УДК 517.54

В. И. Рязанов, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Критерий дифференцируемости по Белинскому и его следствия

Получены необходимые и достаточные условия дифференцируемости по Белинскому квазиконформных отображений в точке.

Одержані необхідні і достатні умови диференційовності за Белінським квазіконформних відображень у точці.

Данная статья представляет собой естественное развитие результатов Тейхмюллера [1], Виттиха [2], Лехто [3], Райха, Волькзака [4], П. П. Белинского [5], Б. В. Шабата и других авторов по вопросам дифференцируемости квазиконформных отображений.

На основе полученной в работе теоремы и следствий из нее выведено представление через квазиконформные отображения решений с особенностями логарифмического типа для одного известного уравнения математической физики. Это представление аналогично представлению Шиффера — Шобера [6], которое было доказано при условии типа Дини на существенный модуль непрерывности характеристики конформного отображения, а при более слабых предположениях, с условием типа Тейхмюллера — Виттиха — Белинского, сформулировано в [7]. Единственное условие, которое требуется здесь, состоит в аппроксимативной непрерывности.

1. Определения и предварительные замечания. Q-квазиконформное (Q-к. к.) отображение есть гомеоморфное обобщенное решение $w = f(z)$ уравнения Бельтрами $f_{\bar z} = \mu(z) f_z$, где $\mu \in L^\infty$ и $|\mu(z)| \leqslant q = (Q-1)/(Q+1) < 1$. Функцию $\mu(z)$ принято называть (комплексной) характеристикой отображения $f(z)$.

Если характеристика $\mu(z)$ непрерывна в точке z_0, то, как, по-видимому, впервые установлено П. П. Белинским [5, с. 41], $w = f(z)$ дифференцируемо в z_0 в следующем смысле:

$$\Delta w = A(\rho)[\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z} + o(\rho)], \tag{1}$$

где $\mu_0 = \mu(z_0)$, $\rho = |\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta} z|$, $A(\rho)$ зависит только от ρ, а $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$.

Отметим, что в отличие от обычного дифференциала $A(\rho)$ может не иметь определенного конечного предела при $\rho \to 0$. Однако, как будет показано ниже, функция $A(\rho)$ обладает при этом дополнительным свойством

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \tag{2}$$

для любого $t > 0$.

Дифференцируемость в смысле (1) с дополнительным условием (2) будет в дальнейшем именоваться как дифференцируемость по Белинскому. В дальнейшем μ_0 в соотношении (1) не обязательно равно $\mu(z_0)$.

Как показывает пример $w = z(1 - \ln|z|)$ Б. В. Шабата [5, с. 40], при непрерывной комплексной характеристике $\mu(z)$ отображение может быть не дифференцируемым в обычном смысле, но, тем не менее, оно дифференцируемо по Белинскому в нуле. Это демонстрирует естественность последнего понятия для квазиконформных отображений.

2. Критерий дифференцируемости по Белинскому. Используемое ниже понятие сходимости, комплексных характеристик $\mu_n(z) \xrightarrow{\text{ch.}} \mu(z)$ введено и изучено в работе [8].

Теорема 1. *Для квазиконформного отображения $w = f(z)$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя с нормировками $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$f(z)$ дифференцируемо по Белинскому в нуле с $\mu_0 = 0$;*

2) *$\mu(tz) \xrightarrow{\text{ch.}} 0$ при $t \to 0$ в смысле характеристик;*

3) *существует предел*

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{f(z')}{f(z)} - \frac{z'}{z} \right\} = 0 \tag{3}$$

при $|z'| \leqslant \delta |z|$ для любого $\delta \geqslant 0$;

4) *для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ существует*

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta. \tag{4}$$

При этом предел в (4) *является локально равномерным относительно ζ.*

Замечание 1. Аналогично показывается, что при выполнении одного из условий 1—4 теоремы 1 функция $A(\rho)$ из (1) удовлетворяет (2) локально равномерно относительно $t \in \mathbb{R}^+$ и существует

$$\lim_{\rho,\rho' \to 0} \frac{A(\rho')}{A(\rho)} = 1 \tag{5}$$

для пар $\rho, \rho' > 0$ таких, что $0 < \delta \leqslant \rho'/\rho \leqslant \Delta < \infty$.

