УДК 519.21

С. Я. Махно, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Сходимость диффузионных процессов

Для стохастических диффузионных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметра, получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости решений к решению стохастического диффузионного уравнения.

Для стохастичних дифузійних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від параметра, одержані необхідні та достатні умови слабкої збіжності розв'язків до розв'язку стохастичного дифузійного рівняння.

В работе исследуется сходимость распределений решений $\xi^\varepsilon(t)$ уравнения

$$\xi^\varepsilon(t) = x^\varepsilon + \int_0^t b^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))\,ds + \int_0^t \sigma^\varepsilon(s, \xi^\varepsilon(s))\,dw^\varepsilon(s) \tag{1}$$

при $\varepsilon \to 0$. Уравнения указанного вида укладываются в схему книги [1], где приведены необходимые и достаточные условия слабой сходимости ξ^ε в терминах «близости на допредельных траекториях». С другой стороны, в [2] получены аналитические условия типа (V), (N) слабой сходимости решений (1). В этой статье получены отличные от приведенных в [1] условия слабой сходимости ξ^ε в смысле «близости на допредельных траекториях», устанавливается их связь с условиями типа (V), (N).

Обозначим через E_d d-мерное евклидово пространство, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение его элементов, ∇ — символ градиента. Для функциональных пространств используем обычные [3,4] обозначения L_p, $L_{p,\mathrm{loc}}$, $W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$, $C_0^\infty(E_d)$ и т. п. Норму в $L_{p,\mathrm{loc}}$ обозначим символом $\|\cdot\|_{p,\mathrm{loc}}$, слабую сходимость функций в $L_{2,\mathrm{loc}}$ обозначим символом $\rightharpoonup$. Различные постоянные, независящие от ε, будем обозначать через c, E — символ математического ожидания.

Через $\mathbb{C}[0, T]$ обозначим пространство непрерывных функций $x(s)$ со значениями в E_d, $\mathcal{M}_t = \sigma\{x(s), s \leqslant t\}$. Рассматриваемые процессы $\xi^\varepsilon(t)$, $\xi(t)$ являются марковскими и ниже используется обычная символика марковских процессов.

В уравнении (1) $b^\varepsilon(t, x)$ — d-мерный вектор, $\sigma^\varepsilon(t, x)$ — $d \times k$-мерная матрица, $t \in [0, T]$, $x \in E_d$, $w^\varepsilon(t)$ — при каждом $\varepsilon > 0$ стандартный винеровский процесс. Обозначим $a^\varepsilon = \sigma^\varepsilon(\sigma^\varepsilon)'$, $'$ — символ транспонирования. Будем говорить, что выполнено условие (*), если:

1) функции $b_i^\varepsilon(t, x)$ измеримы, функции $a_{ij}^\varepsilon(t\ x)$ непрерывны;
2) существуют постоянные $c > 0$, $\lambda > 0$ такие, что

$$|b_i^\varepsilon(t, x)|^2 + |a_{ij}^\varepsilon(t, x)| \leqslant c(1 + |x|^2),$$

$$(a^\varepsilon\theta, \theta) \geqslant \lambda|\theta|^2, \ \forall\, \theta > 0.$$

При $d = 1$ п. 1 в условии (*) можно ослабить. Будем говорить, что выполнено условие (**), если $d = 1$ и

1) функции $b^\varepsilon(t, x)$, $a^\varepsilon(t, x)$ измеримы;
2) существуют постоянные $c > 0$, $\lambda > 0$ такие, что

$$|b^\varepsilon(t, x)| + a^\varepsilon(t, x) \leqslant c, \ a^\varepsilon(t, x) \geqslant \lambda.$$

При условиях (*) ((**)) уравнение (1) имеет единственное слабое решение [5] ([6]) и процессы $\xi^\varepsilon(t)$ являются марковскими. Если коэффициенты $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ удовлетворяют условию линейного роста, то для решений уравнения (1) справедливы оценки [7]

$$E \sup_{t \in [0, T]} |\xi^\varepsilon(t)|^2 \leqslant c(1 + |x^\varepsilon|^2), \tag{2}$$

$$E|\xi^\varepsilon(t)-\xi^\varepsilon(s)|^4 \leqslant c|t-s|^2. \tag{3}$$

Отсюда следует, что при $|x^\varepsilon| \leqslant c$ семейство мер μ^ε, порожденных процессами ξ^ε на пространстве $\mathbb{C}[0, T]$, слабо компактно. Слабую сходимость мер и слабую сходимость процессов будем обозначать $\Rightarrow$. При $\varepsilon \to 0$ ξ^ε будет слабо сходиться к решению стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t b(s, \xi(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s))\, dw(s). \tag{4}$$

