DOI: 10.3842/umzh.v76i4.7867

УДК 517.5

Сергій Грищук[1] (Інститут математики НАН України, Київ; Національний університет „Києво-Могилянська академія”)

БІГАРМОНІЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ ГРАДІЄНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МОНОГЕННИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У БІГАРМОНІЧНІЙ АЛГЕБРІ

Necessary and sufficient conditions are established for the existence of the continuations of gradients of biharmonic functions u_1 and u_2 across a smooth curve Γ ($u_k : D_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, and Γ is a common part of the boundaries of D_1 and D_2). Moreover, the indicated continuation of gradients determines the gradient of the biharmonic function (in $D_1 \cup \Gamma \cup D_1$).

Знайдено необхідні та достатні умови існування продовження через гладку криву для градієнтів функцій, які визначені та є бігармонічними функціями у відповідних областях, що межують з даною кривою. Навіть більше, знайдене продовження визначає градієнт бігармонічної функції в області, яка є об’єднанням зазначених областей та кривої.

1. Вступ. Однією з класичних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є задача про продовження розв’язків рівнянь за межі області їх визначення. Дослідженням цієї проблеми присвячено роботи багатьох математиків (див., наприклад, оглядову статтю [4] і наведену в ній бібліографію). Значну увагу в цій роботі приділено модифікації методу Леві – Векуа (див. [5, 8]), який полягає у зведенні рівнянь з частинними похідними вигляду $L(x, y) = 0$ від двох дійсних змінних x, y до рівнянь вигляду $L_1((z+w)/2, (z-w)/2i) = 0$ з комплексними похідними від двох змінних $z = x + iy$, $w = x - iy$ комплексної площини $\mathbb{C}$. Зокрема, для побудови формул продовження бігармонічних функцій, значення яких на частині межі (для якої будується продовження і яка є аналітичною кривою) пов’язані певними крайовими умовами, метод Леві – Векуа розвивається у роботах [10, 13], причому в останній роботі розглянуто п’ять різних крайових умов та одержано явні формули продовження бігармонічних функцій для кожного випадку. Крім того, у роботі [13] проведено детальний аналіз внесків попередників стосовно побудови продовження бігармонічних функцій через частини межі, яка має спеціальні форми (див., наприклад, [9, 11, 12]).

При розв’язуванні крайових задач для плоских бігармонічних функцій, зокрема пов’язаних з теорією пружності, часто більш важливим є знаходження не самої шуканої бігармонічної функції, а її градієнта (див., наприклад, [6, 7, 14]).

2. Формулювання задачі та резюме основного результату. Нехай $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, D — обмежена однозв’язна область площини $\mathbb{R}^2$, ∂D — межа області D, точки $A_l \in \partial D$, $l = 1, 2$, $A_1 \neq A_2$; гладкі жорданові криві $\Gamma \subset D$, $\Gamma_l \subset \partial D$, $l = 1, 2$, мають як кінці точки A_1 та A_2, $A_l \notin \Gamma$, $A_l \notin \Gamma_k$, $l = 1, 2$, $k = 1, 2$. Тоді $\partial D = \Gamma_1 \cup \{A_1, A_2\} \cup \Gamma_2$, а крива Γ розбиває множину D на дві обмежені однозв’язні множини D_k, $k = 1, 2$, де межа ∂D_k області D_k, $k = 1, 2$, визначається як $\partial D_k = \Gamma \cup \{A_1, A_2\} \cup \Gamma_k$, $k = 1, 2$, при цьому $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2$. Символом D_0 будемо позначати далі одну з трьох областей: D_1, D_2, D.

Нехай функція $v : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ має в D_0 неперервні похідні першого порядку $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$. Символом $\operatorname{grad} v$ будемо позначати упорядковану пару $(\partial v/\partial x, \partial v/\partial y)$, отже, $\operatorname{grad} v : D_0 \longrightarrow$

[1] E-mail: serhii.gryshchuk@gmail.com.

$\mathbb{R}^2$ і $\operatorname{grad} v(x,y) = \left(\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)$ для всіх $(x,y) \in D_0$. Якщо функція v бігармонічна в області D_0, то частинні похідні $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ також бігармонічні функції в області D_0, тому градієнт $\operatorname{grad} v$ будемо називати *бігармонічним* у цій області.

Предметом дослідження цієї роботи є знаходження необхідних та достатніх умов існування неперервного продовження через криву Γ бігармонічних градієнтів $\operatorname{grad} u_k$, $k = 1, 2$, від бігармонічних функцій $u_k : D_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, так, щоб продовження в область D градієнтів $\operatorname{grad} u_k$, $k = 1, 2$, визначало бігармонічний градієнт певної бігармонічної функції u в D. Іншими словами, потрібно з'ясувати, коли існує бігармонічна функція $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, звуження градієнта якої на області D_k, $k = 1, 2$, збігаються відповідно з градієнтами наперед заданих бігармонічних функцій u_k, $k = 1, 2$.

Шукані умови продовження знаходяться нижче у термінах граничної поведінки на Γ дійсних компонент для похідних відповідних порядків від аналітичних функцій, які набувають значень у комутативній двовимірній бігармонічній алгебрі (див., наприклад, [19]), причому певні їх пари дійсних компонент у областях D_k, $k = 1, 2$, збігаються відповідно зі значеннями градієнтів функцій u_k, $k = 1, 2$.

3. Моногенні функції. Розбиття кривої γ на порції. У роботі [19] асоціативну комутативну двовимірну алгебру $\mathbb{B}$ з одиницею e над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ названо *бігармонічною*, якщо вона містить базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0 \tag{1}$$

(який також названо *бігармонічним*), і запропоновано наступну таблицю множення для такого базису:

$$e_1^2 = e_1 = e, \quad e_2 e_1 = e_2, \quad e_2^2 = e + 2ie_2,$$

де i — уявна комплексна одиниця.

