DOI: 10.3842/umzh.v76i3.7849

УДК 517.54

Сергій Плакса[1] (Інститут математики НАН України, Київ; Університет м. Падуя, Італія)

ПРО НЕПЕРЕРВНЕ ПРОДОВЖЕННЯ НА МЕЖУ ОБЛАСТІ ІНТЕГРАЛА ТИПУ КОШІ ІЗ ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ПАРАМЕТРА ЩІЛЬНІСТЮ

We establish sufficient conditions for the continuous extension of a Cauchy-type integral whose density depends on the parameter to a nonsmooth integration line.

Встановлено достатні умови неперервного продовження інтеграла типу Коші, щільність якого залежить від параметра, на негладку лінію інтегрування.

Інтеграли типу Коші, щільність яких залежить від параметра, відіграють важливу роль при дослідженні композиції сингулярних інтегралів, в теорії сингулярних інтегральних рівнянь та крайових задач для аналітичних функцій комплексної змінної (див., наприклад, монографії [1 – 3], в яких досліджено граничні властивості таких інтегралів за класичних припущень про гладкість кривої інтегрування і гельдеровість щільності інтеграла).

У роботах [4 – 8] розвинено теорію інтеграла типу Коші, щільність якого є функцією лише однієї змінної, на довільній жордановій спрямлюваній кривій у розширених (у порівнянні з класами Гельдера) класах щільностей інтеграла. Методи, розвинені у цих роботах, застосовуються нижче для встановлення достатніх умов неперервного продовження інтеграла типу Коші, щільність якого залежить від параметра, на негладку лінію інтегрування. Намагання послабити умови на щільність інтеграла приводить до асиметричності припущень про задану функцію за різними змінними, що зустрічалось раніше в теорії сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші (див. [9]). Подібних узагальнень потребують, зокрема, нещодавні застосування інтегралів типу Коші в теорії крайових задач для бігармонічних функцій (див. [10]).

Нехай γ — замкнена жорданова спрямлювана крива в комплексній площині $\mathbb{C}$, а D^+ і D^- — відповідно внутрішня і зовнішня області площини $\mathbb{C}$, обмежені кривою γ. Розглядаючи одну з областей D^+ чи D^-, домовимось позначати її D.

Розглянемо інтеграл типу Коші

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(t,z)}{t-z}\,dt \quad \forall z\in D, \tag{1}$$

де щільністю інтеграла є неперервна на множині $\gamma\times\overline{D}$ функція $g:\gamma\times\overline{D}\to\mathbb{C}$.

Далі будемо вважати, що крива γ задовольняє умову (див. [5])

$$\theta(\varepsilon) := \sup_{x\in\gamma}\,\theta_x(\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0\,, \tag{2}$$

[1] E-mail: plaksa62@gmail.com.

де $\theta_x(\varepsilon) := \mathrm{mes}\,\gamma_\varepsilon(x)$, $\gamma_\varepsilon(x) := \{t \in \gamma\colon |t-x| \le \varepsilon\}$ і mes означає лінійну міру Лебега на кривій γ. Криві, що задовольняють умову (2), відіграють важливу роль при розв'язанні різноманітних проблем аналізу (див., наприклад, [5, 11 – 13]).

Для неперервної функції $g\colon \gamma \times \overline{D} \to \mathbb{C}$ розглянемо її модулі неперервності відповідно за першою та другою змінною:

$$\omega_{1,0}(g,\varepsilon) := \sup_{\substack{t_1,t_2\in\gamma\colon |t_1-t_2|\le\varepsilon\\ z\in\overline{D}}} \big|g(t_1,z)-g(t_2,z)\big|,$$

$$\omega_{0,1}(g,\varepsilon) := \sup_{\substack{z_1,z_2\in\overline{D}\colon |z_1-z_2|\le\varepsilon\\ t\in\gamma}} \big|g(t,z_1)-g(t,z_2)\big|.$$

Позначимо $d := \max_{x_1,x_2\in\gamma}|x_1-x_2|$. Для точки $z \in D$ через x_z позначатимемо одну з найближчих до неї точок кривої γ.

Доведемо допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай функція $g\colon \gamma\times\overline{D}\to\mathbb{C}$ неперервна на множині $\gamma\times\overline{D}$ і задовольняє оцінку*

$$\big|g(t,z)-g(t,x_z)\big| \le c\frac{\omega\big(|t-x_z|\big)}{|t-x_z|^\alpha}\,|z-x_z|^\alpha \quad \forall z\in D \quad \forall t\in\gamma\colon\ |t-x_z|\ge 2\,|z-x_z|, \tag{3}$$

де $\alpha\in(0,1]$, $\omega(\varepsilon)$ — неспадна обмежена мажоранта, що набуває додатних значень при $\varepsilon>0$ і задовольняє умову

$$\omega(\varepsilon)\to 0, \qquad \varepsilon\to 0, \tag{4}$$

а стала c не залежить від t, z і x_z. Тоді для всіх $z\in D$ таких, що $\delta := |z-x_z| < d/5$, виконується нерівність

$$\left|\int\limits_\gamma \frac{g(t,z)-g(x_z,z)-\big(g(t,x_z)-g(x_z,x_z)\big)}{t-z}\,dt\right|$$
$$\le c\left(\omega_{1,0}(g,2\delta)+\omega_{0,1}(g,\delta)+\delta^\alpha\int\limits_\delta^{2d}\frac{\omega(\eta)}{\eta^{1+\alpha}}\,d\eta\right), \tag{5}$$

де стала c не залежить від z, x_z і δ.

