УДК 513.88+517.984

М. М. Маламуд, канд. физ.-мат. наук (Донецк. политехн. ин-т)

О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами

В терминах абстрактных граничных условий описываются некоторые классы расширений эрмитова оператора с лакунами. Найдена связь между асимптотическим поведением собственных значений расширения у краев лакуны и асимптотикой отрицательного спектра соответствующего граничного оператора.

У термінах абстрактних граничних умов описуються деякі класи розширень ермітового оператора з лакунами. Знайдено зв'язок між асимптотичною поведінкою власних значень розширення біля країв лакуни та асимптотикою від'ємного спектра відповідного граничного оператора.

В в е д е н и е. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — замкнутый эрмитов оператор с плотной в H областью определения $D(A)$ и равными дефектными числами $n_+(A) = n_-(A) \leqslant \infty$. В настоящей работе, примыкающей по содержанию к работам [1—7], приводится подробное изложение части результатов, анонсированных ранее в [8].

Так, в п. 1 данной статьи доказывается теорема о квадратичных формах, обобщающая известный результат Бирмана — Крейна [1—3]. В остальной части статьи в терминах абстрактных граничных условий описываются некоторые новые классы собственных (не обязательно самосопряженных) расширений $\tilde{A}_B$ оператора A с лакунами. Например, в теореме 3 найдена связь между асимптотиками отрицательных собственных значений полуограниченного расширения $\tilde{A}_B = \tilde{A}_B^*$ оператора $A \geqslant 0$ и соответствующего граничного оператора B. В случае оператора A с конечной лакуной (α, β) получен аналогичный результат об асимптотическом поведении собственных чисел, содержащихся внутри лакуны.

Отметим также, что применяемый метод, базирующийся на формуле для резольвент и систематическом использовании функции Вейля, пригоден для изучения расширений как положительного оператора, так и оператора с конечной лакуной.

Будем придерживаться следующих обозначений: H, $\mathcal{H}$ — гильбертовы пространства; $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ — множество ограниченных линейных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$; если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, то $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] = [\mathcal{H}]$; $\mathscr{C}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$ с плотной областью определения; $\tilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных отношений в $\mathcal{H}$, причем $\mathscr{C}(\mathcal{H}) \subset \tilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ при отождествлении оператора с его графиком; $D(T)$ и $\Re(T)$ — области определения и значений оператора T соответственно; $\sigma(T)$, $\rho(T)$ и $\hat{\rho}(T)$ — его спектр, резольвентное множество и поле регулярности соответственно; $T \upharpoonright L$ — сужение T на множество L; A — эрмитов оператор в H, $\mathfrak{M}_z = (A - z)D(A)$, $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{M}_{\bar{z}}^{\perp} = \ker(A^* - z)$; если $A \geqslant 0$, то $\tilde{A}_F$ и $\tilde{A}_K$ — его наибольшее (фридрихсово) и наименьшее (крейновское) расширения во множестве всех неотрицательных расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^* \geqslant 0$; $m(A)$ — нижняя грань полуограниченного снизу оператора A; $E_{\tilde{A}}(\lambda) = E_{\tilde{A}}(\lambda - 0)$ — спектральная функция оператора $\tilde{A} = \tilde{A}^*$.

1. В с п о м о г а т е л ь н ы е   п р е д л о ж е н и я. Приведем некоторые определения.

О п р е д е л е н и е 1 [9]. *Совокупность* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, *в которой* $\mathcal{H}$ — *гильбертово пространство* $(\dim \mathcal{H} = n_\pm(A))$, *а* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in [D(A^*), \mathcal{H}]$, *называют пространством граничных значений (ПГЗ) оператора* A^*, *если*:

1) $(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} \ \forall f, g \in D(A^*)$;

2) *отображение* $\Gamma: f \to \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}$ *из* $D(A^*)$ *в* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно.*

Отображение Γ устанавливает биективное соответствие между собственными расширениями $\tilde{A}$ $(A \subset \tilde{A} = \tilde{A}^{**} \subset A^*)$ оператора A и замк-

© М. М. МАЛАМУД, 1992

нутыми линейными отношениями θ в $\mathcal{H}$:

$$f \in D(\widetilde{A}) = D(\widetilde{A}_\theta) \Leftrightarrow \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \theta \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}. \tag{1}$$

В фиксированном ПГЗ особую роль играют два расширения $\widetilde{A}_i = \widetilde{A}_i^*$, для которых $D(\widetilde{A}_i) = \ker \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$ и которым согласно (1) соответствуют отношения $\theta_1 = \{(\psi, 0) : \psi \in \mathcal{H}\}$ и $\theta_2 = \{(0, \psi) : \psi \in \mathcal{H}\}$.

Расширения $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{A}''$ называют дизъюнктными, если $D(\widetilde{A}') \cap D(\widetilde{A}'') = D(A)$, и трансверсальными, если, к тому же, $D(\widetilde{A}') + D(\widetilde{A}'') = D(A^*)$.

Определение 2 [4—7]. *Функцией Вейля оператора A, соответствующей ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, называют оператор-функцию $M(z)$, определенную $\forall z \in \rho(\widetilde{A}_2)$ равенством*

$$M(z)\Gamma_2 f_z = \Gamma_1 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z = \ker(A^* - z). \tag{2}$$

В работах [4—7] найдена связь формулы М. Г. Крейна для резольвент с ПГЗ и показано, что равенство

$$(\widetilde{A}_\theta - z)^{-1} = (\widetilde{A}_2 - z)^{-1} + \gamma(z)(\theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\bar{z}) \tag{3}$$

устанавливает биективное соответствие между собственными расширениями $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta$ и линейными отношениями $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$. Здесь $\gamma(z) = (\Gamma_2 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1}$ и является γ-полем оператора $\widetilde{A}_2$, т. е.

$$\gamma(z) = (\widetilde{A}_2 - z_0)(\widetilde{A}_2 - z)^{-1}\gamma(z_0), \quad \gamma(z_0) \in [\mathcal{H}, \mathfrak{N}_{z_0}], \quad \gamma^{-1}(z_0) \in [\mathfrak{N}_{z_0}, \mathcal{H}]. \tag{4}$$

Будем писать $T \in S_\beta(\varphi)$, если оператор T m-секториален с вершиной β и полууглом $\varphi \in [0, \pi/2]$, т. е. $\operatorname{Re}(Tf, f) \pm \operatorname{ctg}\varphi \cdot \operatorname{Im}(Tf, f) \geqslant \beta \| f \|^2$ $\forall f \in D(T)$ и $\rho(T) \neq \varnothing$. Обозначим через $\operatorname{Re} T = (\operatorname{Re} T)^*$ оператор $(\in S_\beta(0))$, ассоциированный [10] с замыканием $\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}}$ формы $\operatorname{Re}(Tf, f)$, если она замыкаема, а через $D[T]$ — замыкание $D(T)$ по T-норме $(\| f \|_T^2 = \operatorname{Re}(Tf, f) + (1 + \beta)\|f\|^2$. Замыкание $\mathfrak{t}_T[f]$ формы (Tf, f) обозначают также $T[f] = T[f, f]$. Если $T = T^* \geqslant \beta \geqslant 0$, то $D[T] = D(T^{1/2})$ и $\mathfrak{t}_T[f] = T[f, f] = \| T^{1/2} f \|^2$.

Линейное отношение θ относят классу $\widetilde{S}_\beta(\varphi)$, если его операторная часть $T \in S_\beta(\varphi)$. При этом $D(\theta) = D(T)$, $D[\theta] = D[T]$ и $\theta[f] = \theta[f, f] = T[f]$.

Отметим, что при $\varphi < \pi/2$ формы (Tf, f) и $\operatorname{Re}(Tf, f)$ всегда замыкаемы [10]. При $\varphi = \pi/2$ это, вообще говоря, не выполняется. Действительно, полагая

$$H = L_2(0, \infty), \ Ty = iy'', \quad y \in D(T) \Leftrightarrow y \in W_2^2[0, \infty), \quad y'(0) = i\beta y(0), \quad \beta > 0,$$

видим, что $\operatorname{Re}(Ty, y) = \beta |y(0)|^2 \geqslant 0$ и форма $\operatorname{Re}(Ty, y)$ не замыкаема.

Предложение 1 [5—7]. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ оператора A^*, в котором $A_2 \geqslant 0$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда:*

1) *существует сильный резольвентный предел*

$$M(0) \doteq S - R - \lim_{x \uparrow 0} M(x) \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H}),$$

являющийся полуограниченным снизу самосопряженным отношением, и верна эквивалентность $f \in D(\widetilde{A}_K) \Leftrightarrow \Gamma f = \langle \Gamma_2 f, \Gamma_1 f \rangle \in M(0)$;

2) *операторная часть отношения $M(0)$ ассоциирована с квадратичной формой $\mathfrak{t}_0$, т. е. $\mathfrak{t}_{M(0)} = \mathfrak{t}_0$, где*

$$\mathfrak{t}_0[f] = \lim_{x \uparrow 0}(M(x) f, f), \quad D(\mathfrak{t}_0) = \{f : \lim_{x \uparrow 0}(M(x) f, f) < \infty\}; \tag{5}$$

3) $\widetilde{A}_2$ *и* $\widetilde{A}_K$ *дизъюнктны* $\Leftrightarrow M(0) \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$;

4) $\widetilde{A}_2$ *и* $\widetilde{A}_K$ *трансверсальны* $\Leftrightarrow M(0) \in [\mathscr{H}]$.

Предложение 2. *Пусть* $\{\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ оператора* $A \geqslant 0$, *для которого* $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_F$. *Тогда верны эквивалентности*:

1) $\widetilde{A}_\theta + \beta \geqslant 0\ (\beta > 0) \Leftrightarrow \theta - M(-\beta) \geqslant 0$;

2) $\widetilde{A}_\theta \geqslant 0 \Leftrightarrow D(\mathfrak{k}_\theta) = D[\theta] \subset D[M(0)] = D(\mathfrak{k}_{M(0)}),\ \mathfrak{k}_\theta - \mathfrak{k}_{M(0)} \geqslant 0$;

3) $\widetilde{A}_\theta \in S_{-\beta}(\varphi) \Leftrightarrow \theta - M(-\beta) \in S_0(\varphi) \quad (\forall \beta > 0)$;

4) $\widetilde{A}_\theta \in S_0(\varphi) \Leftrightarrow D[\theta] \subset D[M(0)], \quad \mathfrak{k}_{\mathrm{Re}\,\theta} \pm \mathrm{ctg}\,\varphi\, \mathfrak{k}_{\mathrm{Im}\,\theta} \geqslant \mathfrak{k}_{M(0)}$.