У роботі [20] доведено єдиність бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ і показано, що вона породжується небігармонічним базисом $\{e, \rho\}$, де

$$\rho = 2e + 2ie_2\,,$$

при цьому $\rho^2 = 0$, а також описано всі бігармонічні базиси в $\mathbb{B}$. Зауважимо, що алгебра $\mathbb{B}$ ізоморфна чотиривимірним алгебрам над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, розглянутим у роботах [21, 22].

В алгебрі $\mathbb{B}$ визначимо евклідову норму

$$\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \quad a = z_1 e_1 + z_2 e_2 \in \mathbb{B}, \quad z_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2.$$

Як і в роботі [19], розглянемо *бігармонічну площину* $\mu_{e_1,e_2} := \{\zeta = x\,e_1 + y\,e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$. Конгруентні множини у бігармонічній площині μ_{e_1,e_2} (відповідність: $\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2}, (x,y) \in \mathbb{R}^2$) для множин D, Γ, Γ_k, $\{A_k\}$, D_0, D_k, $k = 1, 2$, позначимо відповідно символами D_ζ, γ, γ_k, $\{a_k\}$, $(D_0)_\zeta$, $(D_k)_\zeta, k = 1, 2$. Тоді межі $\partial(D_k)_\zeta$, ∂D_ζ відповідно областей $\partial(D_k)_\zeta$, $k = 1, 2$, D_ζ задовольняють рівності

$$\partial(D_k)_\zeta = \gamma \cup \{a_1, a_2\} \cup \gamma_k, \quad k = 1, 2, \quad \partial D_\zeta = \gamma_1 \cup \{a_1, a_2\} \cup \gamma_2.$$

Крім того, справджуються рівності $D_\zeta = (D_1)_\zeta \cup \gamma \cup (D_2)_\zeta$, $(D_0)_\zeta = (D_k)_\zeta$ при $D_0 = D_k$, $k = 1, 2$. Якщо $D_0 = D$, то $(D_0)_\zeta := D_\zeta$.

Назвемо криву $\widetilde{\gamma} \subset \mu_{e_1,e_2}$ *гладкою*, якщо її конгруентна крива $\gamma_0 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2}\}$ комплексної площини $\mathbb{C}$ є гладкою, і відповідно *кусково-гладкою*, якщо γ_0 — кусково-гладка крива. Тоді γ є гладкою кривою, γ_k — гладкі криві, межі ∂D_ζ і ∂D_{ζ_k} — кусково-гладкі криві, $k = 1, 2$.

Позначимо через γ_x не більш ніж зліченне об'єднання гладких попарно неперетинних кривих $\gamma_x(A_{k,x}, B_{k,x}) \subset \gamma$ (k — натуральне число), кожна з яких має як кінці точки $A_{k,x}$ і $B_{k,x}$ кривої γ, $A_{k,x} \notin \gamma_x$, $B_{k,x} \notin \gamma_x$, а кожна крива $\gamma_x(A_{k,x}, B_{k,x})$ належить відповідній прямій, яка паралельна осі $\{\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2} : y = 0\}$ (можливий випадок, коли $\gamma_x = \varnothing$).

Позначимо через γ_y не більш ніж зліченне об'єднання відкритих гладких попарно неперетинних кривих $\gamma_y(A_{k,y}, B_{k,y}) \subset \gamma$ (k — натуральне число), кожна з яких має як кінці точки $A_{k,y}$ і $B_{k,y}$ кривої γ, $A_{k,y} \notin \gamma_y$, $B_{k,y} \notin \gamma_y$, а кожна крива $\gamma_y(A_{k,y}, B_{k,y})$ належить відповідній прямій, яка паралельна осі $\{\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2} : x = 0\}$ (можливий випадок, коли $\gamma_y = \varnothing$).

Введемо до розгляду множину $\widetilde{\gamma} := \gamma \setminus (\gamma_x \cup \gamma_y)$. Тоді $\gamma = \widetilde{\gamma} \cup \gamma_x \cup \gamma_y$. Скрізь далі $\zeta := x\,e_1 + y\,e_2$, $z := x + iy$, $(x, y) \in D$.

Оскільки в бігармонічній площині відсутні дільники нуля, то похідна функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ визначається так, як і для аналітичних функцій комплексної змінної, а саме:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mu_{e_1,e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}\,. \tag{2}$$

Функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ називається *моногенною* в області D_ζ, якщо її похідна $\Phi'(\zeta)$ існує в кожній точці $\zeta \in D_\zeta$.

Якщо існує похідна другого порядку від функції Φ (похідна від Φ') у кожній точці $\zeta \in D_\zeta$, то будемо позначати її символом Φ''; якщо існує похідна третього порядку від функції Φ (похідна від Φ''), то — символом Φ''', тощо.

Кожну функцію $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ подаємо у вигляді

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2\,, \tag{3}$$

де $U_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, — дійснозначні компоненти-функції. Для них також будемо використовувати позначення $\mathrm{U}_k[\Phi] := U_k$, $k = \overline{1, 4}$.

Очевидно, що кожна моногенна функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ є неперервною в області D_ζ, а її компоненти $U_k(x, y) = \mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)]$, $k = \overline{1, 4}$, — неперервними лінійними операторами щодо додавання моногенних функцій та множення їх на дійсні числа.

У роботі [19] доведено, що функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ є моногенною в області D_ζ тоді й лише тоді, коли всі її дійснозначні компоненти з розкладу (3) диференційовні в D і виконується такий аналог умов Коші – Рімана:

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2. \tag{4}$$

У роботах [1, 2] доведено, що кожна моногенна функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ має (неперервні) похідні $\Phi^{(n)}(\zeta)$ усіх порядків в області D_ζ і задовольняє рівняння

$$\Delta^2 u(x, y) := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

в силу першого зі співвідношень (1) і рівності $\Delta^2 \Phi(\zeta) = \Phi^{(4)}(\zeta)\,(e_1^2 + e_2^2)^2$. Тому всі компоненти $U_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, з розкладу (3) є бігармонічними функціями в області D.

4. Допоміжні твердження. Розглянемо допоміжні результати про зображення бігармонічного градієнта за допомогою компонент моногенних функцій.