С коэффициентами $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ и $(b, a = \sigma\sigma')$ свяжем операторы L^ε и L:

$$L^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + (b^\varepsilon, \nabla) + \frac{1}{2}(a^\varepsilon\nabla, \nabla),$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (b, \nabla) + \frac{1}{2}(a\nabla, \nabla).$$

Для произвольной ограниченной области $D \subset E_d$ будем говорить, что $D \in O^2$, если ее граница $\partial D \in O^2$ [3]. Положим

$$\Gamma_t = \{(s, x):(s \in [0, t), x \in \partial D) \cup (s = t, x \in D)\},\ \tau_D^\varepsilon = \inf\{t : \xi^\varepsilon(t) \in \partial D\}.$$

Лемма 1. *Пусть функции $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ удовлетворяют условию* (*) ((**)), *$f^\varepsilon(t, x)$ — измеримая функция, $t \in [0, T]$, $x \in D$, такая, что $\sup\limits_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in D}} |f^\varepsilon(t, x)| \leqslant c$ и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv = 0. \tag{5}$$

Тогда для любой $F(x) \in L_{d+1}(D)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} F(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) dv = 0.$$

Доказательство. Установим, что предел в (5) равен нулю равномерно по $s \in [0, t]$, $x \in D$. Для этого рассмотрим граничную задачу

$$L^\varepsilon u^\varepsilon = -f^\varepsilon,\ s \in [0, t),\ x \in D,$$

$$u^\varepsilon|_{\Gamma_t} = 0.$$

Эта задача имеет единственное решение в классе $W_{d+1}^{1,2}([0, t] \times D)$ [3, 8]. Используем ее вероятностное представление

$$u^\varepsilon(s, x) = E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv.$$

Отсюда следует, что $|u^\varepsilon(s, x)| \leqslant c$ и согласно (5) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(s, x) = 0$. Устанавливаемая равномерность есть следствие равномерной по ε гельдеровости функций $u^\varepsilon(s, x)$ ([4], теорема IV. 2.7).

Пусть $F(x) \in C_0^\infty(D)$. Тогда для любого разбиения $s = t_1 < t_2 < \ldots \ldots < t_k = t$

$$E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} F(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv = \sum_{r=1}^{k-1} E_{s,x} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \chi(v < \tau_D^\varepsilon)[F(\xi^\varepsilon(v)) -$$

$$- F(\xi^\varepsilon(t_r))] f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv + \sum_{r=1}^{k-1} E_{s,x} F(\xi^\varepsilon(t_r)) \int_{t_r}^{t_{r+1}\wedge\tau_D^\varepsilon} f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv = J_1^\varepsilon + J_2^\varepsilon. \tag{6}$$

Используя (3), оценим J_1^ε:

$$|J_1^\varepsilon| \leqslant c \max_r |t_{r+1} - t_r|^{1/2}.$$

Оценим $J_{2,r}^\varepsilon$. В силу марковости процесса $\xi^\varepsilon(t)$

$$|J_{2,r}^\varepsilon| = |E_{s,x} F(\xi^\varepsilon(t_r))\, u^\varepsilon(t_r, \xi^\varepsilon(t_r))| \leqslant c \sup_{x\in D} |u^\varepsilon(t_r, x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Таким образом, в (6) второе слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а первое может быть сделано равномерно по ε сколь угодно малым выбором разбиения. Лемма для $F \in C_0^\infty(D)$ доказана. Пусть $F \in L_{d+1}(D)$ и $F_n \in C_0^\infty(D)$ такая, что $\| F - F_n \|_{d+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Используя оценку Крылова [9], получаем

$$\left| E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} F(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv \right| \leqslant \left| E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} [F(\xi^\varepsilon(v)) - F_n(\xi^\varepsilon(v))] \times \right.$$

$$\left. \times f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv \right| + \left| E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} F_n(\xi_\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv \right| \leqslant c \| F - F_n \|_{d+1} +$$

$$+ \left| E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} F_n(\xi^\varepsilon(v)) f^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv \right|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу вначале по $\varepsilon \to 0$, а затем по $n \to \infty$, получаем искомое. Лемма доказана.