Если $D(\theta) \subset D(M(0))$ (*в частности, если* $M(0) \in [\mathscr{H}]$), *то условия* (2) *и* (4) *эквивалентны включению* $\theta - M(0) \in \widetilde{S}_0(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение 1 — следствие формулы (3) и экстремального свойства фридрихсова (жесткого) расширения $\widetilde{A}_F$ [1]:

$$\forall \widetilde{A} = \widetilde{A}^* \supset A, \quad \widetilde{A} \geqslant \beta_0 \Rightarrow (\widetilde{A} + \beta)^{-1} \geqslant (\widetilde{A}_F + \beta)^{-1} \ \forall \beta > \beta_0. \tag{6}$$

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1, предложения 1 и очевидной эквивалентности $D[\theta] \subset D[M(0)],\ \mathfrak{k}_\theta - \mathfrak{k}_{M(0)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \theta - M(-\varepsilon) \geqslant 0\ \forall \varepsilon > 0$. Утверждения 3 и 4 — следствия утверждений 1 и 2. Если $\widetilde{A}_\theta \in S_{-\beta}(\varphi)$, $\varepsilon > 0$, то, введя операторы

$$C_+ \doteq \frac{(\widetilde{A}_\theta + \beta + \varepsilon)^{-1} + (\widetilde{A}_\theta^* + \beta + \varepsilon)^{-1}}{2},$$

$$C_- \doteq \frac{(\widetilde{A}_\theta + \beta + \varepsilon)^{-1} - (\widetilde{A}_\theta^* + \beta + \varepsilon)^{-1}}{2i}, \tag{7}$$

видим, что $C_+ \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot C_- > 0$ и $\ker(C_+ \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot C_-) = \{0\}$. Кроме того,

$$C_+(A + \beta + \varepsilon)g = g, \quad C_-(A + \beta + \varepsilon)g = 0 \qquad \forall g \in D(A). \tag{8}$$

В силу (8) неотрицательные операторы $(C_+ \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot C_-)^{-1}$ являются самосопряженными расширениями оператора $A + \beta + \varepsilon$. Следовательно существуют $\theta_\pm = \theta_\pm^* \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ такие, что

$$\widetilde{A}_{\theta_\pm} = \widetilde{A}^*_{\theta_\pm} \doteq (C_+ \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot C_-)^{-1} - \beta - \varepsilon \supset A. \tag{9}$$

Так как в силу (6) $(\widetilde{A}_{\theta_\pm} + \beta + \varepsilon)^{-1} - (\widetilde{A}_F + \beta + \varepsilon)^{-1} \geqslant 0$, то из (7), (9) и (3) заключаем, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathrm{Re}\,(\theta - M(-\beta - \varepsilon))^{-1} \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \mathrm{Im}\,(\theta - M(-\beta - \varepsilon))^{-1} \geqslant 0, \tag{10}$$

т. е. $(\theta - M(-\beta - \varepsilon))^{-1} \in S_0(\varphi)$. Но тогда $\theta - M(-\beta - \varepsilon) \in \widetilde{S}_0(\varphi)$ $\forall \varepsilon > 0$ и, следовательно, $\theta - M(-\beta) \in \widetilde{S}_0(\varphi)$. Итак, доказана импликация $\widetilde{A}_\theta \in S_{-\beta}(\varphi) \Rightarrow \theta - M(-\beta) \in \widetilde{S}_0(\varphi)$. Обращая ход рассуждений, установим обратную импликацию.

Утверждение 4 доказывается аналогично, причем включение $D[\theta] \subset D[M(0)]$ вытекает из неравенства $(M(-\varepsilon) f, f) \leqslant C(1 + \mathrm{tg}\,\varphi)\,\mathrm{Re}\,\theta\,[f]$ и утверждения 2 предложения 1 (см. соотношения (6)).

Замечание 1. Утверждения 1 и 2 доказаны в [4, 5]. Утверждения 3 и 4 в менее общей форме получены в [11] (см. также [12]). Близкое по форме описание расширений класса $S_0(\varphi)$ получено также в [13].

2. Квадратичные формы. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $C \in [H]$, $C = C^* \geqslant 0$, $H_1 = \overline{CH}$. *Тогда равенство*

$$B = C^{1/2} K C^{1/2} \quad (K = K^* \in [H_1],\ \| K \| \leqslant 1) \tag{11}$$

устанавливает биективное соответствие между операторами $B \in [H]$, *для которых* $|(Bf, f)| \leqslant (Cf, f)\ \forall f \in H$ *и эрмитовыми сжатиями* $K \in [H_1]$.

Из этого утверждения вытекает простое доказательство известной леммы Крейна — Гельфанда.

Следствие 1 [1]. *Пусть* $C = C^* \geqslant 0$, $C \in [H]$, $\mathfrak{N}$ — *подпространство в* H. *Тогда существует максимальный элемент* $C_{\mathfrak{N}}$ *во множестве операторов, не превышающих* C *и аннулирующих* $\mathfrak{N}^{\perp} = H \ominus \mathfrak{N}$. *Он имеет вид*

$$C_{\mathfrak{N}} = C^{1/2} P_{\mathfrak{L}} C^{1/2}, \tag{12}$$

где $P_{\mathfrak{L}}$ — *ортопроектор на подпространство* $\mathfrak{L}$ — *замыкание линеала тех* $f \in H$, *для которых* $C^{1/2} f \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $H_1 = \overline{CH}$. Так как условиям следствия 1 удовлетворяет нулевой оператор, то $0 \leqslant C_{\mathfrak{N}} \leqslant C$ и, следовательно, оператор $C_{\mathfrak{N}}$ (если он существует) имеет вид (11): $C_{\mathfrak{N}} = C^{1/2} K_0 C^{1/2}$ ($K_0 \geqslant 0$, $K_0 \in [H_1]$). При $K \geqslant 0$ условие $\ker B \supset \mathfrak{N}^{\perp}$ эквивалентно $\ker K \supset C^{1/2}(\mathfrak{N}^{\perp})$. Так как неравенство $B_1 = C^{1/2} K_1 C^{1/2} \leqslant C^{1/2} K_2 C^{1/2} = B_2$ эквивалентно неравенству $K_1 \leqslant K_2$ ($K_i \in [H_1]$), то формула (12) следует из того, что оператор $K_0 \doteq P_{H_1} P_{\mathfrak{L}} \restriction_{H_1}$ максимален во множестве эрмитовых сжатий, аннулирующих линеал $C^{1/2}(\mathfrak{N}^{\perp})$.

Следствие 2 [1, 14]. *Образы* $\mathfrak{R}(C^{1/2})$ *и* $\mathfrak{R}(C_{\mathfrak{N}}^{1/2})$ *операторов* $C^{1/2}$ *и* $C_{\mathfrak{N}}^{1/2}$ *удовлетворяют соотношению*

$$\mathfrak{R}(C_{\mathfrak{N}}^{1/2}) = \mathfrak{R}(C^{1/2}) \cap \mathfrak{N}. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно (12) $C_{\mathfrak{N}} = T^* T$, где $T = P_{\mathfrak{L}} C^{1/2}$, а $P_{\mathfrak{L}}$ — ортопроектор на $\mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{R}(T^*) = \mathfrak{R}(C^{1/2}) \cap \mathfrak{N}$. Равенство (13) вытекает теперь из известного [10, с. 421] соотношения

$$\mathfrak{R}(T^*) = \mathfrak{R}(|T|) = \mathfrak{R}((T^*T)^{1/2}).$$

Оператор $C_{\mathfrak{N}}$ называют укороченным (на $\mathfrak{N}$) оператором, а трансформатор $C \to C_{\mathfrak{N}}$ — трансформатором М. Г. Крейна.

Лемма 2. *Пусть* $T \in [\mathcal{H}]$, $T \geqslant 0$, $B \in [\mathcal{H}, \mathcal{H}_1]$, $\exists B^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}]$. *Тогда* $\mathfrak{R}((BTB^*)^{1/2}) = B\mathfrak{R}(T^{1/2})$.

Доказательство элементарно.

Теорема 1. *Пусть* $A \geqslant 0$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ, для которого* $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_F$, θ — *линейное отношение в* $\mathcal{H}$, $\widetilde{A}_\theta \in S_\beta(\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi < \pi/2)$ *и* $a < 0$. *Тогда* $\theta \in \widetilde{S}_{\beta_1}(\varphi)$ *при некотором* $\beta_1 \leqslant 0$ (*например, при* $\beta_1 = -\| M(\beta) \|$) *и справедливо разложение*

$$D[\widetilde{A}_\theta] = D[A] \dotplus \gamma(a) D[\theta] = D[A] \dotplus \gamma(a) D[\operatorname{Re}\theta], \tag{14}$$

причем заменой $\widetilde{A}_0$-*метрики на эквивалентную прямую сумму в* (14) *можно сделать ортогональной. Далее,* $\forall f \in D[\widetilde{A}_\theta]$, $f = g + \gamma(a)\varphi$, *где* $g \in D[A]$, $\varphi \in D[\theta]$ *имеют место равенства*

$$\widetilde{A}_0[f, f] + a\| f \|^2 = A[g, g] + a\| g \|^2 + \theta[\varphi, \varphi] - (M(a)\varphi, \varphi), \tag{15}$$

$$\operatorname{Re}\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_{\operatorname{Re}\theta}\ (\supset A). \tag{16}$$

Кроме того, в случае $\widetilde{A}_\theta \in S_\beta(\pi/2)$ форма $\operatorname{Re}\widetilde{A}_\theta[f]$, замыкаема точно тогда, когда замыкаема форма $\operatorname{Re}\theta[f]$, причем в случае замыкаемости одной из них соотношения (14) — (16) сохраняются.

Доказательство. 1. Пусть вначале $\widetilde{A}_\theta = \widetilde{A}_\theta^* \geqslant -\varepsilon_0 I$. Докажем соотношение

$$D[\widetilde{A}_\theta] = D[A] \dotplus D[\widetilde{A}_\theta] \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon}, \tag{17}$$

в котором $\varepsilon > \varepsilon_0 \geqslant 0$. Согласно экстремальному свойству (6) фридрихсова расширения $\widetilde{A}_F$ оператор $(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} - (\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}$ — наибольший среди тех, которые не превышают $(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1}$ и аннулируют подпространство $\mathfrak{M}_{-\varepsilon} = (A + \varepsilon) D(A)$. В силу следствия 1 и формулы резольвент (3)

$$\gamma(-\varepsilon)(\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \gamma^*(-\varepsilon) = [(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1}]_{\mathfrak{N}_{-\varepsilon}} =$$

$$= (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1/2} P (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1/2}, \tag{18}$$

где P — ортопроектор на замыкание линеала тех f, для которых $(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1/2} f \in \mathfrak{N}_{-\varepsilon}$. Поэтому $\forall x_n \in H$ из (3) и (18) получаем

$$((\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} x_n, x_n) = ((\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} x_n, x_n) + \| P (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1/2} x_n \|^2. \tag{19}$$

Полагая

$$f_n \doteq (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} x_n, \quad g_n \doteq (\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} x_n, \quad \varphi_n = (\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \gamma^*(-\varepsilon) x_n, \tag{20}$$

перепишем равенство (19) в виде

$$\|(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{1/2} (f_n - f_m)\|^2 = \|(\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{1/2} (g_n - g_m)\|^2 + \| P (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{1/2} (f_n - f_m)\|. \tag{21}$$

Пусть $f \in D[\widetilde{A}_\theta]$ и последовательность $f_n = (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} x_n \in D(\widetilde{A}_\theta)$ сходится к f по $\widetilde{A}_\theta$-метрике. Тогда, как следует из (21), последовательность $g_n = (\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} x_n$ фундаментальна по $\widetilde{A}_F$-метрике, а значит, $\exists\, g \in D[A] = D[\widetilde{A}_F]$ такое, что

$$\lim_{n \to \infty} \|(\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{1/2} (g - g_n)\| = 0.$$

Так как $f_n = g_n + \gamma(-\varepsilon)\varphi_n$, то $f = g + \gamma(-\varepsilon)\varphi$, где $g \in D[A_F] = D[A]$, $\gamma(-\varepsilon)\varphi \in \mathfrak{N}_{-\varepsilon}$. Разложение (17) доказано. Осталось заметить, что сумма в (17) прямая, ибо подпространства $D[A] = D[\widetilde{A}_F]$ и $D[\widetilde{A}_\theta] \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon}$ являются $(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)$-ортогональными.

