УДК 517.947

А. И. Марковский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Замечания об $L_p - L_q$ оценках решений уравнения Клейна — Гордона

Устраняются пробелы в доказательствах ряда оценок, установленных ранее в статье Маршалла, Штрауса и Вайнгера, посвященной $L_p - L_q$ оценкам решений уравнения Клейна — Гордона.

Усуваються недоліки в доведеннях ряду оцінок, установлених раніше в статті Маршалла, Штрауса і Вайнгера, присвяченій $L_p - L_q$ оцінкам розв'язків рівняння Клейна — Гордона.

В работе [1] рассматривается задача Коши для уравнения Клейна — Гордона

$$u_{tt} = \Delta u - u, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Оператор $T_t : f \Rightarrow u(\cdot, t)$ преобразует начальную скорость в положение $u(\cdot, t)$ в момент t. Основные вопросы, рассматриваемые в статье, следующие.

Для каких p и q оператор T_t отображает $L_p = L_p(R^n)$ в $L_q = L_q(R^n)$? Как для этих p и q операторная норма $\| T_t \|$ зависит от t?

На эти вопросы отвечают следующие две теоремы.

Теорема А. *Пусть* $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$. *Тогда* T_t *является ограниченным оператором из* L_p *в* L_q, *если и только если точки* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ *принадлежит замкнутому треугольнику* Γ *с вершинами* $P_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right)$, $P_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)$. *В случае* $n = 1$ *или* $n = 2$ *следует считать* $P_2 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$.

Для оценок операторной нормы вводятся также точки

$$P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad P_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right), \quad P_5 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right),$$

$$P_6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Если $n = 1$, то $P_4 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$, $P_5 = \left(1, \frac{1}{4}\right)$.

Теорема В. *Пусть* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \Gamma$ *и* $\| T_t \|$ *обозначает операторную норму из* L_p *в* L_q. *Тогда существуют такие положительные постоянные* c_1, c_2, *что*

$$c_1 t^a \leqslant \| T_t \| \leqslant c_2 t^a, \text{ если } t \geqslant 1, \tag{3}$$

и a — *кусочно-линейная функция от* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$

$$a = \frac{n-2}{q} - n\left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ в треугольнике } P_1P_5P_6,$$

$$a = -\frac{n}{q} + (n-2)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ в треугольнике } P_1P_4P_6,$$

$$a = -\frac{n}{2} + \frac{n}{q} \text{ в четырехугольнике } P_0P_3P_5P_6,$$

$$a = \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \text{ в четырехугольнике } P_0P_2P_4P_6.$$

Если $0 < t < 1$, то с некоторыми положительными постоянными c_3 и c_4

$$c_3 t^b \leqslant \| T_t \| \leqslant c_4 t^b,$$

где $b = 1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}$.

Оператор T_t можно представить как оператор свертки с ядром

$$K_t(|x|) = F^{-1}_{\xi \to x} \frac{\sin t\sqrt{1 + |\xi|^2}}{\sqrt{1 + |\xi|^2}},$$

где $F^{-1}_{\xi \to x}$ — оператор обратного преобразования Фурье, ξ — переменная, двойственная x, $|x|$, $|\xi|$ имеют обычный смысл. Полагая для краткости

$r=|\xi|$, $R=2\pi|x|$, $r_1=\sqrt{1+r^2}$, представим $K_t(|x|)$ в виде

$$K_t(|x|)=R^{1-n/2}\int\limits_0^\infty r_1^{-1}\sin tr_1\mathcal{J}_{n/2-1}(Rr)\,r^{n/2}dr, \tag{4}$$

где $\mathcal{J}_{n/2-1}$ — бесселева функция первого рода порядка $n/2-1$, а интеграл (4) следует понимать формально (как обобщенную функцию).

Доказательство теорем A и B проводится с использованием теорем Стейна — Фефферманa об интерполяционных свойствах аналитических семейств операторов, а также о свойствах пространств H^1 и BMO [2]. Более подробно об этом см. [1, 3]. В итоге задача сводится к установлению оценок ядра

$$K_t^\alpha(|x|)=R^{1-n/2}\int\limits_0^\infty r_1^{-\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\right)}\sin tr_1\mathcal{J}_{n/2-1}(Rr)\,r^{n/2}dr \tag{5}$$

и

$$\widetilde{K}_t^\alpha(|x|)=R^{1-n/2}\int\limits_0^\infty r_1^{-(\alpha+1)}\sin tr_1\mathcal{J}_{n/2-1}(Rr)\,r^{n/2}\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr, \tag{6}$$

где $\varphi\in C^\infty[0,\infty)$, $\varphi(s)\equiv 1$ при $0\leqslant s\leqslant 1/2$, $\varphi\equiv 0$ при $s>1$, в форме

$$\|K_t^{3/2}(|x|)\|_{L_\infty}\leqslant ct^{-n/2},\quad t>1, \tag{7}$$

$$\|K_t^1(|x|)\|_{BMO}\leqslant ct^{-(n-1)/2},\quad t>1, \tag{8}$$

и

$$\|\widetilde{K}_t^{\frac{n-3}{2}}(|x|)\|_{L_1}\leqslant ct^{n/2},\quad t>1, \tag{9}$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty}$, $\|\cdot\|_{L_1}$ — обычные sup- и L_1-нормы, а $\|\cdot\|_{BMO}$ — норма в пространстве BMO (см., например, [4]).

К сожалению, в доказательствах оценки (7) в случае четного n и оценки (9) в работе [1] имеются существенные пробелы. Настоящая статья посвящена их восполнению.

В п. 1 доказывается неравенства (7) в случае четного n, а в п. 2 — неравенство (9), развивая и дополняя методы, использованные в [1].

