

О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов Фурье

Доказана сильная суммируемость Карлемана рядов Фурье непрерывных на m -мерном торе функций, частичные суммы которых построены по полиэдрам некоторого класса.

Доведена сильна сумовність Карлемана рядів Фур'є неперервних на m -вимірному торі функцій, часткові суми яких побудовані за поліедрями деякого класу.

В настоящей статье изучается поведение частичных сумм Фурье, построенных по полиэдрам некоторого класса, непрерывных на m -мерном торе $T^m = [-\pi, \pi]^m$ функций.

Пусть V — полиэдр в R^m , звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой, такой, что продолжения всех его граней не проходят через начало координат. Предположим также, что коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей, определяющих грани полиэдра, являются алгебраическими числами; \mathcal{W} — множество полиэдров с указанными свойствами;

$$S_{nV}(f, x) = \sum_{k \in nV \cap Z^m} c_k(f) e^{ikx} \quad (1)$$

— n -я частичная сумма ряда Фурье функции f , построенная по полиэдру V ($c_k(f)$ — k -й коэффициент Фурье функции f , Z^m — целочисленная решетка в R^m , $nV = \{x \in R^m, x/n \in V\}$ — гомотет V).

Функция ψ , определенная на полуоси $(0, \infty)$, принадлежит классу Ψ , если она положительна, не убывает и

$$\lim_{u \rightarrow 0} \psi(u) = \psi(0) = 0.$$

Следуя [1], полагаем

$$h_n(f, \psi, V, x) = (n+1)^{-1} \sum_{i=0}^n \psi(|f(x) - S_{iV}(f, x)|).$$

Легко показать (см., например, [2]), что если $\varphi, \psi \in \Psi$ и

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} < \infty,$$

то из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f, \psi, V, x) = 0, \quad (2)$$

выполняемого в некоторой точке $x_0 \in T^m$ или равномерно на множестве $E \subset T^m$, вытекает справедливость аналогичного равенства для функции φ соответственно в точке x_0 или равномерно на E . Поэтому достаточно рассматривать функции вида $e^\varphi - 1$, $\varphi \in \Psi$.

При $m = 1$, $\varphi(x) = ax$, $a > 0$, равенство (2) доказано Карлеманом [3].

Теорема 1. Пусть полиэдр $V \in \mathcal{W}$. 1. Если $\varphi \in \Psi$ такова, что

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) u^{-1/m} < \infty,$$

то для любой $f \in C(T^m)$ равномерно по x справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f, \exp(\varphi) - 1, V, x) = 0.$$

II. Если же

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) u^{-1/m} = \infty,$$

то существует функция $F \in C(T^m)$, для которой

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_n(F, \exp(\varphi) - 1, V, 0) = \infty.$$

Для случая, когда V — параллелепипед с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, эта теорема доказана Л. Д. Гоголадзе [1], в общем случае — она анонсирована в [4].

Заметим, что вторая часть теоремы справедлива для любого полиэдра V , $\text{int } V \neq \emptyset$, и следует из оценки нормы оператора взятия частичной суммы (см., например, [5])

$$\|S_{nV}\| = \sup_{|f| \leq 1} \|S_{nV}(f)\|_{C(T^m)} \geq c \ln^m n.$$

Для доказательства первой части теоремы нам понадобятся следующие результаты.

Л е м м а. Для любого полиэдра $V \in \mathcal{W}$ существует постоянная $d = d(V) > 0$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ множества $(n + dn^{-m-1})V \setminus nV$ не содержат точек решетки Z^m .

В самом деле, пусть $\Gamma = \{x \in R^m, \sum \alpha_i x_i = 1\}$ — одна из гиперплоскостей, определяющих полиэдр V . Из теоремы о совместных приближениях алгебраических чисел [6, с. 118] следует, что либо $\sum \alpha_i k_i - n = 0$ для некоторых $k \in Z^m$ и $n \in \mathbb{N}$, либо существует постоянная c_Γ такая, что для любых $k \in Z^m, n \in \mathbb{N}$

$$|\sum \alpha_i k_i - n| \geq c_\Gamma q^{-m-1},$$

где $q = \max_i |k_i|$. Для $k \in (n + 1)V \setminus nV$ $q \leq c_1 n$. Поскольку расстояние от точки k до грани $n\Gamma$ равно $|\sum \alpha_i k_i - n| (\sum \alpha_i^2)^{-1/2}$, полагаем

$$d = c_\Gamma^{-m-1} \min_{\Gamma} c_\Gamma (\sum \alpha_i^2)^{-1/2}.$$

Теорема 2. Пусть полиэдр $V \in \mathcal{W}$. Для любых $p > 0$ и $f \in L_\infty(T^m)$

$$(n + 1)^{-1} \sum_{l=0}^n |S_{lV}(f, 0)|^p \leq c^p (p + 1)^{mp} \|f\|_\infty^p, \quad (3)$$

где $c = c(m, V)$ — некоторая постоянная, не зависящая от f, n и p ($\|f\|_\infty = \text{vraisup } |f|$).