Следствие 1. *Для любого квазиконформного отображения $w = f(z)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$f(z)$ дифференцируемо по Белинскому в точке z_0, т. е. удовлетворяет соотношениям* (1), (2);

2) *$\mu_t(z) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mu_0$ в смысле характеристик при $t \to 0$, где $\mu_t(z) = \mu(z_0 + t(z - z_0))$, $0 < t \leqslant 1$.*

Следствие 2. *Если комплексная характеристика $\mu(z)$ квазиконформного отображения $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, то $f(z)$ дифференцируемо по Белинскому в этой точке, т. е. удовлетворяет соотношениям* (1), (2), *с* $\mu_0 = \mu(z_0)$.

Следствие 3. *Если $\mu(z)$ аппроксимативно непрерывна в точке z_0, то $f(z)$ дифференцируемо по Белинскому в этой точке с $\mu_0 = \mu(z_0)$.*

Функция $\mu(z)$ называется аппроксимативно непрерывной в точке z_0, если существует измеримое множество E такое, что $\mu(z) \to \mu(z_0)$ при $z \to z_0$ по множеству E и z_0 является точкой плотности E, т. е. $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{mes} E \cap D(z_0; \varepsilon) / \operatorname{mes} D(z_0; \varepsilon) = 1$, где $D(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}$ [9, с. 199]. Как легко видеть, это условие эквивалентно тому, что $\mu_t(z) \to \mu_0 = \mu(z_0)$ по мере при $t \to 0$. Последнее, в свою очередь, влечет сходимость $\mu_t(z) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mu_0$ в смысле характеристик [8, с. 202].

Доказательство теоремы 1. Общая схема доказательства эквивалентности утверждений 1—4 теоремы 1 следующая: 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2) и 4) $\Leftrightarrow$ 1).

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим семейство отображений $g_\rho(\zeta) = f(\rho\zeta)/f(\rho)$, $\rho \in (0, 1]$, $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$. По построению $g_\rho(0) = 0$, $g_\rho(1) = 1$ и $g_\rho(\infty) = \infty$. В силу условия 2 $g_\rho(\zeta) \to \zeta$ при $\rho \to 0$ локально равномерно [8, с. 201]. Далее, рассмотрим семейство отображений

$$F(\zeta; z) = \frac{g_{|z|}\left(\frac{z}{|z|}\zeta\right)}{g_{|z|}\left(\frac{z}{|z|}\right)} = \frac{f(z\zeta)}{f(z)}, \tag{6}$$

где $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, а $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Заметим, что $F(\zeta; z) = f(z')/f(z)$ при $\zeta_n = z'/z$. Покажем, что $F(\zeta; z) - \zeta \to 0$ при $z \to 0$ равномерно относительно ζ в круге $U_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leqslant \delta\}$ для любого $\delta \geqslant 0$.

Допустим, что это не так. Тогда найдутся последовательности $\zeta_n \in U_\delta$ и $z_n \to 0$, а также $\varepsilon > 0$ такие, что $|F_n(\zeta_n) - \zeta_n| \geqslant \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $F_n(\zeta) = F(\zeta; z_n)$. Так как круг U_δ и единичная окружность являются компактами, то без ограничения общности можно считать при этом, что $\zeta_n \to \zeta_0 \in U_\delta$ и $\eta_n = z_n/|z_n| \to \eta_0$, $|\eta_0| = 1$.