1. Оценка ядра $K_t^{3/2}$ в L_∞-норме в случае четного n. С точностью до множителя, зависящего только от n,

$$K_t^{3/2}(R)=R^{1-n/2}\int\limits_0^\infty r_1^{-\frac{n+2}{2}}\sin tr_1\mathcal{J}_{n/2-1}(Rr)\,r^{n/2}dr. \tag{10}$$

Интегрируя здесь по частям $\dfrac{n-2}{2}$ раз, получаем

$$K_t^{3/2}(R)=\frac{R^{2-n}}{t^{\frac{n-2}{2}}}\int\limits_0^\infty\sin\left(tr_1-\frac{(n-2)}{2}\frac{\pi}{2}\right)\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}}c_jR^{2j}r_1^{-n+2j}\widetilde{\mathcal{J}}_{n/2-1-j}(Rr)\,rdr,$$

где c_j — постоянные, не зависящие от t, а $\widetilde{\mathcal{J}}_{n/2-1-j}(z)=z^{n/2-1-j}\mathcal{J}_{n/2-1-j}(z)$.

Главным в этой сумме будет член

$$t^{-\frac{n}{2}+1}\int\limits_0^\infty\sin\left(tr_1-\frac{n-2}{2}\frac{\pi}{2}\right)r_1^{-2}\mathcal{J}_0(Rr)\,rdr,$$

отвечающий значению $j=n/2-1$, остальные имеют лучшее поведение по t и здесь не рассматриваются.

Оценка (7) будет доказана, если мы покажем, что

$$\sup_{0\leqslant R<\infty}\left|\int\limits_0^\infty\sin\left(tr_1-\frac{(n-2)}{2}\frac{\pi}{2}\right)r_1^{-2}\mathcal{J}_0(Rr)\,rdr\right|\leqslant ct^{-1}. \tag{11}$$

Представим $I = \int_0^\infty \sin\left(tr_1 - \frac{(n-2)}{2}\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-2}\mathcal{J}_0(Rr)\, rdr$ в виде

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^t \sin\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-2}\mathcal{J}_0(Rr)\, rdr + \int_t^\infty \sin\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times r_1^{-2}\mathcal{J}_0(Rr)\, rdr.$$

Сначала оценим I_2. Если $R > t^{-1/3}$, то $Rr > t^{2/3} > 1$ и для $\mathcal{J}_0(Rr)$ можно использовать известное [5] асимптотическое разложение. Имеем

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = R^{-1/2}\int_t^\infty \sin\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) r_1^{-2} r^{1/2} dr +$$

$$+ \int_t^\infty \sin\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-2} O\left(R^{-3/2} r^{-1/2}\right) dr.$$

Поэтому $|I_{22}| \leqslant ct^{-1}$. Полагая $h_\pm(r, R, t) = tr_1 \pm Rr$, представляем I_{21} в виде суммы четырех слагаемых вида

$$I_{21}^{\pm} = R^{-1/2}\int_t^\infty e^{ih_\pm} r_1^{-2} r^{1/2} dr. \tag{12}$$

Пусть дополнительно $R < t/2\sqrt{2}$. Тогда $|h'_\pm| \geqslant t/2\sqrt{2}$. Полагая $H_\pm(r, t) = \int_t^r e^{ih_\pm(\rho, R, t)} d\rho$, интегрируя в (12) по частям, и используя для оценки $H_\pm|$ лемму ван дер Корпута [6], в силу которой

$$|H_\pm(r, R, t)| \leqslant ct^{-1},$$

получаем $|I_{21}^{\pm}| \leqslant ct^{-7/2}$. Эта оценка верна для I_{21}^{+} при условии, что $R > t^{-1/3}$, а для I_{21}^{-} — при $t^{-1/3} < R < t/2\sqrt{2}$. Если $R > t/2\sqrt{2}$, то

$$|I_{21}^{-}| \leqslant cR^{-1/2}\int_t^\infty r^{-3/2} dr \leqslant c_1 t^{-1},$$

значит, $|I_2| \leqslant ct^{-1}$ при $R > t^{-1/3}$. Пусть теперь $R \leqslant t^{-1/3}$. После интегрирования по частям представляем I_2 в виде $I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}$, где, как нетрудно видеть, $|I_{21} + I_{22}| = 0\,(t^{-2})$, а

$$I_{23} = t^{-1}R\int_t^\infty \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1}\mathcal{J}_1(Rr)\, dr = t^{-1}R\int_t^{1/R} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times r_1^{-1}\mathcal{J}_1(Rr)\, dr + t^{-1}R\int_{1/R}^\infty \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1}\mathcal{J}_1(Rr)\, dr = I_{231} + I_{232}.$$

Поскольку при $Rr < 1$ $|J_1(Rr)| < cRr$, то

$$|I_{231}| \leqslant ct^{-1}R^2\int_t^{1/R} \frac{r}{r_1} dr \leqslant ct^{-1}R^2\int_0^{1/R} dr_1 \leqslant ct^{-1}R\sqrt{1+R^2} \leqslant c_1 t^{-1},$$

ибо $R < t^{-1/3} < 1$. При оценке I_{232} используем асимптотическое разложение при $Rr > 1$ [5]:

$$\mathcal{J}_1(Rr) = (Rr)^{-1/2}\cos\left(Rr - \frac{3}{4}\pi\right) + O\left(R^{-3/2} r^{-3/2}\right),$$

откуда следует $|I_{232}| \leqslant ct^{-1}$. В итоге $I_2 \leqslant ct^{-1}$ при $0 < R < \infty$. I_1 оценивается по-разному, в зависимости от соотношения между R и t.