Отметим, что для параллелепипедов с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, это утверждение приведено в [7].

До к а з а т е л ь с т в о. 1. $p \geq 1$. В этом случае

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|f| \leq 1} (n + 1)^{-1/p} \left(\sum_{l=0}^n |S_{lV}(f, 0)|^p \right)^{1/p} = (n + 1)^{-1/p} \sup_{|f| \leq 1} \sup_{\varepsilon} \left| \sum_{l=0}^n \varepsilon_l S_{lV}(f, 0) \right|,$$

где $\varepsilon_l, 0 \leq l \leq n$, — любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{l=0}^n |\varepsilon_l|^p \leq 1 \quad \text{при } p > 1, \quad q = \frac{p}{p-1},$$

$$|\varepsilon_l| \leq 1 \quad \text{при } p = 1.$$

Заметив, что $c_k(f) = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} f(x) e^{-ikx} dx$, внесем сумму в (1) под знак интеграла и возьмем $\sup_{\varepsilon} \sup_{f \in \bar{f}}$; имеем

$$I = (n + 1)^{-1/p} \sup_{\varepsilon} \int_{T^m} \left| \sum_{l=0}^n \varepsilon_l \sum_{k \in lV \cap Z^m} e^{ikx} \right| dx.$$

Положим

$$\lambda_l = (n+1)^{-1/p} \sum_{i=l}^n \varepsilon_i, \quad 0 \leq l \leq n, \quad \lambda_{n+1} = 0.$$

Тогда

$$I = \sup_{T^m} \int \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} \right| dx.$$

Легко показать, что

$$\sum_{l=0}^n |\lambda_l - \lambda_{l+1}| \leq 1 \quad (4)$$

и для любых $s, l, 1 \leq s \leq n+1, 0 \leq l \leq n+1-s,$

$$|\lambda_l - \lambda_{l+s}| \leq \left(\frac{s}{n+1} \right)^{1/p}. \quad (5)$$

Исходя из последовательности λ_l , построим непрерывную на отрезке $[0, 1]$ функцию λ . Пусть $d > 0$ — постоянная из леммы. Определим на отрезке $[0, 1 + dn^{-m-2}]$ функцию $\tilde{\lambda}$ следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda_l \text{ при } \frac{l-1 + dn^{-m-1}}{n} \leq t \leq \frac{l}{n}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

$$\tilde{\lambda}(0) = \lambda_0, \quad \tilde{\lambda}(1 + dn^{-m-2}) = 0$$

и линейна на оставшихся промежутках. Положим теперь

$$\lambda\left(\frac{t}{1 + dn^{-m-2}}\right) = \tilde{\lambda}(t).$$

Пусть $\rho(y) = \rho_V(y) = \inf\{\rho > 0, y \in \rho V\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{T^m} \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} \right| dx &= \int_{T^m} \left| \sum_{k \in nV} \tilde{\lambda}\left(\frac{\rho(k)}{n}\right) e^{ikx} \right| dx = \\ &= \int_{T^m} \left| \sum_{k \in nV} \lambda\left(\frac{\rho(k)}{n + dn^{-m-1}}\right) e^{ikx} \right| dx. \end{aligned}$$

Оценка последнего интеграла для непрерывной функции $\lambda, \lambda(1) = 0$, проведена в [8]. Из нее следует

$$I \leq c(m, V) \sup_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{d\lambda}(r)| \frac{\ln^{m-1}(2 + |r|)}{1 + |r|} dr, \quad (6)$$

где $\widehat{d\lambda}(r) = \int_0^1 e^{-tr} d\lambda(t)$ — преобразование Фурье $d\lambda$. Если перейти в (6) от функции λ к функции $\mu(t) = \lambda(t) + \lambda(0)(t-1), 0 \leq t \leq 1$, то нетрудно показать, что

$$I \leq c_1(m, V) \sup_{\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}(r)| \ln^{m-1}(2 + |r|) dr + 1 \right]. \quad (7)$$

По построению в силу (4), (5) μ — функция ограниченной вариации, $V(\mu) \leq 2$, кроме того, $\mu \in \text{Lip } \frac{1}{p(m+2)}$ с константой, не зависящей от n . Оценивая интеграл в (7) аналогично тому, как это сделано при доказательстве следствия 2 из [9], получаем

$$I \leq c_2(m, V) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} i^{m-1} 2^{i/2} \|\mu(t + 2^{-i-2}) - \right.$$

$$\begin{aligned} & -\mu(t-2^{-j-2})\|c\|\mu(t+2^{-j-2})-\mu(t-2^{-j-2})\|_L = \\ & = O(1) + O(1) \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} 2^{-\frac{j}{2(m+2)p}} = O(p^m), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2. $0 < \rho < 1$. Применим неравенство Иенсена

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |S_{IV}(f, 0)|^{\rho} \right)^{1/\rho} \leq (n+1)^{-1} \sum_{i=0}^n |S_{IV}(f, 0)|.$$

Теорема 2 доказана.