Покажем теперь, что

$$D[\widetilde{A}_\theta] \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} = \gamma(-\varepsilon) D[\theta]. \tag{22}$$

Из (18) и следствия 2 получаем

$$D[\widetilde{A}_\theta] \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} = D[\widetilde{A}_\theta + \varepsilon] \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} = D((\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} =$$

$$= \mathfrak{R}((\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} = \mathfrak{R}([(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1}]_{\mathfrak{N}_{-\varepsilon}})^{1/2} =$$

$$= \mathfrak{R}(\gamma(-\varepsilon)(\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \gamma^*(-\varepsilon))^{1/2}. \tag{23}$$

С другой стороны, в силу леммы 2

$$\Re(\gamma(-\varepsilon)(\theta-M(-\varepsilon))^{-1}\gamma^*(-\varepsilon))^{1/2}=\gamma(-\varepsilon)\Re(\theta-M(-\varepsilon))^{-1/2}=$$

$$=\gamma(-\varepsilon)\{D(\theta-M(-\varepsilon))^{1/2}\}=\gamma(-\varepsilon)D[\theta-M(-\varepsilon)]=\gamma(-\varepsilon)D[\theta]. \quad (24)$$

Сопоставление равенств (23) и (24) ведет к соотношению (22). Равенство (14) следует теперь из (17) и (22).

Далее из (3) и (20) вытекают равенства $f_n=g_n+\gamma(-\varepsilon)\varphi_n$ и

$$((\widetilde{A}_\theta+\varepsilon)f_n, f_n)=((\widetilde{A}_F+\varepsilon)g_n, g_n)+((\theta-M(-\varepsilon))\varphi_n, \varphi_n), \quad (25)$$

причем второе из них эквивалентно каждому из равенств (19) и (21). Следовательно, сходимость при $n\to\infty$ левой части в (25) эквивалентна сходимости каждого из двух слагаемых в правой части, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}((\widetilde{A}_\theta+\varepsilon)f_n, f_n)=\widetilde{A}_\theta[f]+\varepsilon\|f\|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}((\widetilde{A}_F+\varepsilon)g_n, g_n)=\widetilde{A}_F[g]+\varepsilon\|g\|^2,\\ \lim\limits_{n\to\infty}((\theta-M(-\varepsilon))\varphi_n, \varphi_n)=\theta[\varphi]-(M(-\varepsilon)\varphi, \varphi).\end{cases}$$

Поэтому соотношение (15) получается замыканием равенства (25) по $\widetilde{A}_\theta$-метрике.

2. Рассмотрим теперь расширение $\widetilde{A}_\theta\in S_{-\varepsilon_0}(\varphi)$ при $\varepsilon_0\geqslant 0$, $\varphi\in(0, \pi/2)$. Пусть $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_{\widetilde{A}_\theta}$ — замыкание формы $(\widetilde{A}_\theta f, f)$, $\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}}$ — ее реальная часть (замкнутая одновременно с $\mathfrak{t}$), $S\doteq\mathrm{Re}\,\widetilde{A}_\theta=S^*$ — оператор, ассоциированный с формой $\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}}$ согласно 1-й теореме о представлении [10, с. 404]. Так как $\forall f\in D(A)$ $\mathrm{Re}(\widetilde{A}_\theta f, f)=(Af, f)$, то $S\supset A$, а значит, $S=\widetilde{A}_{\theta_1}$, где $\theta_1=\theta_1^*\in\in\mathscr{C}(\mathscr{H})$. При $\varepsilon>\varepsilon_0$ по формуле (15) имеем

$$\widetilde{A}_{\theta_1}[f, f]+\varepsilon\|f\|^2=A[g, g]+\varepsilon\|g\|^2+\theta_1[\varphi, \varphi]-(M(-\varepsilon)\varphi, \varphi), \quad (26)$$

где $f=g+\gamma(-\varepsilon)\varphi\in D(\widetilde{A}_\theta)$, $g\in D[A]$, $\varphi\in[\mathscr{H}]$. С другой стороны, из формулы (3) получаем $\forall f\in D(\widetilde{A}_\theta)$:

$$\mathrm{Re}(\widetilde{A}_\theta f, f)+\varepsilon\|f\|^2=(\widetilde{A}_F g, g)+\varepsilon\|g\|^2+\mathrm{Re}((\theta-M(-\varepsilon))\varphi, \varphi). \quad (27)$$

Сопоставляя (26) и (27), получаем равенство $\theta_1=\mathrm{Re}\,\theta$, доказывающее соотношение (16).

Докажем равенства (14), (15). Так как $D[\widetilde{A}_\theta]=D[S]$ (хотя $D(\widetilde{A}_\theta)\neq\neq D(S)$) и $D[\theta]=D[\theta_1]$, то соотношение (14) для оператора $\widetilde{A}_\theta\in S_{-\varepsilon_0}(\varphi)$ вытекает из аналогичного соотношения для оператора $\widetilde{A}_{\theta_1}=\widetilde{A}_{\theta_1}^*$, уже доказанного ранее, и равенства (16). Соотношение (15) вытекает из (25)—(27). Теорема доказана.

Следствие 3 [1]. *Пусть* $\widetilde{A}f=\int\limits_0^\infty\lambda dE(\lambda)f$ — *спектральное разложение неотрицательного расширения* $\widetilde{A}$ *оператора* $A\geqslant 0$. *Тогда* $\forall\varepsilon>0$ *верна эквивалентность*

$$\widetilde{A}=\widetilde{A}_F\Leftrightarrow\int\limits_0^\infty\lambda d(E(\lambda)\varphi, \varphi)=\infty\qquad\forall\varphi\in\mathfrak{N}_{-\varepsilon}\diagdown\{0\}. \quad (28)$$

Доказательство. Установим вначале импликацию

$$\int_0^\infty \lambda d(E(\lambda)\varphi, \varphi) = \infty \Rightarrow \widetilde{A} = \widetilde{A}_F. \qquad (28')$$

Пусть $\{\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_F$. В этом ПГЗ $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta$ при некотором $\theta = \theta^* \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$. Расходимость $\forall \varphi \in \mathfrak{N}_{-\varepsilon}\setminus\{0\}$ интеграла в (28) означает равенство $D[\widetilde{A}_\theta] \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} = D(A_\theta^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-\varepsilon} = \{0\}$, эквивалентное, согласно (22) равенству $D[\theta] = \{0\}$. Таким образом, $\theta = \theta_2 = \{(0, \psi) : \psi \in \mathscr{H}\}$ — «чистое» отношение (см. (1)), т. е. его операторная часть нулевая. Но тогда $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_F$.

Обратная к (28′) импликация элементарна и вытекает из равенства $D[\widetilde{A}_F] = D[A]$ и ортогональности подпространств $\mathfrak{M}_{-\varepsilon}$ и $\mathfrak{N}_{-\varepsilon}$.

Следствие 4 [1, с. 454]. *Для того чтобы оператор $A \geqslant 0$ имел только одно неотрицательное расширение $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $a > 0$*

$$\sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Af, f)} = \infty \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{N}_{-a}\setminus\{0\}. \qquad (29)$$

Доказательство. Покажем вначале, что соотношение (29) выполнено при замене в нем A на $\widetilde{A}_F$. Действительно, пусть при некотором $\varphi_1 \in \mathfrak{N}_{-a}$

$$C(\varphi_1) \doteq \sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, \varphi_1)|^2}{(Af, f)} = \sup_{f \in D(A)} \frac{|(Af, \varphi_1)|^2}{a^2(Af, f)} = \sup_{f \in D(\widetilde{A}_F)} \frac{(|\widetilde{A}_F f, \varphi_1)|^2}{a^2(\widetilde{A}_F f, f)} < \infty. \qquad (30)$$

Полагая $\widetilde{A}_F^{1/2} f = g$, переписываем (30) в виде

$$\sup_{g \in D(\widetilde{A}_F^{1/2})} |(\widetilde{A}_F^{1/2} g, \varphi_1)| \leqslant C(\varphi_1) \| g \|. \qquad (31)$$

Из (31) в силу теоремы Риса заключаем, что $(0 \neq)\, \varphi_1 \in D(\widetilde{A}_F^{1/2})$, что противоречит равенству $D[\widetilde{A}_F] \cap \mathfrak{N}_{-a} = \{0\}$.

Обратно, если $\exists\, \widetilde{A} = \widetilde{A}^* \geqslant 0$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}_F$, то в силу (17) $\exists\, \varphi_1 \in \mathfrak{N}_{-a} \cap D[\widetilde{A}]$. Тогда

$$C(\varphi_1) = \sup_{f \in D(A)} \frac{|(Af, \varphi_1)|^2}{a^2(Af, f)} = \sup_{f \in D(A)} \frac{|(\widetilde{A}f, \varphi_1)|^2}{a^2(\widetilde{A}f, f)} =$$

$$= \sup_{f \in D(A)} \frac{|(\widetilde{A}^{1/2} f, \widetilde{A}^{1/2}\varphi_1)|^2}{a^2 \|\widetilde{A}^{1/2} f\|^2} \leqslant \frac{\|\widetilde{A}^{1/2}\varphi_1\|^2}{a^2}.$$

Следствие доказано.

Следствие 5. *Пусть $A \geqslant 0$ и спектр оператора $\widetilde{A}_F$ дискретен. Тогда: 1) крейновское расширение $\widetilde{A}_K$ определяется равенством $D(\widetilde{A}_K) = D(\widetilde{A}) + \mathfrak{N}_0$, 2) $D[\widetilde{A}_K] = D[A] + \mathfrak{N}_0$; 3) спектр расширения $\widetilde{A}_K$, рассматриваемого в $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0^\perp$, дискретен.*

Доказательство. Достаточно считать оператор A простым. В таком случае $\hat{\rho}(A) = \mathbb{C}$, ибо $\sigma(\widetilde{A}_F)$ дискретен. Определим расширение $\widetilde{A}'$

равенством $D(\widetilde{A}') = D(A) \dotplus \mathfrak{N}_0$. Легко видеть, что $\widetilde{A}'$ замкнут и симметричен. Покажем, что $\mathfrak{R}(\widetilde{A}' - z) = H \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Действительно, если $((\widetilde{A}' - z) f, g) = 0$ при некотором $g \in H$, то $g \in \mathfrak{N}_{\bar{z}}$ и $g \perp \mathfrak{N}_0$. Последнее, однако, невозможно, если z достаточно мало, ибо в этом случае раствор между подпространствами $\mathfrak{N}_z$ и $\mathfrak{N}_0$ меньше единицы. Итак, $\mathfrak{R}(\widetilde{A} - z) = H$ и $\widetilde{A}'$ самосопряжен.