Если $R < 1/t$, то в выражении для I_1 интегрируем по частям; используя тот факт, что $Rt < 1$, $|\mathcal{J}_0(Rr)| \leqslant 1$, $|\mathcal{J}_1(Rr)| \leqslant c_1|$, получаем $|I_1| \leqslant \leqslant ct^{-1}$. Пусть $R > 1/t$.

Представим I_1 по схеме $I_1 = \int\limits_0^{1/R} + \int\limits_{1/R}^{t} = I_{11} + I_{12}$. Тогда I_{11} оценивается так же, как и I_1 в случае $R < 1/t$, и мы получаем $|I_{11}| \leqslant ct^{-1}$. В выражении для I_{12} воспользуемся асимптотическим представлением для $\mathcal{J}_0(Rr)$, тогда

$$I_{12} = R^{-1/2} \int\limits_{1/R}^{t} \sin\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) r_1^{-2} r^{1/2} dr + R^{-3/2} \int\limits_{1/R}^{t} \sin\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times r_1^{-2} O(r^{-1/2})\, dr = I_{121} + I_{122}.$$

Дополнительно предположим, что $R > (3/2)\, t$. Тогда

$$|I_{122}| \leqslant cR^{-3/2} \int\limits_{1/R}^{t} \frac{dr}{\sqrt{r}(1 + r^2)} \leqslant cR^{-3/2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r}(1 + r^2)} \leqslant ct^{-3/2}.$$

Слагаемое I_{121} представимо в виде суммы четырех слагаемых вида

$$I_{121}^{\pm} = R^{-1/2} \int\limits_{1/R}^{t} e^{ih_{\pm}(r, R, t)} r_1^{-2} r^{1/2} dr \tag{13}$$

и их сопряженных с постоянными коэффициентами. Они легко оцениваются с помощью интегрирования по частям и леммы ван дер Корпута, как и выше, поскольку при $R > 3/2t$ $|h'_{\pm}| \geqslant t/2$. Отсюда вытекает оценка $|I_{12}| \leqslant ct^{-1}$.

Пусть $1/t < R < (3/2)\, t$. Интегрируя выражение для I_{12} по частям, получаем

$$I_{12} = -t^{-1} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_0(Rr) \Big|_{1/R}^{t} + t^{-1} \int\limits_{1/R}^{t} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times r_1^{-3} r \mathcal{J}_0(Rr)\, dr + t^{-1} R \int\limits_{1/R}^{t} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr)\, dr.$$

Поскольку $|r_1^{-1}\mathcal{J}_0(Rr)| \leqslant 1$, то первое слагаемое суть $O(t^{-1})$,

$$t^{-1} \left| \int\limits_{1/R}^{t} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-3} r \mathcal{J}_0(Rr)\, dr \right| \leqslant t^{-1} \int\limits_{1/R}^{t} r_1^{-3} r\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} t^{-1} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s)^{3/2}} = ct^{-1}.$$

В последнем слагаемом используем для $\mathcal{J}_1(Rr)$ асимптотическое разложение, тогда имеем

$$I_{123} = t^{-1} R \int\limits_{1/R}^{t} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} \mathcal{J}_1(Rr)\, dr = t^{-1} R^{1/2} \int\limits_{1/R}^{t} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \cos\left(Rr - \frac{3}{4}\pi\right) r_1^{-1} r^{-1/2} dr + t^{-1} R^{-1/2} \int\limits_{1/R}^{t} \cos\left(tr_1 - k\frac{\pi}{2}\right) r_1^{-1} O(r^{-3/2})\, dr =$$

$$= I_{1231} + I_{1232}.$$

При этом $|I_{1232}| \leqslant ct^{-1} R^{-1/2} \int\limits_{1/R}^{t} r_1^{-1} r^{-3/2} dr \leqslant ct^{-1} R^{-1/2} \int\limits_{1/R}^{\infty} r^{-3/2} dr = c_1 t^{-1}$.

Как и ранее, слагаемое I_{1231} представляется как сумма слагаемых вида

$$I^{\pm}_{1231} = t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{1/R}^{t} e^{ih_{\pm}(r,R,t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr.$$

Обозначая $H_+(r,R,t) = \int\limits_{1/R}^{r} e^{ih_+(\rho,R,t)} d\rho$ и интегрируя по частям, получаем оценку $|I^+_{1231}| \leqslant ct^{-1}$, потому что $|H_+(r,R,t)| \leqslant cR^{-1}$ и $R/t < 3/2$.

В случае I^-_{1231} фазовая функция $h_- = tr_1 - Rr$ имеет стационарную точку, т. е. $h'_-(r_0) = 0$, при $r_0 \in [1/R,\, t]$. Чтобы получить нужную оценку, предположим, что $R > 1$. Тогда

$$I^-_{1231} = t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{1/R}^{1} e^{ih_-(r,R,t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr + t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{1}^{t} e^{ih_-(r,R,t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr =$$

$$= I^-_{12311} + I^-_{12312}.$$

Оценим сначала I^-_{12312}, для этого будем считать, что $1 < r_0/2 < 2r_0 < t$ (это наиболее трудный случай); используем здесь прием, примененный в [1] в аналогичной ситуации в случае нечетного n).

Представим $I^-_{12312} = I^-_{123121} + I^-_{123122} + I^-_{123123}$ соответственно разбиению $\int\limits_1^t = \int\limits_1^{r_0/2} + \int\limits_{r_0/2}^{2r_0} + \int\limits_{2r_0}^{t}$.

