, \Omega) > d_m\}$, $\{t_m\}_1^\infty$ — последовательность чисел, определенная леммой 4 для континуума $\mathfrak{M}$, $E = K_m$ и $\varepsilon = \varepsilon_m$. Полагая в лемме 5 $\varepsilon = \varepsilon_m/C_2$ и $t = t_m$, получаем последовательность $n_m = n(\mathfrak{M}, m)$, которую, исходя из ее доказательства, можем считать возрастающей.

Далее, для каждого n: $n_m \leqslant n < n_{m+1}$, пользуясь леммой 4, определим для функции Q_n аналитическую на $\mathfrak{M}^{t_m} = \mathfrak{M}^m$ функцию R_n такую, что

$$\| R_n \|_{C(\mathfrak{M}^m)} \leqslant C_2; \qquad \| Q_n - R_n \|_{C(K_m)} \leqslant \varepsilon_m. \tag{11}$$

Применяя снова лемму 5 для функций R_n/C_2, построим полином $T_{n,m}(z)$ степени не выше n_m такой, что

$$\| R_n - C_2 T_{n,m} \|_{C(\mathfrak{M})} \leqslant \varepsilon_m. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$\| C_2 T_{n,m} \|_{C(\mathfrak{M})} \leqslant C_2 + \varepsilon_m; \qquad \| Q_n - C_2 T_{n,m} \|_{C(K_m)} \leqslant 2\varepsilon_m.$$

Определим последовательность $\{\omega_n\}$, например, следующим образом:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{m-1}}} + \frac{n - n_m}{n_{m+1} - n_m} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{m-1}}} \right]$$

при $n_m \leqslant n < n_{m+1}$, $m = 2, 3, \ldots$. Тогда для полиномов

$$p_n(z) := P_n(f, z) + C_2 E_n(f)\, T_{n,m}(f, z),$$

имеющих степень не выше n, справедливо

$$\| f - p_n \|_{C(K)} \leqslant (C_2 + 1 + \varepsilon_m)\, E_n(f)$$

и

$$\frac{\| f - p_n \|_{C(K_m)}}{E_n(f)}\, \omega_n \leqslant \sqrt{\varepsilon_m}.$$

Поскольку K_m образуют возрастающую последовательность множеств, исчерпывающую K^0, теорема доказана.

1. *Saff E. B., Totik V.* Behaviour of polynomials of best uniform approximation // Trans. Amer. Math. Soc.— 1989.— **316**, N2.— P. 567—593.
2. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 508 с.
3. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1964.— 440 с.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
5. *Прыпик А. С.* О применении обобщенных многочленов Фабера к приближению функций, аналитических на замкнутых множествах // Теория приближения функций и ее приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 114—118.

Получено 09.10.91