Поэтому совпадение $\widetilde{A}' = \widetilde{A}_K$ вытекает либо из очевидного неравенства $(\widetilde{A}' + \varepsilon)^{-1} - (\widetilde{A} + \varepsilon)^{-1} > 0$, выполненного для каждого расширения $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \geqslant 0$ и $\forall \varepsilon > 0$, либо из формул (14), (15). Равенство $D[\widetilde{A}_K] = D[A] \dotplus \mathfrak{N}_0$ теперь очевидно.

Далее, воспользуемся вытекающим из (3) равенством

$$P_{\mathfrak{M}_0}(\widetilde{A}_K + \varepsilon)^{-1} = P_{\mathfrak{M}_0}(\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} + P_{\mathfrak{M}_0}\gamma(-\varepsilon)(M(0) - M(-\varepsilon))^{-1}\gamma^*(-\varepsilon), \tag{32}$$

в котором $P_{\mathfrak{M}_0}$ — ортопроектор на $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0^{\perp}$. Полагая

$$S_F \doteq \widetilde{A} \restriction_{\mathfrak{M}_0'}, \quad \mathfrak{M}_0' = H \ominus \ker \widetilde{A}_F \supset \mathfrak{M}_0 \quad (\dim \ker \widetilde{A}_F < \infty) \tag{33}$$

и переходя в (32) к пределу при $\varepsilon \to 0$, придем с учетом (33) к соотношению

$$(\widetilde{A}_K \restriction_{\mathfrak{M}_0})^{-1} = P_{\mathfrak{M}_0}((S_F^{-1}) \restriction_{\mathfrak{M}_0}), \tag{34}$$

которое доказывает последнее утверждение следствия.

Замечание 2. Пусть A положительно определен, т. е. $m(A) > 0$ $(\Leftrightarrow 0 \in \rho(\widetilde{A}_F))$. Если ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ выбрано так, что $\mathcal{H} = \mathfrak{N}_0$, $\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_F$, $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_K$ $(\Leftrightarrow D(\widetilde{A}_1) = D(A) \dotplus \mathfrak{N}_0)$, то $M(0) = 0$, $\gamma(0) = I_{\mathcal{H}}$, $\theta^{-1} = \widetilde{A}_\theta^{-1} - \widetilde{A}_F^{-1}$, а соотношения (14), (15) приобретают вид

$$D[\widetilde{A}_\theta] = D[A] \dotplus D[\theta], \quad \widetilde{A}_\theta[f, f] = A[g, g] + \theta[\varphi, \varphi]. \tag{35}$$

В случае $\widetilde{A}_\theta = \widetilde{A}_\theta^*$ равенства (35) другим методом получены в [2], а формула (17) и равенство $\widetilde{A}_\theta[f] = A[g, g] + \widetilde{A}_\theta[\varphi, \varphi]$ — в [1].

Замечание 3. Если $M(0) \in [\mathcal{H}]$, то $\gamma(-\varepsilon) D[M(0)] = \gamma(-\varepsilon)\mathcal{H} = \mathfrak{N}_{-\varepsilon}$. Поэтому так же, как в случае $m(A) > 0$ [1],

$$D[\widetilde{A}_K] = D[A] \dotplus \mathfrak{N}_{-\varepsilon} \supset D[\widetilde{A}_\theta] = D[A] \dotplus \gamma(-\varepsilon)(\mathcal{H} \cap D[\theta]) \tag{36}$$

и, в частности, $D[\widetilde{A}_K] \supset D(A^*)$. Если же $M(0) \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H}) \setminus [\mathcal{H}]$ (т. е. $M(0)$ — либо неограниченный оператор, либо линейное отношение с операторной частью $M_1(0) \neq M(0)$), то для некоторых полуограниченных расширений $\widetilde{A}_\theta$ включение (36) нарушается. Например, для $\widetilde{A}_{-\varepsilon}$ $(D(\widetilde{A}_{-\varepsilon}) = D(A) \dotplus \mathfrak{N}_{-\varepsilon})$, $m(\widetilde{A}_{-\varepsilon}) = -\varepsilon$, но $D[\widetilde{A}_\theta] \not\subset D[\widetilde{A}_K]$ и, следовательно, $D[\widetilde{A}_K] \not\supset D(A^*)$.

Таким образом, верна эквивалентность: $D[\widetilde{A}_K] \supset D(A^*) \Leftrightarrow$ расширения $\widetilde{A}_K$ и $\widetilde{A}_F$ трансверсальны.

Это обстоятельство не противоречит экстремальности расширения $\widetilde{A}_K$: для каждого $\widetilde{A}_\theta = \widetilde{A}_\theta^* \geqslant 0$ по-прежнему

$$D[\widetilde{A}_\theta] \subset D[\widetilde{A}_K] \ (\Leftrightarrow D[\theta] \subset D[M(0)]) \text{ и } A_K[f, f] \leqslant \widetilde{A}_\theta[f, f] \ \forall f \in D[\widetilde{A}_\theta].$$

Отметим в заключение, что некомпактность (даже при $m(A)=0$) резольвенты оператора $\hat{A}_K$ — следствие следующего утверждения: два трансверсальных расширения не могут одновременно иметь дискретный спектр.

3. Расширения классов $S_\beta(\varphi; \varkappa)$ и $S_\beta(\varphi; \mathfrak{S})$.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{S}$ — идеал в $[H]$, $\varphi\in(0,\pi/2)$, $\beta=\bar{\beta}$, $T\in\in\mathscr{C}(H)$ и квадратичные формы $\tilde{\mathfrak{t}}^\pm[f]=\operatorname{Re}(Tf,f)\pm i\operatorname{ctg}\varphi\cdot\operatorname{Im}(Tf,f)$ полуограничены снизу. Будем писать: а) $T\in S_\beta(\varphi; k)$, если $\rho(T)\neq\varnothing$ и формы $\tilde{\mathfrak{t}}^\pm-\beta$ имеют точно $k\in\mathbb{Z}_+$ отрицательных квадратов; б) $T\in\in S_\beta(\varphi;\mathfrak{S})$, если $\rho(T)\neq\varnothing$ и $E_{T^\pm}(-\infty,\beta)T^\pm\in\mathfrak{S}$, где $T^\pm$ — операторы, ассоциированные с замыканием $\mathfrak{t}^\pm$ форм $\tilde{\mathfrak{t}}^\pm$ (которые при $\varphi=\pi/2$ предполагаются замыкаемыми).*

При $\varphi=0$ полагаем $T=T^*\in S_\beta(0;k)$, если $\dim E_T(-\infty,\beta)H=k$, и $T\in S_\beta(0;\mathfrak{S})$, если $TE_T(-\infty,\beta)\in\mathfrak{S}$.

Отношение $\theta\in\tilde{\mathscr{C}}(H)$ будем относить к классу $\tilde{S}_\beta(\varphi;k)(S_\beta(\varphi;\mathfrak{S}))$, если его операторная часть $T\in S_\beta(\varphi;k)$ $(\in S_\beta(\varphi;\mathfrak{S}))$. Поясним, что $S_\beta(\varphi;0)=S_\beta(\varphi)$ — класс m-секториальных операторов.

Для доказательства теорем 2 и 3 нам понадобятся две элементарные леммы, в которых через $\varkappa_-(\mathfrak{t})$ обозначено число отрицательных квадратов формы $\mathfrak{t}$, т. е. максимальная размерность отрицательных линеалов L_- ($f\in L_-\Leftrightarrow f\in D(\mathfrak{t})\setminus\{0\}$, $\mathfrak{t}[f]<0$). Для оператора определим $\varkappa_-(T)$ равенством $\varkappa_-(T)=\dim E_T(0)H$. Если форма $\mathfrak{t}$ замкнута и оператор T ассоциирован с ней, то в силу принципа мини-макса $\varkappa_-(\mathfrak{t})=\varkappa_-(T)$.

Лемма 3. *Пусть монотонно убывающая последовательность симметричных полуограниченных сверху форм $\mathfrak{t}_n$ сходится к форме $\mathfrak{t}$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{t}_n[f]=\mathfrak{t}[f]$ $\forall f\in D(\mathfrak{t})=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D(\mathfrak{t}_n)$). Тогда $\varkappa_-(\mathfrak{t})=\varkappa_-(\mathfrak{t}_n)$ при достаточно больших n. Если формы $\mathfrak{t}_n$ замкнуты и $T_n=T_n^*$ — ассоциированные с ними операторы, то $\varkappa_-(\mathfrak{t})=\varkappa_-(T_n)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{t}[f]<0$, то $\exists N:\mathfrak{t}_n[f]<0$ $\forall n\geqslant N$ и, значит, $\varkappa_-(\mathfrak{t}_n)\geqslant\varkappa_-(\mathfrak{t})$. Обратное неравенство — следствие импликации: $\mathfrak{t}_n>\mathfrak{t}\Rightarrow\varkappa_-(\mathfrak{t}_n)\leqslant\varkappa_-(\mathfrak{t})$.

Лемма 4. *Пусть $T=T^*(\in[H])$ — оператор, имеющий блочно-матричное представление*

$$T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix},\quad T_{21}=T_{12}^*$$

относительно ортогонального разложения $H=H_1\oplus H_2$ пространства H, $T_{ij}\in[H_j,H_i]$ $(i,j=1,2)$. Если $T\geqslant 0$, то: 1) $\mathfrak{t}(T_{11}^{1/2})\supset\mathfrak{t}(T_{12})$ и оператор $S\doteq T_{11}^{-1/2}T_{12}$ определен корректно и ограничен; 2) если T не является положительным, то $\varkappa_-(T)=\varkappa_-(T_{22}-S^*S)$.

Доказательство. Утверждение 1 известно. Второе утверждение докажем вначале при дополнительном условии $0\in\rho(T_{11})$. В этом случае доказательство аналогично доказательству критерия Сильвестра и вытекает из тождества

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -T_{21}T_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -T_{11}^{-1}T_{12}\\ 0 & I\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}T_{11} & 0\\ 0 & T_{22}-T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}\end{pmatrix}.$$

Переходя к общему случаю, рассмотрим оператор $T+\varepsilon I$. Если $\varkappa_-(T)<<\infty$, то $\varkappa_-(T)=\varkappa_-(T+\varepsilon I)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$. Так как $0\in\in\rho(T+\varepsilon I)$, то $\varkappa_-(T+\varepsilon I)=\varkappa_-(T_{22}+\varepsilon-T_{21}(T_{11}+\varepsilon)^{-1}T_{12})$. Осталось заметить, что $s-\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}T_{21}(T_{11}+\varepsilon)^{-1}T_{12}=S^*S$ и

$$\varkappa_-(T_{22}-S^*S)=\varkappa_-(T_{22}+\varepsilon-T_{21}(T_{11}+\varepsilon)^{-1}T_{12}),\tag{37}$$

причем равенство (37) — следствие монотонного убывания семейства $T_{22} + \varepsilon - T_{21}(T_{11} + \varepsilon)^{-1} T_{12}$ и леммы 3.