Полагая $H_-(r,R,t) = \int\limits_{r_0/2}^{r} e^{ih_-(\rho,R,t)} d\rho$ и замечая, что $h''_-(\rho,R,t) = tr_1^{-3}(\rho) \geqslant tr_1^{-3}(r)$, а значит, $|H_-(r,R,t)| \leqslant ct^{-1/2} r_1^{3/2}(r)$, имеем

$$I^-_{123122} = t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} \frac{dH_-}{dr} r_1^{-1} r^{-1/2} dr = t^{-1}R^{1/2} H_-(2r_0,R,t)\, r_1^{-1}(2r_0)(2r_0)^{-1/2} +$$

$$+ t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} H_-(r,R,t)\, r_1^{-3} r^{1/2} dr + \frac{1}{2}t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} H_-(r,R,t)\, r_1^{-1} r^{-3/2} dr. \quad (14)$$

Поскольку $R^{1/2}t^{-1/2} \leqslant c$, а также в силу оценки $|H_-|$ видим, что первое слагаемое в (14) есть $0(t^{-1})$.

Из тех же соображений имеем

$$\left| t^{-1}R^{1/2}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} H_-(r,R,t)\, r_1^{-3} r^{1/2} dr \right| \leqslant ct^{-1}R^{1/2}t^{-1/2}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} r_1^{3/2} r_1^{-3} r^{1/2} dr \leqslant$$

$$\leqslant ct^{-1}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} r^{-1} dr = c\ln 4t^{-1}.$$

Аналогично оценивается третье слагаемое в (14), следовательно, $|I^-_{123122}| \leqslant ct^{-1}$. Для оценки I^-_{123121} заметим, что $h'_- < 0$ на $[1, r_0)$, значит, если $r < r_0/2$, то $2r < r_0$, и $h'_-(2r) < 0$. В итоге,

$$|h'_-(r,R,t)| = -h'_-(r,R,t) \geqslant h'_-(2r,R,t) - h'_-(r,R,t) = rh''_-((1+\theta)\, r, R, t)$$

и, так как $h''_-(r, R, t) = tr_1^{-3}(r)$ монотонно убывает, то $|h'_-(r, R, t)| \geqslant trr_1^{-3}(2r)$. Отсюда и из леммы ван дер Корпута получаем, как и выше, оценку $|I^-_{123\ 121}| \leqslant ct^{-1}$. Аналогичные соображения приводят к неравенству $|I^-_{123\ 123}| \leqslant ct^{-1}$. Заметим теперь, что если $R < 1$, то к оценке I^-_{1231} применим тот же подход, что и к оценке I^-_{12312}, и потому если $R < 1$, то имеем неравенство $|I^-_{1231}| \leqslant ct^{-1}$.

Осталось оценить $|I_{\overline{2}1311}|$ при $R > 1$. Полагая $\lambda = R/t$, видим, что стационарная точка фазы $h_- r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, и если $\lambda > \frac{1,1}{\sqrt{2}}$, то $r_0 > 1$, значит, при $\frac{1,1}{\sqrt{2}} t < R < (3/2)t$ без труда получаем нужную оценку для $|I_{\overline{1}2311}|$.

Поэтому считаем, что $\lambda < \frac{1,1}{\sqrt{2}}$, так что $1/R < r_0 < 1$. Пусть, как и выше, выполнено более сильное условие $1/R < r_0/2 < 2r_0 < 1$. Снова представим $I_{\overline{1}2311}$ по схеме $\int\limits_{1/R}^{r_0/2} + \int\limits_{r_0/2}^{2r_0} + \int\limits_{2r_0}^{1}$, тогда $I_{\overline{1}2311} = I_{\overline{1}23111} + I_{\overline{1}23112} + I_{\overline{1}23113}$.

Положим $H_-(r, R, t) = \int\limits_{r_0/2}^{r} e^{ih_-(\rho, R, t)} d\rho$, $r_0/2 \leqslant r \leqslant 2r_0$. По лемме ван дер Корпута $|H_-| \leqslant ct^{-1/2} r_1^{3/2}(r)$. Учитывая, что $r_0 \geqslant \lambda$, а значит, $r_0^{-1/2} \leqslant \lambda^{-1/2} = R^{-1/2} t^{1/2}$, и интегрируя по частям в выражении

$$I_{\overline{1}23112} = t^{-1} R^{1/2} \int\limits_{r_0/2}^{2r_0} \frac{dH_-}{dr} r_1^{-1} r^{-1/2} dr,$$

получим оценку $|I_{\overline{1}23112}| \leqslant ct^{-1}$.

Покажем, что $|I_{\overline{1}23111}| + |I_{\overline{1}23113}| \leqslant ct^{-1}$. С этой целью рассмотрим соотношения

$$H_{1-}(r, R, t) = \int\limits_{1/R}^{r} e^{-ih_-(\rho, R, t)} \rho^{-1/2} d\rho, \quad \frac{1}{R} \leqslant r \leqslant \frac{r_0}{2},$$

$$H_{2-}(r, R, t) = \int\limits_{2r_0}^{r} e^{ih_-(\rho, R, t)} \rho^{-1/2} d\rho, \quad 2r_0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Покажем, что с некоторыми постоянными c_1, c_2 верны оценки

$$|H_{1-}(r, R, t)| \leqslant c_1 R^{-1/2}, \quad |H_{2-}(r, R, t)| \leqslant c_2 R^{-1/2}. \tag{15}$$