Лема 1. *Нехай* $u\colon D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ — *бігармонічна функція. Тоді існує моногенна функція* $\Phi\colon (D_0)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, *яка задовольняє рівність*

$$\operatorname{grad} u(x,y) = (\mathrm{U}_1[\Phi(\zeta)], \mathrm{U}_3[\Phi(\zeta)]) \quad \forall \zeta \in (D_0)_\zeta. \tag{5}$$

Усі моногенні функції, які задовольняють рівність (5), *визначаються рівністю*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_u' + ik\zeta + ine + ie_2 m, \tag{6}$$

де k, n, m — *довільні дійсні числа,* Φ_u — *моногенна в* D_ζ *функція, яка задовольняє умову*

$$\mathrm{U}_1[\Phi_u(\zeta)] = u(x,y) \quad \forall (x,y) \in D. \tag{7}$$

Доведення. За теоремою 5 роботи [1] існують моногенні функції $\Phi_u\colon (D_0)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, які задовольняють умову (7). Крім того, потужність множини функцій Φ_u є континуумом.

З умови (4) для $\Phi := \Phi_u$ та співвідношення (7) для кожного $\zeta \in (D_0)_\zeta$ випливають рівності

$$\mathrm{U}_1\big[\Phi_u{}'(\zeta)\big] = \frac{\partial \mathrm{U}_1[\Phi_u(\zeta)]}{\partial x} \equiv \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad \mathrm{U}_3\big[\Phi_u{}'(\zeta)\big] = \frac{\partial \mathrm{U}_1[\Phi_u(\zeta)]}{\partial y} \equiv \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Тому моногенна функція $\Phi := \Phi_u'$ задовольняє умову (5). Опишемо всю сукупність моногенних функцій Φ, які задовольняють умову (5).

Нехай тепер Φ — довільна моногенна в $(D_0)_\zeta$ функція, яка задовольняє умову (7). Тоді моногенна в D_ζ функція $\widetilde{\Phi} := \Phi - \Phi_u$ задовольняє в $(D_0)_\zeta$ умови

$$\mathrm{U}_1\Big[\widetilde{\Phi}(\zeta)\Big] = 0, \quad \mathrm{U}_3\Big[\widetilde{\Phi}(\zeta)\Big] = 0 \quad \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{8}$$

У лемі 3 роботи [1] описано всі моногенні функції, які задовольняють першу умову з (8). Враховуючи далі другу умову з (8) та рівність $\zeta = xe + ye_2$, приходимо до рівності $\widetilde{\Phi}(\zeta) = ik\zeta + in\,e + im\,e_2$ для кожного $\zeta \in D_\zeta$ (k, n, m — довільні дійсні числа), яка разом з рівністю $\widetilde{\Phi} := \Phi - \Phi_u'$ і доводить формулу (6).

Лему доведено.

Нехай дійснозначні функції P, Q є неперервними в області D. Функція $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ називається *примітивною* функцією (див., наприклад, [16, с. 250]) диференціального виразу $\omega := P\,dx + Q\,dy$ в області D, якщо функція u є неперервно диференційовною в області D і виконується рівність між диференціальним виразом ω і (повним) диференціалом функції u в області D:

$$\omega \equiv P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = d\,u(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D.$$

Очевидно, що неперервно диференційовна функція $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ є примітивною функцією диференціального виразу $\omega = P\,dx + Q\,dy$ тоді й лише тоді, коли $(P,Q) = \operatorname{grad} u$ в області D. Зазначимо, що у випадку, коли шукана неперервно диференційовна функція u задовольняє рівність $(P,Q) = \operatorname{grad} u$ в області D, функція u відновлюється (з точністю до довільного дійсного доданка) за формулою

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + \mathrm{const} \qquad \forall (x,y) \in D, \tag{9}$$

де інтегрування проводиться уздовж довільної гладкої кривої області D, яка сполучає фіксовану точку $(x_0, y_0) \in D$ з точкою (x, y).

Лема 2 [18, с. 18]**.** *Нехай функції $P\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ та всі їхні частинні похідні першого порядку неперервні в області D.*

Тоді для того, щоб існувала двічі неперервно диференційовна примітивна функція $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ диференціального виразу $\omega = P\,dx + Q\,dy$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad \forall (x,y) \in D. \tag{10}$$

З використанням формули (9) легко встановлюємо узагальнення другого твердження леми 2 для n разів неперервної диференційовності (при $n = 1$ — це друге твердження леми 2) функції u.

***Наслідок* 1.** *Нехай функції $P\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ є n разів $(n \geq 1)$ неперервно диференційовними функціями в області D і виконується співвідношення* (10)*. Тоді існує $n+1$ раз неперервно диференційовна примітивна функція $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ диференціального виразу $\omega = P\,dx + Q\,dy$.*

Нехай функції $P\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ неперервні. Їх звуження відповідно на області D_k, $k = 1, 2$, позначаємо так:

$$P_k(x,y) := P(x,y), \quad Q_k(x,y) := Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D_k, \quad k = 1, 2.$$

Введемо до розгляду числові множини: $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Нехай функція $\widetilde{P}\colon D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ є n разів неперервно диференційовною ($n \in \mathbb{N}_0$). Для кожних $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, $n_1 + n_2 \leq n$, позначимо

$$\mathfrak{D}_{n_1,n_2}\widetilde{P}(x,y) := \frac{\partial^{n_1+n_2}\widetilde{P}(x,y)}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}} \qquad \forall (x,y) \in D_0. \tag{11}$$

У правій частині рівності (11) порядок диференціювання при $n \in \mathbb{N}$ можна вибирати довільним чином внаслідок n разів неперервної диференційовності функції $\widetilde{P}$.