Теорема 2. *Пусть $A \geqslant 0$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_F$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ и $\theta \in \widetilde{S}_a(\varphi)$ при некоторых $a < 0$ и $\varphi \in [0, \pi/2]$. Тогда*

1) *если $(-\varepsilon_0, 0) \in \rho(\widetilde{A}_\theta)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $D[\theta] \subset D[M(0)]$, то верна эквивалентность*

$$\widetilde{A}_\theta \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow \varkappa_-(\mathfrak{k}^{\pm} - \mathfrak{k}_{M(0)}) = k; \tag{38}$$

2) *если, к тому же, форма $\mathfrak{k}_\theta - \mathfrak{k}_{M(0)}$ замыкаема и $T(0)$ — ассоциированный с нею m-секториальный оператор, то существует*

$$s - R - \lim_{x \uparrow 0} (\theta - M(x)) = T(0) \tag{39}$$

и верна эквивалентность

$$\widetilde{A}_\theta \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow T(0) \in \widetilde{S}_0(\varphi; k), \tag{40}$$

в которой $T(0) = \theta - M(0)$, если $M(0) \in [\mathcal{H}]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Введя операторы

$$\widetilde{A}_{\theta_\pm} = \left(\frac{(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} + (\widetilde{A}_\theta^* + \varepsilon)^{-1}}{2} \pm \operatorname{ctg}\varphi \, \frac{(\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} - (\widetilde{A}_\theta^* + \varepsilon)^{-1}}{2i} \right)^{-1} - \varepsilon I \supset A \tag{41}$$

(ср. формулы (7) — (9)), также, как и при доказательстве предложения 1, сведем доказательство к случаю самосопряженных операторов $\widetilde{A}_{\theta_\pm}$. Покажем, что $\forall \theta_1 = \theta_1^* \in \widetilde{\mathscr{C}}(H)$ $(\Leftrightarrow \widetilde{A}_{\theta_1} = \widetilde{A}_{\theta_1}^* \supset A)$

$$\varkappa_-((\widetilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1}) = \varkappa_-((\widetilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1}) - (\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}). \tag{42}$$

Операторы $(\widetilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1}$ и $(\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}$, являясь самосопряженными расширениями ограниченного неотрицательного оператора $(A + \varepsilon)^{-1} \in [\mathfrak{M}_{-\varepsilon}, H]$, имеют относительно разложения $H = \mathfrak{M}_{-\varepsilon} \oplus \mathfrak{N}_{-\varepsilon}$ следующие блочно-матричные представления

$$(\widetilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & S^*S \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Здесь в (43) $S = T_{11}^{-1/2} T_{12}$, а выражение для $(\widetilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}$ следует из критерия Сильвестра и экстремального свойства (6) расширения $\widetilde{A}_F$ (ср. [14]). Равенство (42) вытекает теперь из (43) и леммы 4.

Далее, из формул (3) и (41) получаем эквивалентности

$$\widetilde{A}_\theta \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow (\widetilde{A}_\theta + \varepsilon)^{-1} \in S_0(\varphi; k) \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow \varkappa_-[\operatorname{Re}(\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \pm$$
$$\pm \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{Im}(\theta - M(-\varepsilon))^{-1}] = k \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow (\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \in S_0(\varphi; k)$$
$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow \theta - M(-\varepsilon) \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{44}$$

В силу условия $D[\theta] \subset D[M(0)]$ и леммы 4

$$\theta - M(-\varepsilon) \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow \varkappa_-(\mathfrak{k}_{\mathrm{Re}\,\theta} \pm \operatorname{ctg}\varphi \cdot \mathfrak{k}_{\mathrm{Im}\,\theta} - \mathfrak{k}_{M(0)}) = k \tag{45}$$

Искомую эквивалентность (38) получаем теперь из (44) и (45).

Для доказательства второго утверждения положим $\mathfrak{k}_\varepsilon[f] = \theta[f] - (M(-\varepsilon)f, f)$, $\mathfrak{k}[f] = \theta[f] - M(0)[f]$, $\mathfrak{k}_\varepsilon' = \mathfrak{k}_\varepsilon - \mathfrak{k}$ и заметим, что

1) $D(\mathfrak{t}_\varepsilon) = D[\theta - M(-\varepsilon)] = D[\theta] \subset D[M(0)] = D(\mathfrak{t})$;

2) $0 = |\operatorname{Im} \mathfrak{t}_\varepsilon' [f]| \leqslant \delta \operatorname{Re} \mathfrak{t}_\varepsilon' [f] = \delta (M(0)[f] - (M(-\varepsilon) f, f)) \quad \forall \delta > 0$, $\forall f \in D(\mathfrak{t})$, т. е. формы $\mathfrak{t}_\varepsilon'$ равномерно секториальны со сколь угодно малым углом;

3) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \mathfrak{t}_\varepsilon [f] = \mathfrak{t}[f] \quad \forall f \in D(\mathfrak{t}) = D[M(0)]$.

Поэтому в силу теоремы о сходимости секториальных форм «сверху» [10, с. 563] выполнено (39). Теперь соотношение (40) следует из (38). Теорема доказана.

Следствие 6. *Если в условиях теоремы 2* $(-\varepsilon_0, \beta) \in \rho(\tilde{A}_\theta)$ *при некоторых* $-\varepsilon_0 < \beta < 0$, *то верна эквивалентность*

$$\tilde{A}_\theta \in S_\beta(\varphi; k) \Leftrightarrow \theta - M(\beta) \in \tilde{S}_0(\varphi; k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \tag{40'}$$

Доказательство вытекает из теоремы 2, если заметить, что совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ образует ПГЗ также и для оператора $A' \doteq A - \beta$, а функции Вейля $M(z)$ и $M'(z)$, соответствующие операторам A и A', связаны равенством $M'(z) = M(z - \beta)$.

Замечание 4. В самосопряженном случае $(\varphi = 0)$ теорема 2 и следствие 6 доказаны в [4—7] более сложным методом. При $M(0) = 0$ эквивалентности (38), (40) принимают вид $\tilde{A}_\theta \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow \theta \in \tilde{S}_0(\varphi; k)$. Так, например, будет, если $m(A) > 0$, а ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ таково, что $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_K$. В последнем случае при $\varphi = 0$ эквивалентность $\tilde{A}_\theta \in S_0(0; k) \Leftrightarrow \theta \in \tilde{S}_0(0; k)$ другим методом установлена в [2] (см. также [15]).

Обозначим через $\nu(r; T)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ функцию распределения s-чисел $s_n(T)$ оператора $T \in \mathfrak{S}_\infty$, т. е.

$$\nu(r; T) = \operatorname{card}\left\{n;\ \frac{1}{s_n(T)} \leqslant r\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $A \geqslant 0$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ, для которого* $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$, $M(z)$ — *соответствующая функция Вейля,* $\theta = \theta^* \in \mathscr{C}(\mathcal{H})$. *Пусть, кроме того,*

$$\tilde{A}_\theta(\beta) \doteq (\tilde{A} - \beta) E_{\tilde{A}_\theta}(-\infty, \beta), \quad \theta(\beta) \doteq (\theta - M(\beta)) E_{\theta - M(\beta)}(-\infty, 0). \tag{46}$$

Тогда при $\beta < 0$ *верны эквивалентности:*

1) $\theta - M(\beta) \in \tilde{S}_0(0; \mathfrak{S}_p) (\Leftrightarrow \theta(\beta) \in \mathfrak{S}_p) \Leftrightarrow \tilde{A}_\theta \in S_\beta(0; \mathfrak{S}_p) \quad (\Leftrightarrow \tilde{A}_\theta(\beta) \in \mathfrak{S}_p)$;

2) $s_n(\theta(\beta)) \sim a_1 n^{-p} \Leftrightarrow s_n(\tilde{A}_\theta(\beta)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty)$, *причем либо* $a_1 a_2 \neq 0$, *либо* $a_1 = a_2 = 0$. *Если, к тому же,* $M(0) \in [\mathcal{H}]$, *то верны импликации*

3) $\theta - M(0) \in \tilde{S}_0(0; \mathfrak{S}_p) \Rightarrow \tilde{A}_\theta \in S_0(0; \mathfrak{S}_p) \quad (\Leftrightarrow \tilde{A}_\theta(0) \in \mathfrak{S}_p)$;

4) $s_n(\theta(0)) \sim a_1 n^{-p} \Rightarrow s_n(\tilde{A}_\theta(0)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty)$.

Доказательство 1. Если $\tilde{A}_\theta \in S_\beta(0; \mathfrak{S}_p)$ или $\theta - M(\beta) \in \tilde{S}_0(0; \mathfrak{S}_p)$, то, как видно из (3), оператор $\tilde{A}_\theta$ полуограничен снизу: $m(\tilde{A}_\theta) = \alpha > -\infty$. Воспользуемся известным [4—7] тождеством для функции Вейля

$$M(\beta) - M(\beta - \varepsilon) = \varepsilon \gamma^*(\beta) \gamma(\beta - \varepsilon) = \varepsilon \gamma^*(\beta) [I - \varepsilon (\tilde{A}_2 - \beta + \varepsilon)^{-1}] \gamma(\beta). \tag{47}$$

Из (47) вытекают $\forall \varepsilon \in (0, -\alpha)$ неравенства

$$M(\beta - \varepsilon) + C_1 \varepsilon I_{\mathcal{H}} \leqslant M(\beta) \leqslant M(\beta - \varepsilon) + C_2 \varepsilon I_{\mathcal{H}}, \tag{48}$$

в которых $C_1 = \|\gamma(\beta)\|^2$, $C_2 = \left|\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right|\cdot\|\gamma(\beta)\|^2$. Заметим, что правое неравенство в (48) имеет место $\forall\varepsilon\in(0,\infty)$. Далее, так как $\theta - M(\beta) < \theta - M(\beta-\varepsilon) - C_1\varepsilon$, то отрицательные собственные числа операторов $\theta - M(\beta)$ и $\theta - M(\beta-\varepsilon)$, упорядоченные по возрастанию, удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_j(\theta - M(\beta)) \leqslant \lambda_j(\theta - M(\beta-\varepsilon)) - C_1\varepsilon \quad \forall j \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом следствия 6 (при $\varphi = 0$) получаем

$$\dim E_{\theta-M(\beta)}(-\infty, -C_1\varepsilon) \geqslant \dim E_{\theta-M(\beta-\varepsilon)}(-\infty, 0) = \\ = \dim E_{\widetilde{A}_\theta}(-\infty, \beta-\varepsilon). \tag{49}$$