Обозначим через $\varphi_n(\zeta)$ отображение $g_\rho(\zeta)$ при $\rho = |z_n|$. По неравенству треугольника имеем $|\varphi_n(\eta_n\zeta_n) - \eta_0\zeta_0| \leqslant |\varphi_n(\eta_n\zeta_n) - \eta_n\zeta_n| + |\zeta_n - \zeta_0| + \delta|\eta_n - \eta_0|$. Поскольку $\varphi_n(\zeta) \to \zeta$ локально равномерно, а $\eta_n\zeta_n \in U_\delta$, $n = 1, 2, \ldots$, то отсюда получаем, что $\varphi_n(\eta_n\zeta_n) \to \eta_0\zeta_0$. После этого остается заметить, что $F_n(\zeta_n) = \varphi_n(\eta_n\zeta_n)/\varphi(\eta_n) \to \zeta_0$ и, следовательно, $F_n(\zeta_n) - \zeta_n \to 0$. Полученное противоречие и доказывает соотношение (3).

3) $\Rightarrow$ 4). Положив в (3) $z' = z\zeta$ и $\delta = |\zeta|$, получаем (4).

4)$\Rightarrow$2) Рассмотрим семейство отображений $g_\rho(\zeta)$, $\rho \in (0, 1]$, $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, введенное в п. 1 доказательства. Из условия (4) имеем, что $g_\rho(\zeta) \to \zeta$ при $\rho \to 0$ поточечно, а следовательно, и локально равномерно относительно ζ [10, с. 76]. По определению это означает, что $\mu(\rho\zeta) \to 0$ в смысле характеристик.

4) $\Rightarrow$ 1). Для $z = \rho > 0$, $\zeta = e^{i\theta}$ и $\xi = z\zeta = \rho e^{i\theta}$ из (4) имеем $f(\xi) =$

$= f(\rho)(\zeta + \alpha(\rho))$, где $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом,

$$f(\xi) = \frac{f(\rho)}{\rho}(\xi + o(\rho)), \tag{7}$$

где $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, т. е. имеет место соотношение (1) с $A(\rho) = f(\rho)/\rho$ и $\mu_0 = 0$. Применяя соотношение (4) с $z = \rho > 0$ и $\zeta = t > 0$, получаем (2).

1) $\Rightarrow$ 4). Итак, пусть выполнены соотношения (1) и (2) с $\mu_0 = 0$. Тогда в силу (1) $f(z) = f(\rho)(z + o(\rho))$, $f(z\zeta) = A(|\zeta|\rho)(\zeta z + o(\rho))$, где $\rho = |z|$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Следовательно,

$$\frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \frac{A(|\zeta|\rho)}{A(\rho)} \frac{\zeta z + o(\rho)}{z + o(\rho)},$$

т. е. ввиду (2) справедливо (4).

Из п. 1 доказательства видно, что предел в (4) является локально равномерным относительно ζ.

В ходе доказательства теоремы 1 установлено, что в соотношении (1) $A(\rho) = f(\rho)/\rho$. Поэтому в силу (4) предел (2) также является локально равномерным относительно $t \in \mathbb{R}^+$ и

$$\frac{A(\rho')}{A(\rho)} = 1 + \frac{\rho}{\rho'}\left\{\frac{f(\rho')}{f(\rho)} - \frac{\rho'}{\rho}\right\},$$

а из (3) получаем (5).

3. Переход к логарифмической плоскости. На основе соотношения (3) из неравенства треугольника получаем следствие.

Следствие 4. *При выполнении посылок и одного из условий* 1—4 *теоремы* 1 *существует*

$$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{|f(z')|}{|f(z)|} - \frac{|z'|}{|z|}\right\} = 0 \tag{8}$$

при $|z'| \leqslant \delta |z|$ *для любого* $\delta \geqslant 0$.

Отсюда и из теоремы Штольца докажем следующую теорему.

Теорема 2. *При выполнении посылок и одного из условий* 1 — 4 *теоремы* 1 *существует*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln|f(z)|}{\ln|z|} = 1. \tag{9}$$

Следствие 5. *Если комплексная характеристика* $\mu(z)$ *квазиконформного отображения* $f(z)$ *с* $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$ *аппроксимативно непрерывна в нуле и* $\mu(0) = 0$, *то имеет место соотношение* (9).