Нехай $\delta > 0$, $\zeta_0 \in \gamma$, $G \subset \mu_{e_1,e_2}$. Введемо позначення

$$U_\delta(\zeta_0, G) := \{\zeta \in G : \|\zeta - \zeta_0\| < \delta\}.$$

Лема 3. *Нехай функції $P\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ неперервні, а їх звуження P_k, Q_k на D_k, $k = 1, 2$, є n разів ($n \in \mathbb{N}$) неперервно диференційовними функціями відповідно на D_k, $k = 1, 2$, і задовольняють умови*:

1) *має місце рівність*

$$\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial x} \qquad \forall (x,y) \in D_k, \quad k = 1, 2; \tag{12}$$

2) *для кожних* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0,\ n_1+n_2=n$, *усі частинні похідні* $\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P_k,\ \mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q_k,\ k=1,2$, *неперервно продовжуються в точки кривої* Γ, *причому їх граничні значення задовольняють для кожного* $(x_0,y_0)\in\Gamma$ *рівності*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),(x,y)\in D_1}\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P_1(x,y)$$
$$=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),(x,y)\in D_2}\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P_2(x,y)=:p_{n_1,n_2}(x_0,y_0), \tag{13}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),(x,y)\in D_1}\mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q_1(x,y)$$
$$=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),(x,y)\in D_2}\mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q_2(x,y)=:q_{n_1,n_2}(x_0,y_0); \tag{14}$$

3а) *існує таке* $\delta>0$, *що для кожних* $n_1\in\mathbb{N},\ n_2\in\mathbb{N}_0,\ n_1+n_2=n,\ k_1\in\mathbb{N}_0,\ k_2\in\mathbb{N},\ k_1+k_2=n$, *виконуються асимптотичні співвідношення*

$$\mathfrak{D}_{n_1-1,n_2}P_k(x,y)-p_{n_1-1,n_2}(x_0,y_0)-(x-x_0)p_{n_1,n_2}(x_0,y_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{15}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\mathfrak{D}_{n_1-1,n_2}p_k(x,y)-p_{n_1-1,n_2}(x_0,y_0)-(x-x_0)p_{n_1,n_2}(x_0,y_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{16}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_x),\quad k=1,2,$$

$$\mathfrak{D}_{k_1,k_2-1}P_k(x,y)-p_{k_1,k_2-1}(x_0,y_0)-(y-y_0)p_{k_1,k_2}(x_0,y_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{17}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\mathfrak{D}_{k_1,k_2-1}p_k(x,y)-p_{k_1,k_2-1}(x_0,y_0)-(y-y_0)p_{k_1,k_2}(x_0,y_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{18}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_y),\quad k=1,2,$$

де $o(v)/v\to 0$ *при* $v\to 0$;

3б) *існує таке* $\delta>0$, *що для кожних* $n_1\in\mathbb{N},\ n_2\in\mathbb{N}_0,\ n_1+n_2=n,\ k_1\in\mathbb{N}_0,\ k_2\in\mathbb{N},\ k_1+k_2=n$, *виконуються асимптотичні співвідношення, які одержуються при* $k=1,2$ *з* (15) – (18) *заміною* P_k *на* $Q_k,\ p_{n_1,n_2}$ *на* $q_{n_1,n_2},\ p_{k_1,k_2}$ *на* q_{k_1,k_2} *відповідно.*

Тоді існує $n+1$ *раз неперервно диференційовна функція* $u\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$, *яка є примітивною функцією диференціального виразу* $\omega=P\,dx+Q\,dy$.

Доведення. Покажемо спочатку, що функції P, Q є n разів неперервно диференційовними в області D. Враховуючи, що їх звуження P_k, Q_k відповідно на D_k, $k=1,2$, є n разів неперервно диференційовними, достатньо довести, що P і Q є n разів неперервно диференційовними функціями у точках кривої Γ. З того, що для кожних $n_j\in\mathbb{N}_0,\ j=1,2,\ n_1+n_2=n$, частинні похідні $\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P_k,\ \mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q_k,\ k=1,2$, неперервно продовжуються у точки кривої Γ, причому їх граничні значення задовольняють для кожного $(x_0,y_0)\in\Gamma$ рівності (13), (14), випливає, що всі частинні похідні $\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P_k,\ \mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q_k,\ k=1,2$, порядку $n=n_1+n_2$ неперервно продовжуються відповідно з D_k, $k=1,2$, на всю область D. Враховуючи додатково відповідні асимптотичні співвідношення, одержуємо, що продовжені за неперервністю частинні похідні $\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P_k,\ \mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q_k,\ k=1,2$, порядку $n=n_1+n_2$ збігаються з одноіменними частинними похідними порядку n відповідно для функцій P, Q у точках кривої Γ, причому значення кожної похідної не залежить від порядку диференціювання.

Отже, всі частинні похідні функцій $\mathfrak{D}_{n_1,n_2}P$, $\mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q$ порядку $n = n_1 + n_2$ є неперервними в області D. Тоді в силу відповідного результату (див., наприклад, [17, с. 276]) функції P, Q є n разів неперервно диференційовними в області D.

Оскільки функції P і Q мають неперервні похідні в області D за доведеним, то з рівностей (12) для областей D_k, $k = 1, 2$, випливає справедливість рівності (10). Тоді за наслідком 1 з леми 2 випливає необхідне твердження про існування примітивної функції u.

Лему доведено.

***Зауваження* 1.** У лемі 3 для кожних $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, $n_1 + n_2 = n$, функції p_{n_1,n_2}, q_{n_1,n_2} відповідно з (13), (14) виражаються через функції P, Q за допомогою рівностей

$$p_{n_1,n_2}(x_0, y_0) = \mathfrak{D}_{n_1,n_2}P(x_0, y_0), \quad q_{n_1,n_2}(x_0, y_0) = \mathfrak{D}_{n_1,n_2}Q(x_0, y_0) \qquad \forall (x_0, y_0) \in \Gamma.$$

Якщо моногенна функція $\Phi_k \colon (D_\zeta)_k \longrightarrow \mathbb{B}$, $k \in \{1, 2\}$, має для певного $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ скінченну границю

$$\widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_k](\zeta_0) := \lim_{\zeta \to \zeta_0, \zeta \in D_k} \mathrm{U}_l[\Phi_k(\zeta)] \quad \forall \zeta_0 \in \gamma,$$