Так как

$$\dim E_{\theta-M(\beta)}(-\infty, -C_1\varepsilon) = \operatorname{card}\{k;\ s_k(\theta(\beta)) \geqslant C_1\varepsilon\} = \nu\left(\frac{1}{C_1\varepsilon};\ \theta(\beta)\right),$$

$$\dim E_{\widetilde{A}_\theta}(-\infty, \beta-\varepsilon) = \operatorname{card}\{k;\ s_k(\widetilde{A}_\theta(\beta)) \geqslant \varepsilon\} = \nu\left(\frac{1}{\varepsilon};\ \widetilde{A}_\theta(\beta)\right), \tag{50}$$

то неравенство (49) эквивалентно следующему:

$$\nu\left(\frac{r}{C_1};\ \theta(\beta)\right) \geqslant \nu(r;\ \widetilde{A}_\theta(\beta)). \tag{51}$$

Отправляясь от второго из неравенств (48), придем к импликации

$$\theta - M(\beta-\varepsilon) - C_2\varepsilon \leqslant \theta - M(\beta) \Rightarrow \lambda_j(\theta - M(\beta-\varepsilon)) - C_2\varepsilon \leqslant \lambda_j(\theta - M(\beta))$$

и, далее, к неравенству

$$\dim E_{\widetilde{A}_\theta}(-\infty, \beta-\varepsilon) = \dim E_{\theta-M(\beta-\varepsilon)}(-\infty, 0) \geqslant \\ \geqslant \dim E_{\theta-M(\beta)}(-\infty, -C_2\varepsilon), \tag{52}$$

которое с учетом равенств (50) перепишем так:

$$\nu(r;\ \widetilde{A}_\theta(\beta)) \geqslant \nu\left(\frac{r}{C_2};\ \theta(\beta)\right). \tag{53}$$

Объединим неравенства (49) — (53) с учетом обозначения $N(\lambda; T) = \nu\left(\frac{1}{\lambda};\ T\right)$:

$$N(C_2\lambda;\ \theta(\beta)) \leqslant N(\lambda;\ \widetilde{A}_\theta(\beta)) \leqslant N(C_1\lambda;\ \theta(\beta)). \tag{54}$$

Из (54) и очевидного равенства

$$\|T\|^p_{\mathfrak{S}_p} = -\int_0^\infty \lambda^p dN(\lambda;\ T) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}N(\lambda;\ T)\,d\lambda$$

вытекает оценка

$$C_2^{-1}\|\theta(\beta)\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant \|\widetilde{A}_\theta(\beta)\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant C_1^{-1}\|\theta(\beta)\|_{\mathfrak{S}_p}, \tag{55}$$

а с нею — первое утверждение теоремы.

Далее, из (54), очевидно вытекает, что пределы (верхние)

$$a_1 \doteq \varlimsup_{\lambda\to 0}\lambda^{1/p}N(\lambda;\ \theta(\beta)), \quad a_2 \doteq \varlimsup_{\lambda\to 0}\lambda^{1/p}N(\lambda;\ \widetilde{A}_\theta(\beta)) \tag{56}$$

связаны неравенствами $a_1C_2^{-1/p} \leqslant a_2 \leqslant a_1C_1^{-1/p}$ и, значит, конечны (и отличны от нуля) лишь одновременно.

Так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^p \lambda_n(\theta(\beta)) = a_1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^p \lambda_n(\widetilde{A}_\theta(\beta)) = a_2, \tag{57}$$

то второе утверждение теоремы вытекает из (56), (57).

2. Для доказательства остальных утверждений воспользуемся интегральным представлением оператор-функции $M(z) \in (R)_{\mathscr{H}}$:

$$M(z) = C_0 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\Sigma(t), \quad \int_0^\infty \frac{d\Sigma(t)}{1+t^2} \in [\mathscr{H}], \tag{58}$$

в котором $C_0 = C_0^*$, $\Sigma(t) = \Sigma(t-0)$ — неубывающая оператор-функция и $\operatorname{supp}\Sigma(t) \subset (0, \infty)$, ибо $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_F \geqslant 0$. Из эквивалентности

$$M(0) \in [\mathscr{H}] \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{d\Sigma(t)}{t} \in [\mathscr{H}] \tag{59}$$

вытекают соотношения

$$M(0) = \int_0^\infty \frac{d\Sigma(t)}{t(1+t^2)}, \quad M(0) - M(-\varepsilon) = \varepsilon \int_0^\infty \frac{d\Sigma(t)}{t(t+\varepsilon)} \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon \int_0^\infty \frac{d\Sigma(t)}{(t+\alpha)^2} = \varepsilon C_1 I_{\mathscr{H}}. \tag{60}$$

Таким образом, $M(0) \geqslant M(-\varepsilon) + C_1 \varepsilon I_{\mathscr{H}}$, т. е. левое из неравенств (48) получено и при $\beta = 0$. Теперь импликации 3 и 4 доказываются так же, как соответствующие импликации при $\beta < 0$. Теорема доказана.

Замечание 5. При дополнительном (более сильном, чем (59)) условии $\int_0^\infty \frac{d\Sigma(t)}{t^2} \in [\mathscr{H}]$ справедливо неравенство $M(0) \leqslant M(-\varepsilon) + C_2\varepsilon$. Таким образом, в этом случае двустороннее неравенство (48) выполнено при $\beta = 0$, а следовательно, эквивалентности 1 и 2 сохраняют силу также и при $\beta = 0$. По-видимому, последнее утверждение верно лишь при условии (59) (ср. с теоремой 2 из [16]).

Замечание 6. В утверждениях 1 и 3 теоремы 3 идеалы $\mathfrak{S}_p$ можно заменить некоторыми другими симметрично нормированными идеалами, например, идеалами $\mathfrak{S}_\Pi^0$, $\mathfrak{S}_\Pi$, $\mathfrak{S}_\pi$ (их определение см. в [17], гл. 3). Здесь $\Pi = \{\pi_k\}_1^\infty$ — произвольная бинормирующая последовательность. Для идеала $\mathfrak{S}_\pi$ это вытекает из неравенств (54) и равенства [17, с. 165]

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_\pi} = \sum_{k=1}^\infty \pi_k s_k(T) = \int_0^\infty \sigma(\nu(r;\, T)) \frac{dr}{r^2},$$

в котором $\sigma(t) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j$ $(k \leqslant t \leqslant k+1)$.

Теорема 3 легко распространяется на классы $S_\beta(\varphi;\, k)$ при $\varphi \neq 0$ [8].

4. Расширения оператора с лакунами.

Определение 4. *Говорят, что эрмитов оператор A имеет лакуну (спектральный люк)* (α, β) $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$, *если*

$$\left\| \left(A - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) f \right\| \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2} \|f\| \quad \forall f \in D(A) \quad \overline{(D(A)} = H). \tag{61}$$

Обозначим через $L_A(\alpha, \beta)$ совокупность расширений $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$, сохраняющих лакуну. Для $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ условие (61) эквивалентно условию $E_{\widetilde{A}}(\alpha, \beta) H = \{0\}$. Известно [1], что $L_A(\alpha, \beta) \neq \varnothing$. Следуя [18], определяем расширения

$$A_\alpha \doteq s - R - \lim_{x \downarrow \alpha} \widetilde{A}_x, \quad \widetilde{A}_\beta \doteq s - R - \lim_{x \uparrow \beta} \widetilde{A}_x, \tag{62}$$

где, как обычно, $\widetilde{A}_x = \widetilde{A}_x^*$, $D(\widetilde{A}_x) = D(A) + \mathfrak{N}_x$. В [6, 7] показано, что расширения $\widetilde{A}_\alpha$, $\widetilde{A}_\beta$ $(\in L_A(\alpha, \beta))$ обладают следующим экстремальным свойством:

$$(\widetilde{A}_\alpha - x)^{-1} \leqslant (\widetilde{A} - x)^{-1} \leqslant (\widetilde{A}_\beta - x)^{-1} \quad \forall \widetilde{A} \in L_A(\alpha, \beta), \quad \forall x \in (\alpha, \beta). \tag{63}$$

Предложение 2 [5—7]. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, в котором $\widetilde{A}_2 \in L_A(\alpha, \beta)$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда:*

1) *существует сильный резольвентный предел*

$$M(\beta) \doteq s - R - \lim_{x \downarrow \alpha} M(x) \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H}) \ \ (M(\alpha) \doteq s - R - \lim_{x \uparrow \beta} M(x) \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})),$$

являющийся полуограниченным снизу (сверху) отношением и $\widetilde{A}_\beta = \widetilde{A}_{M(\beta)}$ $(A_\alpha = A_{M(\alpha)})$;

2) *операторная часть отношения $M(\beta)$ $(M(\alpha))$ ассоциирована с замкнутой квадратичной формой*

$$\begin{gathered} \mathfrak{t}_\beta[f] \doteq \lim_{x \uparrow \beta} (M(x) f, f), \quad D(\mathfrak{t}_\beta) = \{f : \lim_{x \uparrow \beta} (M(x) f, f) < \infty\}, \\ \mathfrak{t}_\alpha[f] \doteq \lim_{x \downarrow \alpha} (M(x) f, f), \quad D(\mathfrak{t}_\alpha) = \{f : \lim_{x \downarrow \alpha} (M(x) f, f) > -\infty\}; \end{gathered} \tag{64}$$

3) *расширения $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_\beta$ ($\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_\alpha$) дизъюнктны $\Leftrightarrow M(\beta) \in \mathscr{C}(\mathcal{H})$ $(M(\alpha) \in \mathscr{C}(\mathcal{H}))$;*

4) *$\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_\beta$ ($\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_\alpha$) трансверсальны $\Leftrightarrow M(\beta) \in [\mathcal{H}]$ $(M(\alpha) \in [\mathcal{H}])$.*

Определение 5. *Пусть $\varphi \in [0, \pi/2]$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Будем писать $T \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$, если $T \in \mathscr{C}(H)$, $\rho(T) \neq \varnothing$ и $\varkappa_-(\mathfrak{t}^\pm) = k$), где*

$$\mathfrak{t}^\pm[f] = \|Tf\|^2 - (\alpha + \beta)\operatorname{Re}(Tf, f) + \alpha\beta\|f\|^2 \pm (\beta - \alpha)\operatorname{ctg}\varphi \cdot \operatorname{Im}(Tf, f). \tag{65}$$

Отношение $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}(H)$ отнесем классу $\widetilde{S}_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$, если его операторная часть $T \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$.

Это определение мотивировано следующими обстоятельствами. Во-первых, при $\alpha \to -\infty$ классы $S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$ переходят в классы $S_{(-\infty, \beta)}(\varphi; k) = S_\beta(\varphi; k)$ из определения 3. Во-вторых, если $\frac{\alpha + \beta}{2} \in \rho(T)$, то $2^{-1}(\beta - \alpha) \times \left(T - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{-1} \in C(\varphi; k)$ [16]. И, наконец, $T = T^* \in S_{(\alpha, \beta)}(0; k)$, если T имеет в лакуне (α, β) точно k собственных значений (с учетом кратности).