Доведення. Маємо співвідношення

$$\left|\int\limits_\gamma \frac{g(t,z)-g(x_z,z)-\big(g(t,x_z)-g(x_z,x_z)\big)}{t-z}\,dt\right|$$
$$\le \int\limits_{\gamma_{2\delta}(x_z)} \frac{\big|g(t,z)-g(x_z,z)\big|+\big|g(t,x_z)-g(x_z,x_z)\big|}{|t-z|}\,|dt|$$
$$+\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2\delta}(x_z)} \frac{\big|g(t,z)-g(t,x_z)\big|}{|t-z|}\,|dt| + \big|g(x_z,z)-g(x_z,x_z)\big|\left|\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{2\delta}(x_z)}\frac{dt}{t-z}\right|$$
$$:= I_1+I_2+I_3.$$

Враховуючи умову (2), отримуємо оцінку

$$I_1 \le \frac{2\,\omega_{1,0}(g,2\delta)}{\delta}\,\theta_{x_z}(2\delta) \le c\,\omega_{1,0}(g,2\delta).$$

Тут і далі в доведенні через c позначено сталі, значення яких не залежать від $z,\ x_z$ і δ, але, взагалі кажучи, різні навіть у межах одного ланцюжка нерівностей.

При оцінюванні інтеграла I_2 послідовно використовуються умова (3), твердження 7.2 з [14] (див. також доведення теореми 1 в роботі [15]) і умова (2) так, що при цьому

$$I_2 \le c\,\delta^\alpha \int\limits_{[2\delta,d]} \frac{\omega(\eta)}{\eta^{1+\alpha}} d\theta_{x_z}(\eta) \le c\,\delta^\alpha \int\limits_{\delta}^{d} \frac{\theta_{x_z}(2\eta)\omega(2\eta)}{\eta^{2+\alpha}} d\eta \le c\,\delta^\alpha \int\limits_{\delta}^{2d} \frac{\omega(\eta)}{\eta^{1+\alpha}} d\eta\,.$$

Крім того, справедлива оцінка (див. доведення теореми 1 в роботі [5])

$$I_3 \le 2\pi\,\omega_{0,1}(g,\delta).$$

Очевидним наслідком наведених оцінок є нерівність (5).

Сингулярний інтеграл розуміємо у сенсі головного значення за Коші

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{t-x}\,dt := \lim_{\delta\to 0+0} \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\delta(x)} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{t-x}\,dt \quad \forall x\in\gamma$$

і розглядаємо за умови Діні

$$\int\limits_{0}^{d} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty, \tag{6}$$

яка забезпечує його існування.

Лема 2. *Нехай функція* $g:\gamma\times\overline{D}\to\mathbb{C}$ *неперервна на множині* $\gamma\times\overline{D}$, *задовольняє умову* (6) *і оцінку*

$$\big|g(t,x_2)-g(t,x_1)\big| \le c\,\frac{\omega(|t-x_1|)}{|t-x_1|^\alpha}\,|x_2-x_1|^\alpha \quad \forall t,x_1,x_2\in\gamma:\ |t-x_1|\ge 2\,|x_2-x_1|, \tag{7}$$

де $\alpha\in(0,1]$, $\omega(\varepsilon)$ — *неспадна обмежена мажоранта, що набуває додатних значень при* $\varepsilon>0$ *і задовольняє умову* (4), *а стала* c *не залежить від* $x_1,\ x_2$ *і* t. *Тоді для всіх* $x\in\gamma$ *і всіх* $z\in D$ *таких, що* $\varepsilon:=|z-x|<d/9$, *виконується нерівність*

$$\left|\int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x_z)-g(x_z,x_z)}{t-z}\,dt - \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{t-x}\,dt\right|$$

$$\le c\left(\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta}\,d\eta + \varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{2d} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta^2}\,d\eta + \omega_{0,1}(g,2\varepsilon) + \varepsilon^\alpha\int\limits_{\varepsilon}^{2d} \frac{\omega(\eta)}{\eta^{1+\alpha}}\,d\eta\right),$$

де стала c *не залежить від* $z,\ x,\ x_z$ *і* ε.