то функція $\mathrm{U}_l[\Phi_k]$ допускає неперервне продовження з $(D_k)_\zeta$ на $(D_k)_\zeta \cup \gamma$ для відповідних $k \in \{1, 2\}$ та $l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Лема 4. *Нехай моногенні функції* $\Phi_k \colon (D_\zeta)_k \longrightarrow \mathbb{B}$, $k = 1, 2$, *задовольняють чотири граничні умови*

$$\widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_1](\zeta_0) := \widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_2](\zeta_0) \quad \forall \zeta_0 \in \gamma, \quad l = \overline{1, 4}. \tag{19}$$

Тоді функція $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, *компоненти* $\mathrm{U}_l[\Phi]$ *якої визначаються для кожного* $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ *рівностями*

$$U_l[\Phi(\zeta)] := \begin{cases} \mathrm{U}_l[\Phi_k(\zeta)], & \text{якщо} \quad \zeta \in D_k, \ k = 1, 2, \\ \widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_1](\zeta) \equiv \widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_2](\zeta), & \text{якщо} \quad \zeta \in \gamma, \end{cases}$$

є моногенною в області D_ζ *і виконуються асимптотичні співвідношення*

$$\mathrm{U}_1[\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)] - ((x - x_0)\mathrm{U}_1 + (y - y_0)\mathrm{U}_3)\big[\Phi'(\zeta)\big] = o(\zeta - \zeta_0), \tag{20}$$

$$\mathrm{U}_2[\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)] - ((x - x_0)\mathrm{U}_2 + (y - y_0)\mathrm{U}_4)\big[\Phi'(\zeta)\big] = o(\zeta - \zeta_0), \tag{21}$$

$$\mathrm{U}_3[\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)] - ((x - x_0)\mathrm{U}_3 + (y - y_0)(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4))\big[\Phi'(\zeta)\big] = o(\zeta - \zeta_0), \tag{22}$$

$$\mathrm{U}_4[\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)] - ((x - x_0)\mathrm{U}_4 + (y - y_0)(\mathrm{U}_2 + 2\mathrm{U}_3))\big[\Phi'(\zeta)\big] = o(\zeta - \zeta_0) \tag{23}$$

при $\zeta \to \zeta_0$, *де* ζ_0 — *довільна точка з* γ, $\zeta \in D_\zeta$.

Доведення. З рівностей (19) та неперервності компонент $\mathrm{U}_l[\Phi_k(\zeta)]$, $l = \overline{1, 4}$, $k = 1, 2$, випливає, що функції $P(x, y) := \mathrm{U}_1[\Phi(\zeta)]$, $Q(x, y) := \mathrm{U}_3[\Phi(\zeta)]$, $U_{2k}(x, y) := \mathrm{U}_{2k}[\Phi(\zeta)]$, $k = 1, 2$, неперервні в D. Оскільки $\Phi(\zeta) \equiv \Phi_k(\zeta)$ для всіх $\zeta \in (D_k)_\zeta$, $k = 1, 2$, то функція Φ моногенна відповідно в $(D_\zeta)_k$, $k = 1, 2$.

Покажемо, що Φ моногенна також в усій області D_ζ. Враховуючи аналоги теореми Коші та теореми Морери для моногенних функцій (див., наприклад, [2, 3]), легко показати, аналогічно випадку голоморфних функцій комплексної змінної (див., наприклад, теорему 1 в пункті 25 монографії [23]), що функція Φ є моногенною в усій області D_ζ. Тоді на підставі аналога теореми Коші для моногенної функції Φ виконується рівність

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \Phi(\zeta)\, d\zeta = 0, \tag{24}$$

де $\widetilde{\gamma}$ — довільна кусково-гладка крива в області D_ζ. Діючи оператором U_1 на обидві частини рівності (24), одержуємо співвідношення

$$\mathrm{U}_1\left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \Phi(\zeta)\, d\zeta\right] = \int\limits_{\widetilde{\Gamma}} P\, dx + Q\, dy \equiv 0, \tag{25}$$

де $\widetilde{\Gamma} := \{(x, y) : xe_1 + ye_2 \in \widetilde{\gamma}\}$ — довільна кусково-гладка крива в області D (внаслідок довільності кривої $\widetilde{\gamma}$). З рівності (25), враховуючи лему 3 (с. 529) та теорему 7 (с. 530) монографії [17], приходимо до висновку про існування примітивної функції $u : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ диференціального виразу $P\, dx + Q\, dy$, тобто $\operatorname{grad} u = (P, Q)$. Тоді з рівності (9) отримуємо, що u є бігармонічною функцією в усій області D. Рівності (20) – (23) є тривіальними наслідками співвідношення (2) для кожного $\zeta_0 \in \gamma$.

Лему доведено.

5. Основний результат. Нехай $u_k : D_k \longrightarrow \mathbb{R},\ k = 1, 2,$ — бігармонічні функції, а моногенні функції $\Phi_k : (D_k)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B},\ k = 1, 2,$ задовольняють умови

$$\operatorname{grad} u_k(x, y) = (\mathrm{U}_1[\Phi_k(\zeta)], \mathrm{U}_3[\Phi_k(\zeta)]) \quad \forall \zeta \in (D_k)_\zeta, \quad k = 1, 2. \tag{26}$$

З лем 1 і 4 випливає таке твердження: *для існування бігармонічної функції* u, *яка задовольняє рівності*

$$\operatorname{grad} u(x, y) = \operatorname{grad} u_k(x, y) \qquad \forall (x, y) \in D_k, \quad k = 1, 2, \tag{27}$$

достатньо, щоб зазначені моногенні функції $\Phi_k,\ k = 1, 2,$ *задовольняли чотири граничні умови* (19).

Проте умови (19) не є необхідними умовами існування бігармонічної функції u, яка задовольняє рівності (27). Справді, нехай $u_k \equiv 0,\ k = 1, 2,$ моногенні функції $\Phi_k : (D_k)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B},$ $k = 1, 2,$ мають вигляд

$$\mathrm{U}_1[\Phi_k] = \mathrm{U}_3[\Phi_k] \equiv 0, \quad \mathrm{U}_{2l}[\Phi_k] \equiv a_k, \quad a_1 \neq a_2, \quad k = 1, 2, \quad l = 1, 2.$$

Ці функції $\Phi_k, k = 1, 2,$ визначають бігармонічну функцію вигляду $u \equiv \mathrm{const}$.