Теорема 4. *Пусть A имеет лакуну (α, β), $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_\alpha$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ и $(\beta_0, \beta) \in \rho(\widetilde{A}_\theta)$ при некотором $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда:*

1) $\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; 0) \Leftrightarrow D[\theta] \subset D[M(\beta)]$, $\mathfrak{t}_\theta - \mathfrak{t}_{M(\beta)} \geqslant 0$;

2) *если $\theta \in S_a(\varphi_0)$ при некоторых $a = \bar{a}$, $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$ и $D[\theta] \subset D[M(\beta)]$,*

то $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ *верна эквивалентность*

$$\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow \varkappa_-(\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}\,\theta} \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \mathfrak{t}_{\mathrm{Im}\,\theta} - \mathfrak{t}_{M(\beta)}) = k;$$

3) *если, к тому же, форма* $\mathfrak{t}_\theta$ *замыкаема и* T — *оператор, ассоциированный с ее замыканием, то существует*

$$s - R - \lim_{x \uparrow \beta} (\theta - M(x)) = T \tag{66}$$

и верна эквивалентность $\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow T \in \widetilde{S}_0(\varphi; k)$, *причем* $T = \theta - M(\beta)$, *если* $M(\beta) \in [\mathcal{H}]$.

Доказательство. Полагая $g = (\widetilde{A} - \lambda) f$, получаем $\forall \lambda \in \rho(\widetilde{A}) \cap \cap (\alpha, \beta)$

$$\mathrm{Re}((\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} g, g) \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \mathrm{Im}((\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} g, g) =$$
$$= \|\widetilde{A}_\theta f\|^2 - (\alpha + \lambda)\,\mathrm{Re}(\widetilde{A}_\theta f, f) + \alpha\lambda \|f\|^2 \mp (\lambda - \alpha)\,\mathrm{Im}(\widetilde{A}_\theta f, f). \tag{67}$$

Поэтому при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ верна эквивалентность

$$\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow (\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \lambda \in (\beta_0, \beta), \tag{68}$$

позволяющая, в частности, свести доказательство к самосопряженному случаю. Эквивалентность (68) при $k = \varphi = 0$ принимает вид

$$\widetilde{A}_\theta \in L_A(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} \geqslant 0. \tag{68'}$$

В силу экстремального свойства расширения $\widetilde{A}_\alpha = \widetilde{A}_{M(\alpha)}$ (см. (63)) оператор $(\widetilde{A}_\alpha - \alpha)(\widetilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}$ будет минимальным во множестве всех неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательного оператора $(A - \alpha)(A - \lambda)^{-1} \in [\mathfrak{M}_\lambda, H]$. Следовательно, операторы $(\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}$ и $(\widetilde{A}_\alpha - \alpha)(\widetilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}$, где $\widetilde{A}_\theta = \widetilde{A}_\theta^* \supset A$ имеют относительно разложения $H = \mathfrak{M}_\lambda \oplus \mathfrak{N}_\lambda$ блочно-матричные представления вида (43). Поэтому для самосопряженного расширения $\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(0; k)$ из леммы 4 и эквивалентности (68) (при $\varphi = 0$) получим $\forall \lambda \in (\beta_0, \beta)$:

$$k = \dim E_{\widetilde{A}_\theta}(\alpha, \beta) H = \varkappa_-((\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}) = \varkappa_-((\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} -$$
$$- (\widetilde{A}_\alpha - \alpha)(\widetilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}) = \varkappa_-((\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} - (\widetilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}). \tag{69}$$

Из формулы резольвент (3), в которой $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_\alpha$, и равенства (69) заключаем, что $\varkappa_-(\theta - M(\lambda)) = k \ \forall \lambda \in (\beta_0, \beta)$. Из включения $D[0] \subset D[M(\beta)]$, монотонности $M(\lambda)$ и леммы 3 вытекает эквивалентность

$$\varkappa_-(\theta - M(\lambda)) = k\,(\forall \lambda \in (\beta_0, \beta)) \Leftrightarrow \varkappa_-(\mathfrak{t}_\theta - \mathfrak{t}_{M(\beta)}) = k. \tag{70}$$

Соотношения (69), (70) доказывают импликацию $\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(0; k) \Rightarrow \varkappa_-(\mathfrak{t}_\theta - \mathfrak{t}_{M(\beta)}) = k$. Обращая рассуждения, установим обратную импликацию, а с ней — и второе утверждение теоремы при $\varphi = 0$. Общий случай $(\varphi \neq 0)$ легко (ср. с доказательством теоремы 2) сводится к рассмотренному. Действительно, если $\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi; k)$, то в силу (67) $(\widetilde{A}_\theta - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} \in S_0(\varphi; k)$. Поэтому, определяя расширения $\widetilde{A}_{\theta_\pm} = \widetilde{A}_{\theta_\pm}^*$ равенствами (41), в которых $\varepsilon = -\lambda$, и замечая, что

$$I + (\lambda - \alpha)(\widetilde{A}_{\theta_\pm} - \lambda)^{-1} = \mathrm{Re}\,[I + (\lambda - \alpha)(\widetilde{A}_\theta + \lambda)^{-1}] \pm \mathrm{ctg}\,\varphi \times$$
$$\times \mathrm{Im}\,[I + (\lambda - \alpha)(\widetilde{A}_\theta + \lambda)^{-1}], \tag{71}$$

приходим к включению $(\widetilde{A}_{\theta_\pm}-\alpha)(\widetilde{A}_{\theta_\pm}-\lambda)^{-1}\in S_0(0;k)$. Отсюда и из (67) (при $\varphi=0$) заключаем $\widetilde{A}_{\theta_\pm}\in S_{(\alpha,\beta)}(0;k)$. В силу доказанного выше верна эквивалентность

$$\widetilde{A}_{\theta_\pm}\in S_{(\alpha,\beta)}(0;k)\Leftrightarrow\theta-M(\lambda)\in\widetilde{S}_0(\varphi;k)\quad\forall\lambda\in(\beta_0,\beta)\Leftrightarrow\varkappa_-(\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}\,\theta}\pm\mathrm{ctg}\,\varphi\times$$
$$\times\,\mathfrak{t}_{\mathrm{Im}\,\theta}-\mathfrak{t}_{M(\lambda)})=k\quad\forall\lambda\in(\beta_0,\beta).\tag{72}$$

Соотношение (72) и лемма 3 позволяют получить утверждение 2 в полном объеме.

Далее, если $\widetilde{A}_0\in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi;0)$, то в силу (72) (при $k=0$)

$$(M(\lambda)f,f)\leqslant\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}\,\theta}[f]\pm\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\mathfrak{t}_{\mathrm{Im}\,\theta}[f]\quad\forall f\in D[\theta].\tag{73}$$

Теперь включение $D[\theta]\subset D[M(\beta)]$, доказывающее утверждение 1, вытекает из (73) и предложения 2 (см. (64)). Утверждение 3 доказывается так же, как соответствующее утверждение в теореме 2. Теорема доказана.

Замечание 7. В самосопряженном случае $(\varphi=0)$ теорема 4 более сложным методом доказана в [4—7].

Теорема 5. *Пусть A — эрмитов оператор с лакуной (α,β), $\{\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\widetilde{A}_2=\widetilde{A}_\alpha$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta=\theta^*\in\widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}$ — один из идеалов $\mathfrak{S}_p,\mathfrak{S}_\pi,\mathfrak{S}_\Pi^0,\mathfrak{S}_\Pi$. Тогда верны эквивалентности*

1) $\theta(x_0)\doteq(\theta-M(x_0))E_{\theta-M(x_0)}(-\infty,0)\in\mathfrak{S}\Leftrightarrow\widetilde{A}_\theta(x_0)\doteq(\widetilde{A}_\theta-x_0)\times$ $\times E_{\widetilde{A}_\theta}(\alpha,x_0)\in\mathfrak{S}$;

2) $s_n(\theta(x_0))\sim a_1n^{-p}\Leftrightarrow s_n(\widetilde{A}_\theta(x_0))\sim a_2n^{-p}\quad(0<p<\infty)$,

причем либо $a_1a_2\neq0$, либо $a_1=a_2=0$. Если, к тому же, $M(\beta)\in[\mathcal{H}]$, то верны импликации

3) $\theta(\beta)\doteq(\theta-M(\beta))E_{\theta-M(\beta)}(-\infty,0)\in\mathfrak{S}\Rightarrow\widetilde{A}_\theta(\beta)\doteq(\widetilde{A}_\theta\,\beta-)\times$ $\times E_{\widetilde{A}_\theta}(\alpha,\beta)\in\mathfrak{S}$;

4) $s_n(\theta(\beta))\sim a_1n^{-p}\Rightarrow s_n(\widetilde{A}_\theta(\beta))\sim a_2n^{-p}\quad(0<p<\infty)$.

Эта теорема доказывается с использованием теоремы 4 так же, как теорема 3 с использованием теоремы 2, если учесть вытекающие из (48), (69) и (70) соотношения

$$\dim E_{\theta-M(x_0)}(-\infty,-C_1\varepsilon)\mathcal{H}\geqslant\dim E_{\theta-M(x_0-\varepsilon)}(-\infty,0)\mathcal{H}=$$
$$=\dim E_{\widetilde{A}_\theta}(\alpha,x_0-\varepsilon)H.$$

Следующие две теоремы аналогичны теоремам 4,5 и позволяют изучить величину $\dim E_{\widetilde{A}_\theta}(x_0,\beta)H\ \forall x_0\in(\alpha,\beta)$ и асимптотику собственных значений оператора $\widetilde{A}_\theta$ у левого края лакуны. Как и прежде, $\varkappa_+(\mathfrak{t})=\varkappa_-(-\mathfrak{t})$ — число положительных квадратов формы $\mathfrak{t}$.