Замечание 2. Делая переход к логарифмической плоскости, описанный в книге Лехто, Виртанена [10, с. 238], можно вполне однозначно и корректно задать $\ln f$ как функцию $\zeta = \ln z \in \mathbb{C}$, а используя комплексный аналог теоремы Штольца, доказать существование

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln f(z)}{\ln z} = 1. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 2. Допустим, что соотношение (9) не выполняется, т. е. существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $z_n \to 0$ такие, что

$$\left|\frac{\ln|f(z_n)|}{\ln|z_n|} - 1\right| \geqslant \varepsilon \tag{11}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Для сокращения записи введем обозначения $t_n = -\ln|z_n|$ и $\tau_n = -\ln|f(z_n)|$. Тогда (11) перепишется в виде

$$\left|\frac{\tau_n}{t_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon. \tag{12}$$

При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $t_n - t_{n-1} \geqslant 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Далее, вставляя, если нужно, между соседними членами последовательности t_n, $n = 1, 2, \ldots$, их среднее арифметическое, можно добиться, чтобы $t_n - t_{n-1} < 2$. При этом неравенство (12) сохраняется для бесконечного числа членов последовательности.

Таким образом, последовательность $\rho_n = |z_n| = e^{-t_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет неравенствам $e^{-2} < \rho_n/\rho_{n-1} \leqslant e^{-1}$. Из соотношения (8) получаем, что $\exp(\tau_{n-1} - \tau_n) = \exp(t_{n-1} - t_n) + \alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, или $\exp(\tau_{n-1} - \tau_n) = (1 + \beta_n)\exp(t_{n-1} - t_n)$ с $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда имеем $(\tau_n - \tau_{n-1}) = (t_n - t_{n-1}) + \gamma_n$ с $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ и, поскольку $t_n - t_{n-1} \geqslant 1$, $(\tau_n - \tau_{n-1})/(t_n - t_{n-1}) = 1 + \delta_n$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме Штольца тогда получаем, что $\tau_n/t_n \to 1$. Полученное противоречие с (12) и доказывает (9).

4. О представлении решений с особенностями логарифмического типа. Здесь речь пойдет об уравнении математической физики

$$\operatorname{div}(Q \operatorname{grad} U) = 0, \tag{13}$$

которое является основным уравнением в теории стационарных тепловых потоков, гидродинамике, магнито- и электростатике неоднородных сред.

Теорема 3. *Пусть $Q(z) : \overline{\mathbb{C}} \to [1, \infty)$ — функция класса L^∞. Тогда существует решение уравнения* (13) *с особенностями в точках z_0 и ∞, представимое в виде*

$$U(z, z_0) = \ln|f(z) - f(z_0)|, \tag{14}$$

где f — $Q(z)$-квазиконформное отображение, нормированное условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$.

При этом, если $Q(z)$ аппроксимативно непрерывна в точке z_0, а $Q(1/z)$ — в нуле, то существуют пределы

$$\lim_{z \to z_0} \frac{U(z, z_0)}{\ln|z - z_0|} = \frac{1}{Q(z_0)} \tag{15}$$

и

$$\lim_{z \to \infty} \frac{U(z, z_0)}{\ln|z|} = \frac{1}{Q(\infty)}. \tag{16}$$

Под решением уравнения (13) здесь понимается функция $U \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$, которая обладает локально сопряженной функцией $V \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ такой, что пара (U, V) удовлетворяет обобщенной системе Коши — Римана

$$V_x = QU_y, \; V_y = -QU_x. \tag{17}$$

Заметим также, что (17) эквивалентно комплексному уравнению

$$F_{\bar z} = -k\overline{F_z}, \tag{18}$$

где $F = U + iV$, а

$$k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1). \tag{19}$$

Решение уравнения (18) с указанным типом особенностей вещественной части строится из решения уравнения

$$f_{\bar z} = -k(z) \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{f(z) - f(z_0)}} \overline{f_z}. \tag{20}$$