Наступна теорема встановлює у термінах моногенних функцій $\Phi_k : (D_k)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B},\ k = 1, 2,$ необхідні і достатні умови існування бігармонічної функції u, яка задовольняє рівності (27).

Теорема 1. *Нехай* $u_k : D_k \longrightarrow \mathbb{R},\ k = 1, 2,$ — *бігармонічні функції, а моногенні функції* $\Phi_k : (D_k)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B},\ k = 1, 2,$ *задовольняють умови* (26).

Для існування бігармонічної функції $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, *яка задовольняє рівності* (27), *необхідно і достатньо, щоб моногенні функції* $\Phi_k,\ k=1,2,$ *задовольняли граничні умови*

$$\widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_1](\zeta_0) := \widehat{\mathrm{U}}_l[\Phi_2](\zeta_0) \quad \forall\zeta_0\in\gamma, \quad l\in\{1,3\}, \tag{28}$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_l\left[\Phi_1''\right](\zeta_0) = \widehat{\mathrm{U}}_l\left[\Phi_2''\right](\zeta_0) \quad \forall\zeta_0\in\gamma, \quad l=\overline{1,4}. \tag{29}$$

Доведення. *Достатність.* За лемою 1 існують моногенні функції $\Phi_k\colon (D_k)_\zeta \longrightarrow \mathbb{B},\ k=1,2,$ які задовольняють рівності (26).

Компоненти для вектор-функцій $\operatorname{grad} u_k,\ k=1,2,$ позначимо через $P_k,\ Q_k,\ k=1,2,$ відповідно, тобто

$$\operatorname{grad} u_k(x,y) \equiv (\mathrm{U}_1[\Phi_k(\zeta)], \mathrm{U}_3[\Phi_k(\zeta)]) =: (P_k(x,y), Q_k(x,y)) \quad \forall\zeta\in(D_k)_\zeta, \quad k=1,2. \tag{30}$$

З умов (28) та рівностей (30) випливає, що функції

$$P(x,y) := \begin{cases} P_k(x,y), & \text{якщо} \quad (x,y)\in D_k,\ k=1,2,\\ \widehat{\mathrm{U}}_1[\Phi_1](\zeta_0) \equiv \widehat{\mathrm{U}}_1[\Phi_2](\zeta_0), & \text{якщо} \quad (x_0,y_0)\in\Gamma, \end{cases} \tag{31}$$

$$Q(x,y) := \begin{cases} Q_k(x,y), & \text{якщо} \quad (x,y)\in D_k,\ k=1,2,\\ \widehat{\mathrm{U}}_3[\Phi_1](\zeta_0) \equiv \widehat{\mathrm{U}}_3[\Phi_2](\zeta_0), & \text{якщо} \quad (x_0,y_0)\in\Gamma, \end{cases} \tag{32}$$

неперервні в області D.

З урахуванням (30) одержуємо, що при $(x,y)\in D_k,\ k=1,2,$ функції (31) і (32) мають вигляд

$$P(x,y) = P_k(x,y) = \frac{\partial u_k(x,y)}{\partial x} \equiv \mathrm{U}_1[\Phi_k(\zeta)] \quad \forall(x,y)\in D_k, \quad k=1,2, \tag{33}$$

$$Q(x,y) = Q_k(x,y) = \frac{\partial u_k(x,y)}{\partial y} \equiv \mathrm{U}_3[\Phi_k(\zeta)] \quad \forall(x,y)\in D_k, \quad k=1,2. \tag{34}$$

З огляду на те, що компоненти $\mathrm{U}_l,\ l=\overline{1,4},$ моногенних функцій є бігармонічними функціями у відповідних областях декартової площини xOy, отримуємо, що функції (33), (34), $k=1,2,$ є бігармонічними, а тому і нескінченно неперервно диференційовними (див., наприклад, [15, с. 144]) в областях $D_k,\ k=1,2.$ Звідси приходимо до висновку, що неперервні в D функції (31), (32) є нескінченно неперервно диференційовними бігармонічними функціями відповідно в областях $D_k,\ k=1,2.$

Обчислимо похідні першого порядку для функцій P_k і Q_k в областях $D_k,\ k=1,2.$

Враховуючи (33), (34), рівності

$$\mathrm{U}_1[e_2A] = \mathrm{U}_3[A], \quad A\in\mathbb{B}, \tag{35}$$

$$\mathrm{U}_3[e_2A] = \mathrm{U}_1[A] - 2\mathrm{U}_4[A], \quad A\in\mathbb{B}, \tag{36}$$

й умову (4) при $\Phi := \Phi_k,\ k=1,2,$ одержуємо ланцюжки рівностей

$$\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{U}_1[\Phi_k(\zeta)]}{\partial y} = \mathrm{U}_1\left[\frac{\partial \Phi_k(\zeta)}{\partial y}\right] = \mathrm{U}_1\left[e_2\frac{\partial \Phi_k(\zeta)}{\partial x}\right]$$

$$= \mathrm{U}_1\big[e_2\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_3\big[\Phi'_k(\zeta)\big] \quad \forall (x,y)\in D_k, \quad k=1,2, \tag{37}$$

$$\frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{U}_3[\Phi_k(\zeta)]}{\partial x} = \mathrm{U}_3\left[\frac{\partial \Phi_k(\zeta)}{\partial x}\right] = \mathrm{U}_3\big[\Phi'_k(\zeta)\big] \quad \forall (x,y)\in D_k, \quad k=1,2, \tag{38}$$

$$\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x} = \mathrm{U}_1\big[\Phi_k{}'(\zeta)\big], \tag{39}$$

$$\frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial y} = \mathrm{U}_3\big[e_2\Phi_k{}'(\zeta)\big] = \mathrm{U}_1\big[\Phi_k{}'(\zeta)\big] - 2\mathrm{U}_4\big[\Phi_k{}'(\zeta)\big]. \tag{40}$$

З огляду на (37), (38) отримуємо рівності (12).