В дальнейшем E^μ означает усреднение по мере μ.

Лемма 2. *Пусть функции $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ удовлетворяют условию (*) ((**)) и $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu$. Тогда для любого $\mathcal{M}_s$-измеримого непрерывного ограниченного функционала $\varphi_s(x)$ и любой $\Phi(v, x) \in L_{d+1}([s, t] \times D)$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\varphi_s(\xi^\varepsilon) \int_s^t \Phi(v, \xi^\varepsilon(v))\, dv = E^\mu \varphi_s(x) \int_s^t \Phi(v, x(v))\, dv.$$

Утверждение леммы очевидно для непрерывных ограниченных $\Phi(v, x)$. В общем случае он устанавливается с помощью оценки Крылова, как это сделано при доказательстве леммы 1.

Примем условие А.

Условие А. *Существуют функции (b, a), удовлетворяющие условию (*) ((**)) такие, что для любой ограниченной области $D \in O^2$, $s, t \in [0, T]$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} |b_i^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) - b_i(v, \xi^\varepsilon(v))|\, dv = 0, \quad i = \overline{1, d},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_{s,x} \int_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon} |a_{ij}^\varepsilon(v, \xi^\varepsilon(v)) - a_{ij}(v, \xi^\varepsilon(v))|\, dv = 0, \quad i, j = \overline{1, d}.$$

Теорема 1. *Пусть для функций $(b^\varepsilon, a^\varepsilon)$ выполнено условие (*)((**)), $x^\varepsilon \to x$. Для того чтобы $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$, необходимо и достаточно выполнение условия А.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) \in C^2(D)$. Применяя формулу Ито, получаем

$$E_{s,x}\int\limits_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon}(L^\varepsilon f)(v,\xi^\varepsilon(v))dv=E_{s,x}f(\xi^\varepsilon(t\wedge\tau_D^\varepsilon))-f(x),\ x\in D,$$

$$E_{s,x}\int\limits_s^{t\wedge\tau_D}(Lf)(v,\xi(v))\,dv=E_{s,x}f(\xi(t\wedge\tau_D))-f(x),\ x\in D,$$

$$\tau_D=\inf\{t>s,\ \xi^\varepsilon(t)\in\partial D\}.$$

В [7, с. 579] доказано, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}E_{s,x}f(\xi^\varepsilon(t\wedge\tau_D^\varepsilon))=E_{s,x}f(\xi(t\wedge\tau_D)),$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}E_{s,x}\int\limits_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon}F(v,\xi^\varepsilon(v))\,dv=E_{s,x}\int\limits_s^{t\wedge\tau_D}F(v,\xi(v))\,dv,\ \forall F\in L_{d+1}([s,t]\times D).$$

Из этих соотношений следует

$$\lim_{\varepsilon\to0}E_{s,x}\int\limits_s^{t\wedge\tau_D^\varepsilon}[L^\varepsilon f-Lf](v,\xi^\varepsilon(v))\,dv=0. \tag{7}$$

Положив в (7) $f(x)=x_i$, получим первое равенство в условии А. Выбрав в (7) $f(x)=x_ix_j$ и воспользовавшись леммой 1, получим второе равенство в условии А.

Достаточность. Как отмечалось, семейс во мер μ^ε слабо компактно. Пусть μ — одна из предельных точек и $\mu^{\varepsilon'}\Rightarrow\mu$ при $\varepsilon'\to0$. Применим к процессу $\xi^\varepsilon(t)$ и функции $\Phi(x)\in C_0^\infty(E_d)$ формулу Ито, тогда для любого $\mathcal{M}_s$-измеримого непрерывного ограниченного функционала $\varphi_s(x)$

$$E\varphi_s(\xi^\varepsilon)\left[\Phi(\xi^\varepsilon(t))-\Phi(\xi^\varepsilon(s))-\int\limits_s^t(L^\varepsilon\Phi)(v,\xi^\varepsilon(v))\,dv\right]=0.$$

Переходя к пределу по подпоследовательности $\varepsilon'\to0$ и используя вначале лемму 1, а затем лемму 2, получаем

$$E^\mu\varphi_s(x)\left[\Phi(x(t))-\Phi(x(s))-\int\limits_s^t(L\Phi)(v,x(v))\,dv\right]=0.$$

Таким образом, мера μ является решением проблемы мартингалов для коэффициентов (b,a). Из единственности этого решения [5, 6] следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Введем условия V, N, позволяющие конструктивно описывать коэффициенты предельного процесса (4). Отметим, что здесь они пишутся в несколько отличной от [2] форме.