Существование решения (20) доказывается с помощью решения экстремальной задачи о максимуме непрерывного функционала $A_r(f)$ площади образа $f(D(r))$ круга $D(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$ на компактном классе $\mathfrak{N}(\rho, R, k(z))$ нормальных по Альфорсу $f(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$ решений уравнения Бельтрами с носителями комплексных характеристик μ из кольца $D(\rho, R)=\{z\in\mathbb{C}:\rho\leqslant|z-z_0|\leqslant R\}$, $0<r<\rho<R<\infty$, и $|\mu(z)|\leqslant k(z)$. При $r\to 0$ из экстремалей предельным переходом получаем решение уравнения (20) в кольце $D(\rho, R)$, которое не является решением какой-либо экстремальной задачи. Затем, проведя дополнительную нормировку $f(1)=1$, при $\rho\to 0$ и $R\to\infty$ получаем решение уравнения (20) во всей плоскости с нормировками $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f(\infty)=\infty$.

Далее, рассмотрим отображение $\Phi(z)=\varphi(g(z))$, где $w=g(z)=f(z_0+z)-f(z_0)$ и $\varphi(w)=w|w|^{Q_0-1}$ с $Q_0=Q(z_0)$. Как легко видеть, $|\varphi(w)|=|w|^{Q_0}$ и, следовательно, $\ln|\Phi(z)|=Q_0\ln|g(z)|$. Кроме того,

$$\varphi_{\bar{w}}=k(z_0)\frac{w}{\bar{w}}\varphi_w \tag{21}$$

и

$$h_{\bar{w}}=k(z_0+h(w))\frac{w}{\bar{w}}h_w, \tag{22}$$

где h — отображение, обратное g. Таким образом, комплексная характеристика отображения $\Phi=\varphi\circ h^{-1}$ запишется в виде

$$\mathrm{M}(z)=\frac{k(z_0)-k(z_0+z)}{1-k(z_0)k(z_0+z)}\frac{g(z)}{\overline{g(z)}}\frac{\overline{g_z}}{g_z}. \tag{23}$$

Как видим, $\mathrm{M}(z)$ аппроксимативно непрерывна в нуле и $\mathrm{M}(0)=0$. Поскольку $\Phi(0)=0$ и $\Phi(\infty)=\infty$, то по теореме 2 получаем (15). Аналогично доказывается (16).

Вариационная процедура, приводящая к уравнению (20), более подробно описана в совместной с В. Я. Гутлянским статье, которая выходит в этом же номере.

1. *Teichmuller O.* Uhtersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutsche Math.— 1938.—3.— S. 621—678.
2. *Wittich H.* Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen // Math. Z. — 1948.— **51**.— S. 275—288.
3. *Lehto O.* On the differentiability of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation // Ann. Acad. Sci. Fenn.— 1960.— **275**.— P. 173— 189.
4. *Reich E., Walkzak H. R.* On the behavior of quasiconformal mappings at a point // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— **117**, N 5.— P. 338—351.
5. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений.— Новосибирск : Наука, 1974.— 98 с.
6. *Schiffer M., Schober J.* Representation of fundamental solution for generalised Cauchy-Reimann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn.— 1976.— **2**.— P. 501—531.
7. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* О фундаментальном решении одного уравнения математической физики // Комплексные методы в математической физике.— Донецк : Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1984. — С. 134.
8. *Рязанов В. И.* О сходимости характеристик квазиконформных отображений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 2.— С. 200—204.
9. *Сакс С.* Теория интеграла.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— 494 с.
10. *Lehto O., Virtanen K.* Quasikonforme Abbildung.— Berlin etc.: Springer, 1965.— 269 s.

Получено 09.10.91