Обчислимо похідні другого порядку для функцій P_k і Q_k в областях $D_k,\ k=1,2.$ З урахуванням формул (37) – (40), рівностей (35), (36), співвідношення

$$\mathrm{U}_4[e_2A] = \mathrm{U}_2[A] + 2\mathrm{U}_3[A], \quad A\in\mathbb{B}, \tag{41}$$

й умови (4) для $\Phi := \Phi_k,\ k=1,2,$ одержуємо ланцюжки рівностей

$$\frac{\partial^2 P_k(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}_1\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_1\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 P_k(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}_3\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_3\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 P_k(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}_1\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_1\big[e_2\Phi''_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_3\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2 P_k(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}_3\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_3\big[e_2\Phi''_k(\zeta)\big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 Q_k(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}_3\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_3\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 Q_k(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = (\mathrm{U}_1 - 2U_4)\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 Q_k(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}_3\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = \mathrm{U}_3\big[e_2\Phi''_k(\zeta)\big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\big[\Phi''_k(\zeta)\big], \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2 Q_k(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\big[\Phi'_k(\zeta)\big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\big[e_2\Phi''_k(\zeta)\big] = -(2\mathrm{U}_2 + 3\mathrm{U}_3)\big[\Phi''_k(\zeta)\big]. \tag{49}$$

Обчислимо похідні третього порядку для функцій P_k і Q_k в областях $D_k,\ k=1,2.$ З використанням рівностей (42) – (49), рівностей (35), (36), (41), тотожності

$$\mathrm{U}_2[e_2A] = \mathrm{U}_4[A], \quad A\in\mathbb{B},$$

й умови (4) для $\Phi := \Phi_k,\ k=1,2,$ отримуємо ланцюжки рівностей

$$\frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}_1\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = \mathrm{U}_1\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{50}$$

$$\frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial y\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}_1\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = \mathrm{U}_3\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{51}$$

$$\frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}_3\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = \mathrm{U}_3\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{52}$$

$$\frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial y^2\partial x} = \frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial y\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}_3\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{53}$$

$$\frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{54}$$

$$\frac{\partial^3 P_k(x,y)}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = -(2\mathrm{U}_2 + 3\mathrm{U}_3)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{55}$$

$$\frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}_3\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = \mathrm{U}_3\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{56}$$

$$\frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial y\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}_3\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{57}$$

$$\frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = (\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{58}$$

$$\frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial y^2\partial x} = \frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial y\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_4)\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = -(2\mathrm{U}_2 + 3\mathrm{U}_3)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{59}$$

$$\frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-(2\mathrm{U}_2 + 3\mathrm{U}_3))\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = -(2\mathrm{U}_2 + 3\mathrm{U}_3)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big], \tag{60}$$

$$\frac{\partial^3 Q_k(x,y)}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(-(2\mathrm{U}_2 + 3\mathrm{U}_3))\Big[\Phi_k''(\zeta)\Big] = (4\mathrm{U}_4 - 3\mathrm{U}_1)\Big[\Phi_k'''(\zeta)\Big]. \tag{61}$$

Нам потрібно встановити, коли знайдені похідні другого та третього порядків для функцій P_k і Q_k, $k = 1, 2$, допускають неперервне продовження з $D_1 \cup D_2$ на D. Після цього потрібно довести, що продовжені таким чином похідні третього порядку для функцій P_k, Q_k з D_k, $k = 1, 2$, на D збігаються з продовженими частинними похідними для відповідних похідних другого порядку від функцій P і Q, причому останні повинні існувати в області D (тоді вони будуть неперервними в D). Очевидно, що для цього достатньо перевірити на виконання відповідні твердження у точках кривої Γ. З (42) і (50) випливає, що для цього повинні виконуватись граничні рівності

$$\widehat{\mathrm{U}}_1\Big[\Phi_1'''\Big](\zeta_0) = \widehat{\mathrm{U}}_1\Big[\Phi_2'''\Big](\zeta_0) \quad \forall \zeta_0 \in \gamma, \tag{62}$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_1\Big[\Phi_1''\Big](\zeta_0) = \widehat{\mathrm{U}}_1\Big[\Phi_2''\Big](\zeta_0) \quad \forall \zeta_0 \in \gamma \tag{63}$$

та асимптотичні співвідношення

$$\mathrm{U}_1\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{64}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{65}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_x),\quad k=1,2,$$

з деяким $\delta>0$.

З (43), (44), (51), (52) і (56) випливає, що повинні виконуватися граничні рівності

$$\widehat{\mathrm{U}}_3\Big[\Phi_1'''\Big](\zeta_0)=\widehat{\mathrm{U}}_3\Big[\Phi_2'''\Big](\zeta_0)\quad\forall\zeta_0\in\gamma, \tag{66}$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_3\Big[\Phi_1''\Big](\zeta_0)=\widehat{\mathrm{U}}_3\Big[\Phi_2''\Big](\zeta_0)\quad\forall\zeta_0\in\gamma \tag{67}$$

та асимптотичні співвідношення

$$\mathrm{U}_1\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{68}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_y),\quad k=1,2,$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_1\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{69}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\mathrm{U}_3\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{70}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0 \tag{71}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_x),\quad k=1,2,$$

з деяким $\delta>0$.