Установим первую из них. При $1/R < \rho < r \leqslant r_0/2$ функция $h'_- = t\left(\frac{\rho}{r_1(\rho)} - \lambda\right) = t(\nu(\rho) - \lambda) \neq 0$ и поэтому имеем

$$H_{1-}(r, R, t) = \frac{1}{it} \int\limits_{1/R}^{r} \frac{d}{d\rho} e^{i(tr_1 - R\rho)} \frac{\rho^{-1/2} d\rho}{\nu(\rho) - \lambda} = \frac{1}{it} \frac{r^{-1/2}}{\nu(r) - \lambda} e^{i(tr_1 - Rr)} -$$

$$- \frac{1}{it} \frac{R^{1/2}}{\nu(1/R) - \lambda} e^{i(tr_1(1/R) - 1)} - \frac{1}{it} \int\limits_{1/R}^{r} e^{i(tr_1 - R\rho)} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^{-1/2}}{(\nu(\rho) - \lambda)} d\rho = B_1 +$$

$$+ B_2 + B_3.$$

Очевидно, $|B_2| \leqslant \frac{R^{1/2}}{t\,|\nu(1/R) - \lambda|}$. Поскольку $\lambda = \nu(r_0)$, $1/R < r_0/2 < r_0$, то $|\nu(1/R) - \lambda| = |\nu(1/R) - \nu(r_0)| = \left|\frac{1}{R} - r_0\right| |\nu'(\theta)|$, где $1/R \leqslant \theta \leqslant r_0$. Но так как $\nu'(\rho) = r_1^{-3}(\rho)$ — монотонно убывающая функция, то $\nu'(\rho) \geqslant r_1^{-3}(1) = 2^{-3/2} = \delta$, значит, $|\nu(1/R) - \lambda| \geqslant \delta\,|1/R - r_0| \geqslant \frac{\delta}{2} r_0$. С другой стороны, $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, и так как $\lambda < \frac{1,1}{\sqrt{2}}$, то $r_0 \geqslant \delta_1 \lambda = \delta_1 R/t$.

Отсюда следует $|B_2| \leqslant \frac{2R^{1/2}t}{t\delta\delta_1 R} = c_1 R^{-1/2}$. Далее, $|B_1| \leqslant \frac{r^{-1/2}}{t|\nu(r)-\lambda|} = \frac{r^{-1/2}}{t|\nu(r)-\nu(r_0)|} \leqslant \frac{r^{-1/2}}{t|r-r_0|\nu'(\theta)|} \leqslant \frac{r^{-1/2}}{t|r-r_0|\delta}$. Но, поскольку $\frac{1}{R} < r < \frac{r_0}{2}$, то $|r-r_0| \geqslant \frac{r_0}{2} \geqslant \frac{\delta_1}{2}\frac{R}{t}$. Отсюда и из предыдущей оценки для $|B_1|$ получаем $|B_1| \leqslant c_2 R^{-1/2}$.

Оценим $|B_3|$:

$$|B_3| \leqslant \frac{1}{t}\int_{1/R}^{r} \left|\frac{d}{d\rho}\frac{\rho^{-1/2}}{(\nu(\rho)-\lambda)}\right| d\rho \leqslant \frac{1}{t}\int_{1/R}^{r} \frac{\nu'(\rho)\rho^{-1/2}}{(\nu(\rho)-\lambda)^2}\,d\rho +$$

$$+ \frac{1}{2t}\int_{1/R}^{r} \frac{\rho^{-3/2}d\rho}{\lambda-\nu(\rho)} = D_1 + D_2.$$

Поскольку $1/R < \rho < 1$, то $\delta = 2^{-3/2} \leqslant \nu'(\rho) \leqslant 1$; учитывая снова, что $\lambda = \nu(r_0)$, получаем $|\nu(\rho)-\lambda| = \nu(r_0) - \nu(\rho) = (r_0-\rho)\nu'(\theta) \geqslant \delta(r_0-\rho)$, $\rho^{-1/2} < R^{1/2}$, тогда

$$D_1 \leqslant \frac{R^{1/2}}{\delta^2 t}\int_{1/R}^{r} \frac{d\rho}{(r_0-\rho)^2} \leqslant \frac{R^{1/2}}{\delta^2 t(r_0-r)} + \frac{R^{1/2}}{\delta^2 t(r_0-1/R)} \leqslant \frac{4R^{1/2}}{\delta^2 t r_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4R^{1/2}t}{\delta_1\delta^2 tR} = \frac{4}{\delta_1\delta^2}R^{-1/2}.$$

Далее имеем

$$D_2 = \frac{1}{2t}\int_{1/R}^{r} \frac{\rho^{-3/2}d\rho}{\nu(r_0)-\nu(\rho)} \leqslant \frac{1}{2\delta t}\int_{1/R}^{r} \frac{\rho^{-3/2}d\rho}{r_0-\rho} \leqslant \frac{1}{2\delta t(r_0-r)}\int_{1/R}^{r} \rho^{-3/2}d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta t r_0}(r^{-1/2}+R^{1/2}) \leqslant \frac{4R^{1/2}t,}{\delta t\delta_1 tR} = \frac{4}{\delta\delta_1}R^{-1/2}.$$

Поэтому $|B_3| \leqslant c_3 R^{-1/2}$, и $|H_{1-}(r,R,t)| \leqslant c_1 R^{-1/2}$.

Аналогично доказывается вторая из оценок (15).

Запишем соотношение

$$I_{123111}^{-} = t^{-1}R^{1/2}\int_{1/R}^{r_0/2} e^{ih_-(r,R,t)} r_1^{-1} r^{-1/2} dr = t^{-1}R^{1/2}\int_{1/R}^{r_0/2} \frac{dH_{1-}(r,R,t)}{dr} r_1^{-1} dr,$$

интегрируя здесь по частям и учитывая первую из оценок (15), получаем оценку $|I_{123111}^{-}| \leqslant ct^{-1}$. Подобным образом доказывается, что $|I_{123113}^{-}| \leqslant ct^{-1}$. Неравенство (7) следует теперь из полученных оценок.