Условие V. *Существует последовательность функций* $v_k^\varepsilon(t,x)\in\in W^{1,2}_{d+1,\mathrm{loc}}$, $k=\overline{1,d}$, *такая, что*

1. $\hat{b}_k^\varepsilon\overset{\mathrm{def}}{=}b_k^\varepsilon+\frac{1}{2}(a^\varepsilon\nabla,\nabla)v_k^\varepsilon\underset{\varepsilon\to0}{\to}b_k$;

2. $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\sup\limits_{\substack{t\in[0,T]\\x\in D}}|v_k^\varepsilon(t,x)|=0$ *для любой ограниченной области* $D\subset E_d$;

3. $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left\|\frac{\partial}{\partial t}v_k^\varepsilon+(b^\varepsilon,\nabla v_k^\varepsilon)+\hat{b}_k^\varepsilon-b_k\right\|_{d+1,\mathrm{loc}}=0.$

Условие N. *Существует последовательность функций* $N_{kl}^{\varepsilon}(t, x) = N^{\varepsilon}(t, x) \in W_{d+1,\mathrm{loc}}^{1/2}$, $k, l = \overline{1, d}$, *такая, что*

1. $\hat{a}_{kl}^{\varepsilon} \overset{\mathrm{def}}{=} a_{kl}^{\varepsilon} + (a_{kl}^{\varepsilon}\nabla, \nabla) N_{kl}^{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} a_{kl}$;

2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in D}} |N_{kl}^{\varepsilon}(t, x)| = 0$ *для любой ограниченной области* $D \subset E_d$;

3. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left\| \dfrac{\partial}{\partial t} N_{kl}^{\varepsilon} + (b^{\varepsilon}, \nabla N_{kl}^{\varepsilon}) + \hat{a}_{kl}^{\varepsilon} - a_{kl} \right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0.$

Вектор-функцию b и матричную функцию a, определяемые условиями V, N, будем называть предельными для функций $(b^{\varepsilon}, a^{\varepsilon})$.

Теорема 2. *Пусть* $x^{\varepsilon} \to x$, *для функций* $(b^{\varepsilon}, a^{\varepsilon})$ *выполнены условия* $(*)$ $((**))$, V, N *и предельные функции* (b, a) *также удовлетворяют условию* $(*)$ $((**))$. *Тогда* $\xi^{\varepsilon} \Rightarrow \xi$.

Доказательство. Покажем, что при сделанных предположениях выполнено условие А. Применим формулу Ито

$$E_{s,x} \int\limits_{s}^{t\wedge\tau_D^{\varepsilon}} [b_k^{\varepsilon}(v, \xi^{\varepsilon}(v)) - b_k(v, \xi^{\varepsilon}(v))]\, dv = E_{s,x} [v_k^{\varepsilon}(s, x) -$$

$$- v_k^{\varepsilon}(t \wedge \tau_D^{\varepsilon}, \xi^{\varepsilon}(t \wedge \tau_D^{\varepsilon}))] - E_{s,x} \int\limits_{s}^{t\wedge\tau_D^{\varepsilon}} \left[\frac{\partial}{\partial v} v_k^{\varepsilon} + (b^{\varepsilon}, \nabla v_k^{\varepsilon}) + \hat{b}_k^{\varepsilon} - b_k\right] dv.$$

Отсюда, из условия V и оценки Крылова следует первое равенство условия А. Аналогично доказывается и второе требование условия А. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 1. Теорема доказана.

Таким образом, из условий V и N следует справедливость условия А. Выясним, насколько сами условия V, N близки к необходимым условиям для сходимости ξ^{ε} к ξ. Введем условие H.

Пусть $f^{\varepsilon}(t, x) \in L_2([0, T] \times D)$ и $u^{\varepsilon}(t, x) \in W_2^{1,2}([0, T] \times D)$ — решение граничной задачи

$$L^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = f^{\varepsilon},\ t \in [0, T),\ x \in D,$$

$$u^{\varepsilon}|_{\Gamma_T} = 0.$$

Условие H. *Если* $\|f^{\varepsilon}\|_2 \leqslant c$, *то* $\|u^{\varepsilon}\|_{W_2^{1,2}} \leqslant c$.