Теорема 6. *Пусть $A(\subset A^*)$ имеет лакуну (α,β), $\{\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\theta\in\widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$, $\varphi\in[0,\pi/2]$ — соответствующая функция Вейля, $\theta\in\widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$, $\varphi\in[0,\pi/2]$. Если $(\alpha,\alpha_0)\in\rho(\widetilde{A}_0)$ при некотором $\alpha_0\in(\alpha,\beta)$, то*

1) $\widetilde{A}_0\in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi;0)\Leftrightarrow D[\theta]\subset D[M(\alpha)]$, $\quad\mathfrak{t}_0-\mathfrak{t}_{M(\alpha)}\leqslant0$;

2) *если $\rho(\theta)\neq\varnothing$ и $D[\theta]\subset D[M(\alpha)]$, то $\forall k\in\mathbb{Z}_+$ верна эквивалентность*

$$\widetilde{A}_\theta\in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi;k)\Leftrightarrow\varkappa_+(\mathfrak{t}_{\mathrm{Re}\,\theta}\pm\mathrm{ctg}\,\varphi\,\mathfrak{t}_{\mathrm{Im}\,\theta}-\mathfrak{t}_{M(\alpha)})=k;$$

3) *если, к тому же, форма* $\mathfrak{t}_\theta$ *замыкаема и* T — *оператор, ассоциированный с ее замыканием, то* $\exists s - R - \lim\limits_{x \downarrow \alpha} (\theta - M(x)) = T$ *и верна эквивалентность*

$$\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha,\beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow T \in \widetilde{S}_0(\varphi; k),$$

причем $T = \theta - M(\alpha)$, *если* $D(\theta) \subset D(M(\alpha))$ (*например, если* $M(\alpha) \in [\mathcal{H}]$);

4) *если* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *и* $\exists \varepsilon_0 > 0$ *такое, что* $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset \rho(\widetilde{A}_\theta)$, *то*

$$\widetilde{A}_\theta \in S_{(x_0,\beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow -(\theta - M(x_0)) \in \widetilde{S}_0(\varphi; k).$$

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4 и базируется на формуле резольвент (3) (при $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_\beta$) и равенстве

$$\dim E_{\widetilde{A}_\theta}(x_0, \beta) H = \varkappa_+((\widetilde{A}_0 - \alpha)(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}) = \varkappa_+((\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} - (\widetilde{A}_\beta - \lambda)^{-1}) = \varkappa_+(\theta - M(\lambda)), \tag{74}$$

справедливом $\forall \lambda \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap \rho(\widetilde{A}_\theta)$ при $\theta = \theta^*$ ($\Leftrightarrow \widetilde{A}_\theta = \widetilde{A}_\theta^*$).

Теорема 7. *Пусть* A — *эрмитов оператор с лакуной* (α, β), $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ, для которого* $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_\beta$, $M(z)$ — *функция Вейля,* $\theta = \theta^* \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$ *и* $\mathfrak{S}$ — *один из идеалов* $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{S}_\Pi^0, \mathfrak{S}_\Pi$. *Тогда* $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ *верны эквивалентности*

1) $\theta^+(x_0) \doteq (\theta - M(x_0)) E_{\theta - M(x_0)}(0, \infty) \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow \widetilde{A}_\theta^+(x_0) \doteq (\widetilde{A}_\theta - x_0) \times E_{\widetilde{A}_\theta}(x_0, \beta) \in \mathfrak{S}$;

2) $s_n(\theta^+(x_0)) \sim a_1 n^{-p} \Leftrightarrow s_n(\widetilde{A}_\theta(x_0)) \sim a_2 n^{-p}$ $(0 < p < \infty)$,

причем либо $a_1 a_2 \neq 0$, *либо* $a_1 = a_2 = 0$. *Если, к тому же,* $M(\alpha) \in [\mathcal{H}]$, *то верны импликации*

3) $\theta^+(\alpha) \doteq (\theta - M(\alpha)) E_{\theta - M(\alpha)}(0, \infty) \in \mathfrak{S} \Rightarrow \widetilde{A}_\theta^+(\alpha) \doteq (\widetilde{A}_\theta - \alpha) E_{\widetilde{A}_\theta}(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$;

4) $s_n(\theta^+(\alpha)) \sim a_1 n^{-p} \Rightarrow s_n(\widetilde{A}_\theta^+(\alpha)) \sim a_2 n^{-p}$ $(0 < p < \infty)$.

Теорема 7 может быть выведена из теоремы 5 (а теорема 6 — из теоремы 4) с помощью преобразования $A \to A' = (\alpha + \beta) I_H - A$, переводящего $\widetilde{A}_\alpha$ в $\widetilde{A}'_\alpha = \widetilde{A}_\beta$, либо доказана аналогично с помощью вытекающих из (48) и (74) соотношений

$$\dim E_{\theta - M(x_0)}(C_1 \varepsilon, +\infty) \mathcal{H} \geqslant \dim E_{\theta - M(x_0 + \varepsilon)}(0, +\infty) \mathcal{H} = \dim E_{\widetilde{A}_\theta}(x_0 + \varepsilon, \beta) H,$$

$$\dim E_{\widetilde{A}_\theta}(x_0 + \varepsilon, \beta) H = \dim E_{\theta - M(x_0 + \varepsilon)}(0, +\infty) \mathcal{H} \geqslant \dim E_{\theta - M(x_0)}(C_2 \varepsilon, +\infty) \mathcal{H}.$$

Пример. Пусть $A \geqslant 0$ — минимальный оператор, порожденный в $L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ выражением Лапласа $-\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, $\widetilde{A}_\omega$ — его собственное расширение, задаваемое условием

$$\left[\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \omega(x) y(t, x)\right]\Big|_{t=0} = 0, \quad \omega(x) \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

в котором $\omega(x)$ комплекснозначна. ПГЗ оператора A^* может быть выбрано в виде [9]

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}), \quad \Gamma_1 y = L^{1/4}(y'(0) + L^{1/2} y(0)), \quad \Gamma_2 y = L^{-1/4} y(0), \tag{75}$$

где $L = -\frac{d^2}{dx^2} + I$. Функция Вейля имеет [5—8] вид $M(z) = L^{1/2}(L^{1/2} - (L - I - z)^{1/2})$. Фридрихсово расширение $\widetilde{A}_F$ соответствует задаче Дирихле: $y(x, 0) = 0$, а крейновское $\widetilde{A}_K$ — задается условием

$$\left[\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + \Lambda y(t, x)\right]\Big|_{t=0} = 0, \tag{76}$$

в котором Λ — оператор Кальдерона — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|$. Поясним, что условие (76) — это трансформированное с учетом (75) равенство $D(\widetilde{A}_K) = \ker(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_2)$, в котором $M(0) = L^{1/2}(L^{1/2} + (L - I)^{1/2})^{-1} \in [\mathcal{H}]$.

Из теорем 2 и 3 вытекают следующие утверждения:

а) $\widetilde{A}_\omega \in S_\beta(\varphi; k) \Leftrightarrow C_\beta \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \beta \leqslant 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+$;

б) $\widetilde{A}_\omega \in S_\beta(\varphi; \mathfrak{S}) \Leftrightarrow L^{1/4} C_\beta L^{1/4} \in S_0(\varphi; \mathfrak{S}) \quad \forall \beta \leqslant 0$,

в которых $C_\beta \in \mathscr{C}(\mathcal{H})$, $C_\beta f = \omega(x) f + (L - I - \beta)^{1/2} f$, а $\mathfrak{S}$ — один из идеалов $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{S}_\Pi^0, \mathfrak{S}_\Pi$.

Аналогично соответствующему результату из [6, 7] доказывается теорема 6 из [8] о расширениях рассматриваемых классов эрмитова оператора A с лакунами (α_j, β_j) $(1 \leqslant j \leqslant m \leqslant \infty)$.

Для формулировки ее напомним, следуя [6, 7], что расширение $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ называют регулярным в концах лакун (α_j, β_j), если $\exists \varepsilon_j > 0$ такие что $\Omega \subset \rho(\widetilde{A})$, где

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} (\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon_j) \cup (\beta_j - \varepsilon_j, \beta_j) \quad (1 \leqslant m \leqslant \infty).$$

Условие $\Omega \subset \rho(\widetilde{A})$ эквивалентно регулярности в Ω функции Вейля $M(z)$, соответствующей расширению $\widetilde{A}$, и позволяет определить ее предельные значения $M(\alpha_j)$, $M(\beta_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ в концах лакун.

Теорема 8. *Пусть A — эрмитов оператор с лакунами (α_j, β_j) $(1 \leqslant j \leqslant m \leqslant \infty)$ такой, что расширения $\widetilde{A}_{\alpha_j}, \widetilde{A}_{\beta_j} \in L_\Lambda(\alpha_j, \beta_j)$, определяемые равенствами* (62), *трансверсальны. Пусть, далее, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_2^*$ регулярно в концах лакун (α_j, β_j) и трансверсально расширениям $\widetilde{A}_{\beta_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H})$, $\varphi_j \in [0, \pi/2]$. Тогда верны эквивалентности* 1) $\widetilde{A}_\theta \in S_{(\alpha_j, \beta_j)}(\varphi_j; k_j) \Leftrightarrow \theta_j \in S_0(\varphi_j; k_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, *где*

$$\theta_j = [M(\beta_j) - M(\alpha_j)]^{-1} - [M(\beta_j) - \theta]^{-1} \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H}),$$
$$[M(\beta_j) - M(\alpha_j)]^{-1} \doteq \lim_{x \downarrow \alpha_j} [M(\beta_j) - M(x)]^{-1} \in [\mathcal{H}];$$

2) *если $\theta = \theta^*$, $x_j \in [\alpha_j, \beta_j)$, а $\mathfrak{S}$ — один из идеалов $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_\pi$, то $\forall j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$*

$$\theta_j(x_j) \doteq \Phi_j(x_j) E_{\Phi_j}(0, +\infty) \in \mathfrak{S} \Rightarrow \widetilde{A}_\theta(x_j) \doteq (\widetilde{A}_\theta - x_j) E_{\widetilde{A}_\theta}(x_j, \beta_j) \in \mathfrak{S}, \tag{77}$$

где

$$\Phi_j(x_j) \doteq [M(\beta_j) - \theta]^{-1} - [M(\beta_j) - M(x_j)]^{-1} \in \widetilde{\mathscr{C}}(\mathcal{H}).$$

При $x_j \neq \alpha_j$ импликация в (77) *заменяется эквивалентностью.*

1. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов // Мат. сб.— 1947.— **20**, № 3.— С. 431—495.
2. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Мат. сб.— 1956.— **38**, № 4.— С. 431—450.
3. *Alonso A., Simon B.* The Birman-Krein-Vishok Theory of self-adjoint axtensions of semibouded operators // Oper. Theory.— 1980.— **4**.— P. 251—270.
4. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР.— 1987.— **293**, № 5.— С. 1041—1046.
5. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией.— Донецк, 1985.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. ДонФТИ; 85—9 (104)).
6. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Обобщенные резольвенты и граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами.— Киев, 1988.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 88.59).
7. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized Resolvents and Boundary Volue Problems for Hermitian Operators with Gaps // J. Funct. Anal.— 1991.— **95**, N 1.— P. 1—95.
8. *Маламуд М. М.* Граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами // Докл. АН СССР.— 1990.— **313**, № 6.— С. 1335—1340.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
11. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 151—158.
12. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* Расширения секториальных операторов и дуальных пар сжатий.— Донецк, 1985.— 56 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4428—85.
13. *Сторож О. Г.* Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 6.— С. 857—860.
14. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* О Q-функциях и SC-расширениях неплотно заданных эрмитовых сжатий // Сиб. мат. журн.— 1977.— **18**, № 5.— С. 1032—1056.
15. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференциальных операторов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 106—131.
16. *Маламуд М. М.* О расширениях эрмитовых, секториальных операторов и дуальных пар сжатий // Докл. АН СССР.— 1989.— **305**, № 1.— С. 35—41.
17. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
18. *Ando T., Nisho K.* Positive Selfadjoint extensions of positive symmetric operators // Tohoku Math. J.— 1970.— **2**, ser. **22**.— P. 65—75.

Получено 09.10.91