2. Доказательство оценки (9). Напомним, что

$$\widetilde{K}_t^{\frac{n-3}{2}}(R) = K(R) = R^{-(n/2-1)}\int_0^t r_1^{-\frac{(n-1)}{2}} \sin tr_1 \mathcal{J}_{n/2-1}(Rr)\,\varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr, \quad (16)$$

а $\varphi(s) \in C^\infty[0,\infty)$, $\varphi(s) \equiv 1$ при $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, $\varphi(s) \equiv 0$ при $s > 1$ и $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant 1$.

Покажем, что

$$\int_0^\infty |K(R)| R^{n-1} dR \leqslant ct^{n/2}.$$

Рассматривается случай $n \geqslant 4$, поскольку при $n \leqslant 3$ оценка решения уравнения Клейна — Гордона в L_p-метрике получается из явного представления решения. Из интегрального представления для $\mathcal{J}_{n/2-1}$ следует, что $K(R)$ не имеет особенностей при конечных R. Удобно рассматривать отдельно случаи: а) $0 \leqslant R \leqslant t$; б) $t \leqslant R \leqslant 2t$; в) $2t \leqslant R < \infty$. В случае а) используем тот факт, что $\sin tr_1 = -\frac{d}{dr}(\cos tr_1)\frac{r_1}{tr}$ и интегрируем по частям в формуле (16). Если $0 \leqslant R \leqslant 1$, то легко доказать, что

$$\int_0^1 |K(R)| R^{n-1} dR \leqslant ct^{1/2}.$$

Если $1 < R < t$, то используется асимптотическое представление для бесселевых функций, что приводит, как и в п. 1, к оценке интегралов вида

$$K^{\pm}(R) = t^{-1} R^{-\frac{(n-3)}{2}} \int_0^t e^{ih_{\pm}(r,R,t)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

При этом для ядра $K^+(R)$ получается оценка

$$\int_1^t |K^+(R)| R^{n-1} dR \leqslant ct^{n/2-1/2} \ln t,$$

что следует из леммы ван дер Корпута, поскольку $|h'_+| \geqslant R$. В случае ядра K^- этот подход неприменим, ибо h' обращается в 0 на интервале $[0, t]$.

Использование второй части леммы ван дер Корпута также затруднительно, так как в появляющуюся при этом оценку $|H_-(r, R, t)| \leqslant \leqslant ct^{-1/2} r_1^{3/2}(r)$ входит растущий при больших t множитель $r_1^{3/2}(r)$, который не может быть скомпенсирован за счет $\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}}$. Поэтому применяется другой способ, идея которого была высказана авторами в работе [1], однако, в ее реализации допущена ошибка.

Обозначим

$$I^- = I^-(R, t) = \int_0^t e^{ih_-(r,R,t)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr,$$

значит, $t^{-1} R^{-\frac{(n-3)}{2}} I^{-1} = K^-(R)$.

Мы хотим доказать, что $\int_1^t |K^-(R)| R^{n-1} dR \leqslant ct^{n/2}$, т. е. что $\int_1^t R^{n/2+1/2} \times \times |I^-| dR \leqslant ct^{n/2+1}$. Обозначим $\mathcal{J}(R, t) = \int_1^R |I^-(\rho, t)| d\rho$. Тогда

$$\int_1^t R^{n/2+1/2} |I^-| dR = \mathcal{J}(t, t)\, t^{n/2+1/2} - \frac{n+1}{2} \int_1^t \mathcal{J}(R, t) R^{n/2-1/2} dR \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathcal{J}(t, t)\, t^{n/2+1/2},$$

ибо $\mathcal{J}(R, t) \leqslant \mathcal{J}(t, t)$. Поэтому достаточно установить оценку

$$\mathcal{J}(t, t) \leqslant ct^{1/2}. \tag{17}$$

При этом достаточно считать, что

$$I^- = \int_1^t e^{ih_-(r,R,t)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

Здесь можно r/r_1 заменить асимптотическим разложением $r/r_1 = 1 + + 0(r^{-2})$, при этом

$$I^- = I_1^- + I_2^- = \int_1^t e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr + \int_1^t e^{ih_-(r,R,t)} 0(r^{-2}) \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

Для слагаемого I_2^- нужная оценка получается интегрированием по частям и использованием второй части леммы ван дер Корпута. Оценим I_1^-:

$$I_1^- = \int_1^{r_0/2} e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr + \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr + \int_{2r_0}^{t} e^{ih_-(r,R,t)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr =$$

$$= I_{11}^- + I_{12}^- + I_{13}^-,$$

где r_0 — нуль функции h' на $[1, t]$. При этом рассмотрим наиболее трудный случай $1 < r_0/2 < 2r_0 < t$. Случай $r_0 \notin [1, t]$ обсудим ниже.

Пусть $H_{1-} = \int_1^r e^{ih_-(\rho,R,t)} d\rho$, $1 \leqslant r \leqslant r_0/2$. Так как φ вещественна, можно считать, что $h'_-(\rho, R, t) = t(\lambda - \nu(\rho))$, $\nu(\rho) = \rho/r_1(\rho)$ монотонно возрастает, и потому $|h'_-(\rho, R, t)| \geqslant t(\lambda - \nu(\rho)) > 0$, $1 \leqslant \rho \leqslant r < \frac{r_0}{2}$.