Пусть $E_{nV}(f) = \inf_T \|f - T\|_{C(T^m)}$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром в nV .

Теорема 3. Для любых $f \in C(T^m)$, $V \in W$, $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{l=n_0}^n |f(x) - S_{IV}(f, x)|^{\rho} \leq c^{\rho} (\rho + 1)^{m\rho} \sum_{l=[n_0/2]}^n E_{lV}^{\rho}(f), \quad (8)$$

$n, n_0 = 1, 2, \dots, c = c(m, V).$

Оценки вида (8) известны, поэтому приведем лишь схему доказательства. Пусть n_0, n заданы. Выберем q, r так, чтобы $2^{q-1} \leq n_0 < 2^q$, $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Тогда

$$\sum_{l=n_0}^n |f - S_{IV}(f)|^{\rho} = \left(\sum_{l=n_0}^{2^q-1} + \sum_{j=q}^{r-1} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} + \sum_{l=2^r}^n \right) |f - S_{IV}(f)|^{\rho}.$$

Оценим среднюю сумму. Пусть \tilde{T}_j — полином наилучшего приближения со спектром в 2^jV , т. е. $\|f - \tilde{T}_j\| = E_{2^jV}(f)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=q}^{r-1} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} |f - S_{IV}(f)|^{\rho} & \leq 2^{\rho} \sum_{j=q}^{r-1} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1} (|f - \tilde{T}_j|^{\rho} + |S_{IV}(f - \tilde{T}_j)|^{\rho}) \leq \\ & \leq c^{\rho} (\rho + 1)^{m\rho} \sum_{j=q}^{r-1} 2^j E_{2^jV}^{\rho}(f) \leq c^{\rho} (\rho + 1)^{m\rho} \sum_{l=2^{q-1}}^{2^r-1} E_{lV}^{\rho}(f). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством (3) и монотонностью $E_{IV}(f)$. Оставшиеся суммы оцениваются аналогично.

Доказательство теоремы 1. В силу сделанного в начале статьи замечания теорему достаточно доказать для функции $\exp(u^{1/m}) - 1$. Пусть $n_0 \in N$, $n_0 < n$;

$$\begin{aligned} & (n+1)^{-1} \sum_{i=n_0}^n \exp(|f(x) - S_{IV}(f, x)|^{1/m}) - 1 = \\ & = (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{l=n_0}^n |f(x) - S_{IV}(f, x)|^{s/m} \leq \\ & \leq (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_1^s}{s!} \left(\frac{s}{m} + 1 \right)^s \sum_{l=[n_0/2]}^n E_{lV}^{s/m}(f) \leq \\ & \leq (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l=[n_0/2]}^n (c_2 E_{lV}^{1/m})^s. \end{aligned}$$

Выбирая n_0 достаточно большим и устремляя n к ∞ , получаем искомый результат.

З а м е ч а н и е. Арифметические условия на границу полиэдра можно ослабить. Они используются лишь в теореме 2 при построении функции λ , для которой интеграл (7) есть $O(p^m)$. Вопрос, можно ли доказать теорему 1 в общем случае, остается открытым.

1. Гоголадзе Л. Д. О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Тбилиси, 1984.— 256 с.
2. Гоголадзе Л. Д. О сильной суммируемости почти всюду // *Мат. сб.*— 1988.— 135, № 2.— С. 158—168.
3. Carleman T. A theorem concerning Fourier series // *Proc. London Math. Soc.*—1923.—21.— P. 483—492.
4. Кузнецова О. И. О сильной суммируемости кратных рядов Фурье // Докл. расшир. заседаний сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.—1988.—3, № 2.—С. 65—68.
5. Подкорытов А. Н. Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // *Вестн. Ленингр. ун-та.*— 1982.— № 7.— С. 110—111.
6. Шмидт В. Диофантовы приближения.— М.: Мир, 1983.— 232 с.
7. Гоголадзе Л. Д. О сильных средних типа Марцинкевича // *Сообщ. АН ГССР.*— 1981.— 102, № 2.— С. 293—295.
8. Подкорытов А. Н. Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам // *Вестн. Ленингр. ун-та.*— 1980.— № 1.— С. 51—58.
9. Подкорытов А. Н. О суммировании кратных рядов Фурье.— Л., 1978.— 11 с.— *Деп. в ВИНТИ*, № 3066—78.

Получено 09.10.94