Отметим, что условие H выполнено при $d = 1$ и условии $(**)$, $d = 2$ и условии $(*)$ для матриц a^{ε}, удовлетворяющих условию Кордеса [10].

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнений* (1), (4) *удовлетворяют условию* $(*)$ $((**))$, H *и* $\xi^{\varepsilon} \Rightarrow \xi$. *Тогда выполнены условия* V, N.

Доказательство. Проверим справедливость условия N.

Условие V устанавливается аналогично. Определим $N_{kl}^{\varepsilon}(t, x)$ как решение задачи Коши:

$$L^{\varepsilon} N_{kl}^{\varepsilon} = \frac{1}{2}(a_{kl} - a_{kl}^{\varepsilon}),\ t \in [0, T),\ x \in E_d,$$

$$N_{kl}^{\varepsilon}(T, x) = 0.$$

Пусть D — произвольная ограниченная область в E_d и $D \subset D_1$ — ограниченная область в E_d, $\rho(x) \in C^{\infty}$ и $\rho(x) = 1$ при $x \in D$, $\rho(x) = 0$ при $x \notin D_1$. Определим функцию $g_{kl}^{\varepsilon}(t, x)$ как решение граничной задачи

$$L^{\varepsilon} g_{kl}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho(a_{kl} - a_{kl}^{\varepsilon}),\ t \in [0, T),\ x \in D_1,$$

$$g_{kl}^{\varepsilon}(T, x) = 0,\ g_{kl}^{\varepsilon}|_{\partial D_1} = 0. \tag{8}$$

Решение этой граничной задачи существует и единственно в классе $W_{d+1}^{1,2}([0, T] \times D_1)$ [3, 8]. Ясно, что $N_{kl}^{\varepsilon}(t, x) = g_{kl}^{\varepsilon}(t, x)$ при $x \in D$. Т. е. $N_{kl}^{\varepsilon} \in W_{d+1,\mathrm{loc}}^{1,2}$. Воспользуемся вероятностным представлением для g_{kl}^{ε}:

$$g_{kl}^{\varepsilon}(t, x) = \frac{1}{2} E_{t,x} \int_t^{T \wedge \tau_{D_1}^{\varepsilon}} \rho(\xi^{\varepsilon}(s)) [a_{kl}^{\varepsilon}(s, \xi^{\varepsilon}(s)) - a_{kl}(s, \xi^{\varepsilon}(s))] \, ds.$$

Так как в силу теоремы 1 выполнено условие A, то по лемме 1 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g_{kl}^{\varepsilon}(t, x) = 0$. Отсюда и равномерной по ε гельдеровости решений задачи (8) [4] вытекает второе требование условия N. Третье требование условия N выполняется в силу определения функций N_{kl}^{ε}. Далее, так как $\| g_{kl}^{\varepsilon} \|_{W_2^{1,2}} \leqslant c$, то существует последовательность, вновь обозначенная g_{kl}^{ε}, такая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{kl}^{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L_2([0, T] \times D)} 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{kl}^{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} 0.$$

Следовательно,

$$\hat{a}_{kl}^{\varepsilon} = a_{kl} - 2 \frac{\partial}{\partial t} N_{kl}^{\varepsilon} - 2 (b^{\varepsilon}, \nabla N_{kl}^{\varepsilon}) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} a_{kl}.$$

Условие N установлено. Теорема доказана.

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. —М. : Наука, 1986.— 512 с.
2. *Махно С. Я.* Достаточные условия для сходимости решений стохастических уравнений // Теория случайн. процессов.— 1988.— Вып. 16.— С. 66—72.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
4. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.— М. : Наука, 1985.— 374 с.
5. *Strook D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional Diffusion Process.— Berlin; Heidelberg; New York : Springer-Verlag, 1979.— 338 p.
6. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— **24**, вып. 2.— С. 348—360.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
8. *Веретенников А. Ю.* О сильных и слабых решениях одномерных стохастических уравнений с граничными условиями // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— **26**, вып. 4.— С. 685—701.
9. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М. : Наука, 1977.— 398 с.
10. *Алхутов Ю. А., Мамедов И. Т.* Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Мат. сб.— 1986.— **131**, вып. 4.— С. 477—500.

Получено 09.10.91