Из первой части леммы ван дер Корпута следует

$$|H_{1-}(r, R, t)| \leqslant \frac{2}{R - t\nu(r)}. \tag{18}$$

Интегрируя по частям в выражении

$$I_{11}^-\left(\frac{r_0}{2}, R, t\right) = \int_1^{r_0/2} \frac{dH_{1-}(r, R, t)}{dr} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr$$

и используя (18), получаем $\left|I_{11}^-\left(\frac{r_0}{2}, R, t\right)\right| \leqslant \dfrac{c}{t\left(\nu(r_0) - \nu\left(\frac{r_0}{2}\right)\right)}$. Поскольку $\nu(r_0) - \nu\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{r_0}{2}\nu'(\theta r_0)$, $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$, $\nu'(r) = r_1^{-3}(r) \geqslant r_1^{-3}(1) = \delta$, получаем

$$|I_{11}^-| \leqslant \frac{c_1}{tr_0} = \frac{c_1\sqrt{1-\lambda^2}}{t\lambda} = \frac{c_1\sqrt{1-\lambda^2}}{R},$$

откуда, поскольку $\lambda = R/t \leqslant 1$, имеем $|I_{11}^-| \leqslant cR^{-1}$.

С другой стороны, из определения I_{11}^- ясно, что $|I_{11}^-| \leqslant ct$. Из этих двух неравенств получаем

$$|I_{11}^-| \leqslant \frac{ct^{1/4}}{R^{3/4}}.$$

Отсюда следует

$$\int_1^t |I_{11}^-(R, t)|\, dR \leqslant ct^{1/4} \int_0^s \frac{dR}{R^{3/4}} = c_1 t^{1/2}.$$

Аналогично получается оценка $\int_1^t |I_{13}^-|\, dR \leqslant c_1 t^{1/2}$.

При оценке I_{12}^- мы считаем, что r_0 велико, так как если $r_0 \leqslant \mathrm{const}$, то I_{12}^- легко оценить с помощью второй части леммы ван дер Корпута. Эти соображения применимы при $r_0 > 1$. Имеем

$$I_{12}^- = \int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr = \frac{i}{R}\left[e^{i(tr_1(2r_0) - 2Rr_0)} \varphi\left(\frac{2r_0}{t}\right) -\right.$$

$$\left. - e^{i\left(tr_1\left(\frac{r_0}{2}\right) - R\frac{r_0}{2}\right)} \varphi\left(\frac{r_0}{2t}\right)\right] + \frac{t}{R}\int_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1 - Rr)} \frac{r}{r_1} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr -$$

$$-\frac{i}{Rt}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1-Rr)}\varphi'\left(\frac{r}{t}\right)dr = \frac{1}{R}\Phi_1(r_0, R, t) + \frac{t}{R}\int\limits_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1-Rr)}\frac{r}{r_1}\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr +$$

$$+\frac{1}{Rt}\Phi_2(r, R, t). \tag{19}$$

Учитывая, что при больших $r_0\ \frac{r}{r_1} = 1 + 0(r^{-2})$, из (19) получаем

$$I_{\overline{12}} = \frac{\Phi_1(r_0, R, t)}{R-t} + \frac{\Phi_2(r_0, R, t)}{t(R-t)} + \frac{t}{R-t}\Phi_3(r_0, R, t), \tag{20}$$

где $\Phi_3 = \int\limits_{r_0/2}^{2r_0} e^{i(tr_1-Rr)}0(r^{-2})\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr$, а $\left|\frac{\Phi_1}{R-t} + \frac{\Phi_2}{t(R-t)}\right| \leqslant \frac{c}{t-R}$.

Оценивая Φ_3 с помощью второй части леммы ван дер Корпута, получаем

$$|\Phi_3| \leqslant ct^{-1/2}r_0^{-1/2}. \tag{21}$$

Ввиду того, что $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}r_0 \gg 1$ означает, что $r_0 = O((1-\lambda)^{-1/2})$, значит, из (21) следует $|\Phi_3| \leqslant ct^{-1/2}(1-\lambda)^{1/4}$.

Тогда $\frac{t}{t-R}|\Phi_3| = \frac{1}{1-\lambda}|\Phi_3| \leqslant \frac{ct^{-1/2}}{(1-\lambda)^{3/4}}$ и

$$\int\limits_1^t \frac{t}{t-R}|\Phi_3|\,dR \leqslant ct^{-1/2}\int\limits_1^t \frac{dR}{(1-\lambda)^{3/4}} \leqslant ct^{1/2}\int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{3/4}} = c_1t^{1/2}.$$

Заметим, что представление (20) получено при $1 \ll r_0 < t$, а поскольку $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, то это означает, что $R < \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$, т. е. (20) верно при $R < \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$.

Поэтому

$$\int\limits_1^t |I_{\overline{12}}|\,dR = \int\limits_1^{t^2/\sqrt{1+t^2}} |I_{\overline{12}}|\,dR + \int\limits_{t^2/\sqrt{1+t^2}}^t |I_{\overline{12}}|\,dR = Q_1 + Q_2.$$

Из (20) и последующих оценок вытекает

$$Q_1 \leqslant c\int\limits_1^{t^2/\sqrt{1+t^2}} \frac{dR}{t-R} + ct^{-1}\int\limits_1^{t^2/\sqrt{1+t^2}} \frac{dR}{(1-\lambda)^{3/4}} \leqslant c_1 \ln\frac{t-1}{t - t^2/\sqrt{1+t^2}} +$$

$$+ c_2 < ct^{1/2},$$

ибо $t - t^2/\sqrt{1+t^2} = 0(t^{-1})$ при больших t.

Поскольку справедливо тривиальное неравенство $|I_{\overline{12}}| \leqslant ct$, то $Q_2 \leqslant \leqslant t0(t^{-1}) = 0(1) < ct^{1/2}$.