Доведення. Використаємо різницю

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x_z)-g(x_z,x_z)}{t-z}\,dt - \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{t-x}\,dt$$

$$= \int\limits_{\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{g(t,x_z)-g(x_z,x_z)}{t-z}\,dt$$

$$- \int\limits_{\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{t-x}\,dt + (z-x) \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{(t-z)(t-x)}\,dt$$

$$+ \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{g(t,x_z)-g(t,x)}{t-z}\,dt + \big(g(x,x)-g(x_z,x_z)\big) \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{dt}{t-z}$$

$$=: J_1 - J_2 + J_3 + J_4 + J_5.$$

Подібно до оцінювання інтеграла I_2 маємо

$$|J_1|+|J_2|+|J_3| \le \int\limits_{\gamma_{5\varepsilon}(x_z)} \frac{\big|g(t,x_z)-g(x_z,x_z)\big|}{\frac{1}{2}\,|t-x_z|}\,|dt|$$

$$+ \int\limits_{\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{\big|g(t,x)-g(x,x)\big|}{|t-x|}\,|dt| + |z-x| \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{4\varepsilon}(x)} \frac{\big|g(t,x)-g(x,x)\big|}{\frac{1}{2}\,|t-x|\,|t-x|}\,|dt|$$

$$\le 2 \int\limits_{[0,5\varepsilon]} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta} d\theta_{x_z}(\eta) + \int\limits_{[0,4\varepsilon]} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta} d\theta_x(\eta) + 2\varepsilon \int\limits_{[4\varepsilon,d]} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta^2} d\theta_x(\eta)$$

$$\le c\left(\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta}\,d\eta + \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{2d} \frac{\omega_{1,0}(\eta)}{\eta^2}\,d\eta \right),$$

де стала c не залежить від $z,\ x,\ x_z$ і ε.

Інтеграли J_4 і J_5 оцінюються аналогічно інтегралам I_2 і I_3 відповідно.

Основним результатом роботи є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай функція* $g\colon \gamma\times\overline{D}\to\mathbb{C}$ *неперервна на множині* $\gamma\times\overline{D}$, *задовольняє умову* (6) *і оцінки* (3), (7). *Тоді інтеграл* (1) *неперервно продовжується на межу області* D, *при цьому*

$$\lim_{z\to x} G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x)-g(x,x)}{t-x}\,dt + \begin{cases} g(x,x), & \textit{якщо} \quad D=D^+, \\ 0, & \textit{якщо} \quad D=D^-, \end{cases} \qquad \forall x\in\gamma.$$

Доведення. Твердження теореми є наслідком рівностей

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,z)-g(x_z,z)}{t-z}\,dt + \frac{g(x_z,z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dt}{t-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,z) - g(x_z,z) - \big(g(t,x_z) - g(x_z,x_z)\big)}{t-z}\, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x_z) - g(x_z,x_z)}{t-z}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x) - g(x,x)}{t-x}\, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(t,x) - g(x,x)}{t-x}\, dt + \begin{cases} g(x_z,z), & \text{якщо} \quad z \in D^+, \\ 0, & \text{якщо} \quad z \in D^-, \end{cases}$$

а також лем 1 і 2.

Зауважимо, що в роботі [10] при зведенні крайових задач для гіперкомплексних моногенних функцій, асоційованих з основною бігармонічною задачею, до інтегральних рівнянь Фредгольма здійснено перевірку виконання умов вигляду (3) і (7) для функцій, якими виражаються ядра інтегральних операторів цих рівнянь.

Роботу виконано за фінансової підтримки UNIPD SRF та INdAM.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. W. Pogorzelski, *Integral equations and their applications*, vol. 1, Internat. Ser. Monogr. Pure and Appl. Math., **88**, Pergamon Press (1966).
2. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, Москва (1968).
3. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва (1977).
4. Н. А. Давыдов, *Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области*, Докл. АН СССР, **64**, № 6, 759 – 762 (1946).
5. В. В. Салаев, *Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой*, Мат. заметки, **19**, № 3, 365 – 380 (1976).
6. Т. С. Салимов, *Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой*, Науч. тр. МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук, № 5, 59 – 75 (1979).
7. Е. М. Дынькин, *Гладкость интегралов типа Коши*, Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР, **92**, 115 – 133 (1979).
8. О. Ф. Герус, *Оценка модуля непрерывности интеграла типа Коши в области и на ее границе*, Укр. мат. журн., **48**, № 10, 1321 – 1328 (1996).
9. С. А. Плакса, *О нетеровости сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на спрямляемой кривой*, Укр. мат. журн., **45**, № 10, 1379 – 1389 (1993).
10. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *A hypercomplex method for solving boundary value problems for biharmonic functions*, Algorithms as a Basis of Modern Appl. Math. (Stud. Fuzziness and Soft Comput.), **404**, 231 – 255 (2021).
11. L. Ahlfors, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math., **65**, 157 – 194 (1935).
12. G. David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Lecture Notes in Math., **1465**, Springer (1991).
13. A. Böttcher, Y. I. Karlovich, *Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators*, Progr. Math., **154**, Birkhäuser, Basel (1997).
14. S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in spaces with commutative multiplication and applications*, Front. Math., Birkhäuser, Cham (2023).
15. О. Ф. Герус, *Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши*, Укр. мат. журн., **30**, № 5, 594 – 601 (1978).

Одержано 30.09.23