Этим доказано, что $\int\limits_1^t |I_{\overline{12}}|\,dR < ct^{1/2}$, если $0 \leqslant R \leqslant t$. В случае $t \leqslant \leqslant R \leqslant 2t$ замечаем, что

$$I_{\overline{1}} = \int\limits_1^t e^{i(tr_1-Rr)}\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr = \int\limits_1^t \frac{dH_-(r, R, t)}{dr}\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr,$$

где $H_-(r,R,t)=\int\limits_1^r e^{i(tr_1(\rho)-R\rho)}d\rho$, $1\leqslant r\leqslant t$, а $|h'_-|=R-t\frac{\rho}{r_1(\rho)}\geqslant R-$ $-t\frac{r}{r_1}\geqslant R-t$, значит, $|H_-(r,R,t)|\leqslant\frac{c}{R-t}$ и $|I_1^-|^{3/4}\leqslant\frac{c}{(R-t)^{3/4}}$.

С другой стороны, очевидно, $|I_1^-|^{1/4}\leqslant ct^{1/4}$, поэтому $|I_1^-|\leqslant\frac{ct^{1/4}}{(R-t)^{3/4}}$, откуда следует

$$\int\limits_t^{2t}|I_1^-|\,dR\leqslant ct^{1/2}. \tag{22}$$

Осталось рассмотреть случай в) и доказать, что

$$\int\limits_{2t}^{\infty}|K(R)|\,R^{n-1}dR\leqslant ct^{n/2}. \tag{23}$$

Используя известное [5] соотношение

$$[r^s\mathcal{J}_s(r)]'=r^s\mathcal{J}_{s-1}(r),$$

записываем $K(R)$ в виде

$$K(R)=R^{-n}\int\limits_0^t\frac{d}{dr}\,[(Rr)^{n/2}\mathcal{J}_{n/2}\,(Rr)]\,r_1^{-\frac{(n-1)}{2}}\sin tr_1\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr,$$

а затем интегрируем по частям; повторяя эту процедуру m раз, получаем

$$K(R)=K_m(R)+K_{m-1}(R)+\ldots+K_0(R)+K_{-1}(R)+\ldots+K_{-m}(R),$$

где

$$K_m(R)=t^mR^{-\left(\frac{n}{2}-1\right)-m}\int\limits_0^t r^{\frac{n}{2}+m}\mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr)\,r_1^{-\frac{n-1}{2}-m}\sin\left(tr_1-m\frac{\pi}{2}\right)\times$$
$$\times\,\varphi\left(\frac{r}{t}\right)dr,$$

$$K_{-m}(R)=t^{-m}R^{-(n/2-1)-m}\int\limits_{t/2}^t r^{n/2+m}\mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr)\,r_1^{-m}\sin tr_1\varphi^{(m)}\left(\frac{r}{t}\right)dr.$$

Промежуточные слагаемые имеют вид

$$K_{m-j}(R)=t^{m-j}R^{-(n/2-1)-m}\int\limits_0^t r^{n/2+m}\mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr)\,d_{jm}(r)\sin\left(tr_1-\delta_j\frac{\pi}{2}\right)dr,$$

где гладкие функции d_{jm} при $r\to\infty$ суть $0\,(r^{-n/2+1/2-m})$.

Схема оценки этих слагаемых одинакова, поэтому рассмотрим только главный член $K_m(R)$.

В соответствии с разбиением $\int\limits_0^t=\int\limits_0^{1/R}+\int\limits_{1/R}^1$ мы получаем

$$K_m(R)=K_{m1}(R)+K_{m2}(R).$$

При оценке K_{m1} на промежутке интегрирования $Rr<1$, и $|\mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr)|\leqslant$ $\leqslant c\,(Rr)^{n/2+m-1}$. С учетом этого получаем

$$|K_{m1}(R)|\leqslant ct^mR^{-n/2+1-m}\int\limits_0^{1/R}r^{n+2m-1}R^{n/2+m-1}dr=ct^mR^{-n-2m},$$

значит,

$$\int\limits_{2t}^{\infty}|K_{m1}(R)|\,R^{n-1}dR\leqslant ct^m\int\limits_{2t}^{\infty}R^{-2m-1}dR.$$

Последний интеграл сходится, если $m \geqslant 1$, причем

$$\int_{2t}^{\infty} |K_{m1}(R)| R^{n-1} dR \leqslant ct^{-m}.$$

При оценке $K_{m2}(R)$ используется асимптотическое представление для $\mathcal{J}_{n/2+m-1}(Rr)$, значит, следует оценить интегралы вида

$$K_{m2}^{\pm} = t^m R^{-\frac{(n-1)}{2}-m} \int_{1/R}^{t} r^{\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}} r_1^{-\frac{(n-1)}{2}-m} e^{i(tr_1 \pm Rr)} \varphi\left(\frac{r}{t}\right) dr.$$

В этом случае $|h'_{\pm}(\rho, R, t)| = \left| t \frac{\rho}{r_1(\rho)} \pm R \right| \geqslant \frac{R}{2}$, ибо $R \geqslant 2t$, и необходимые оценки получаются, если применить первую часть леммы ван дер Корпута. В итоге имеем

$$\int_{2t}^{\infty} |K_{m2}(R)| R^{n-1} dR \leqslant ct^{n/2-1/2}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (9).

1. *Marshall B., Straus W., Wainger S.* L_p — L_q estimates for the Klein-Gordon equation // J. Math. pures et appl.— 1980.— **59**, N 4. — P. 417—440.
2. *Fefferman C., Stein E.* H^p-spaces of several variables // Acta Math.— 1972.—**129**. — P. 137—193.
3. *Марковский А. И.* Замечания об L_p — L_q оценках решений уравнения Клейна — Гордона.— Донецк, 1991.— 48 с.— (Препринт / АН Украины. Ин-т прикл. математики и механики; 91.03).
4. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции.— М. : Мир, 1984.— 469 с.
5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М. : Гостехтеоретиздат, 1953.— 369 с.
6. *Зигмунд С.* Тригонометрические ряды.— М. : Мир, 1968.— Т. 2.— 537

Получено 09.10.91