На підставі співвідношень (62), (45), (47), (48), (63) з рівностей (53), (54), (57), (67) та асимптотичних співвідношень (64), (65) випливає, що повинні виконуватись граничні рівності

$$\widehat{\mathrm{U}}_4\Big[\Phi_1'''\Big](\zeta_0)=\widehat{\mathrm{U}}_4\Big[\Phi_2'''\Big](\zeta_0)\quad\forall\zeta_0\in\gamma, \tag{72}$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_4\Big[\Phi_1''\Big](\zeta_0)=\widehat{\mathrm{U}}_4\Big[\Phi_2''\Big](\zeta_0)\quad\forall\zeta_0\in\gamma \tag{73}$$

та асимптотичні співвідношення

$$\mathrm{U}_3\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\Big(\widehat{\mathrm{U}}_1-2\widehat{\mathrm{U}}_4\Big)\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{74}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_3\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\Big(\widehat{\mathrm{U}}_1-2\widehat{\mathrm{U}}_4\Big)\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{75}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_y),\quad k=1,2,$$

$$\mathrm{U}_4\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{76}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{77}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_x),\quad k=1,2,$$

з деяким $\delta>0$.

На підставі (66), (49) з (59), (60), (67), (73) та асимптотичних співвідношень (68)–(71) випливає, що повинні виконуватись граничні рівності

$$\widehat{\mathrm{U}}_2\Big[\Phi_1'''\Big](\zeta_0)=\widehat{\mathrm{U}}_2\Big[\Phi_2'''\Big](\zeta_0)\quad\forall\zeta_0\in\gamma, \tag{78}$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_2\Big[\Phi_1''\Big](\zeta_0)=\widehat{\mathrm{U}}_2\Big[\Phi_2''\Big](\zeta_0)\quad\forall\zeta_0\in\gamma \tag{79}$$

та асимптотичні співвідношення

$$\mathrm{U}_2\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{80}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2;$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(x-x_0)\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0, \tag{81}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_x),\quad k=1,2,$$

$$\mathrm{U}_4\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\Big(\widehat{\mathrm{U}}_2+2\widehat{\mathrm{U}}_3\Big)\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{82}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

$$\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\Big(\widehat{\mathrm{U}}_2+2\widehat{\mathrm{U}}_3\Big)\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{83}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_y),\quad k=1,2,$$

з деяким $\delta>0$.

На підставі (66), (70), (71), (78), (79) з рівності (60) випливає, що мають виконуватись граничні співвідношення

$$\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k''\big](\zeta)-\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{84}$$
$$\forall\zeta_0\in\gamma_y\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,\gamma_y),\quad k=1,2,$$

$$\mathrm{U}_2\big[\Phi_k''(\zeta)\big]-\widehat{\mathrm{U}}_2\big[\Phi_k''\big](\zeta_0)-(y-y_0)\widehat{\mathrm{U}}_4\big[\Phi_k'''\big](\zeta_0)=o(y-y_0),\quad y\to y_0, \tag{85}$$
$$\forall\zeta_0\in\widetilde{\gamma}\cup\gamma_x\quad\forall\zeta\in U_\delta(\zeta_0,D_{\zeta_k}),\quad k=1,2,$$

з деяким $\delta>0$.

Враховуючи (62), (72), (64), (65), (76), (77), з (61) отримуємо твердження про існування шуканого продовження для $\partial^3Q_k/\partial y^3,\ k=1,2,$ відповідно з $D_k,\ k=1,2,$ на D.

Враховуючи лему 4 для $\Phi_k := \Phi_k''$, $k = 1, 2$, з рівностей (63), (67), (73), (79) одержуємо висновок про існування моногенної функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, компоненти якої задовольняють рівності

$$\Phi(\zeta) := \begin{cases} \Phi_k''(\zeta), & \text{якщо} \quad \zeta \in (D_k)_\zeta, \quad k = 1, 2, \\ \widehat{\mathrm{U}}_1[\Phi_1''](\zeta) \equiv \widehat{\mathrm{U}}_1[\Phi_2''](\zeta), & \text{якщо} \quad \zeta \in \gamma. \end{cases}$$

Тоді функція $\Phi_3 := \Phi'$ є моногенною в області D_ζ, крім того, справджуються граничні рівності (62), (66), (72), (78) для звужень $(\Phi_3)_k := \Phi_k'''$, $k = 1, 2$, функції Φ_3 з D_ζ відповідно на $(D_k)_\zeta$, $k = 1, 2$. За лемою 4 для $\Phi_k := \Phi_k''$, $k = 1, 2$, отримуємо асимптотичні співвідношення (20) – (23) для даних Φ_k, $k = 1, 2$, наслідком яких (відповідно для $\zeta = xe$ та $\zeta = ye_2$) є асимптотичні співвідношення (64), (65), (68) – (71), (74) – (83), (84), (85).

Тоді за лемою 3 для $n = 3$ одержуємо що існує чотири рази неперервно диференційовна функція $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ така, що $\operatorname{grad} u = (P, Q)$. З (27) випливає, що функція u відповідно в областях D_k, $k = 1, 2$, відрізняється від u_k, $k = 1, 2$, на дійсні доданки, тобто $u(x, y) = u_k(x, y) + a_k$, де a_k — дійсні числа, $k = 1, 2$. Тому u є бігармонічною функцією в областях D_k, $k = 1, 2$.

Функція $\Delta^2 u$ неперервна в області D, крім того, $\Delta^2 u(x, y) \equiv 0$ при $(x, y) \in D_k$, $k = 1, 2$. Отже, враховуючи неперервність $\Delta^2 u$ на Γ, маємо $\Delta^2 u(x_0, y_0) \equiv 0$ для всіх $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Тому функція u є бігармонічною функцією в усій області D.

Необхідність доводиться тривіально з урахуванням знайдених похідних (при доведенні достатності) до третього порядку включно для функцій (33), (34) у вигляді лінійних комбінацій дійсних компонент для відповідних похідних функцій Φ_k, $k = 1, 2$, та можливості продовження цих похідних (нульового та третього порядків) відповідно з D_k, $k = 1, 2$, на криву γ.

Теорему доведено.

Подяка. Автор щиро вдячний професору С. А. Плаксі та учасникам семінару відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України за корисні зауваження та пропозиції під час апробації результатів.

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Цю роботу підтримано Simons Foundation (грант 1030291, S.V.G.).

Література

1. С. В. Грищук, С. А. Плакса, *Моногенные функции в бигармонической алгебре*, Укр. мат. журн., **61**, № 12, 1587 – 1596 (2009).
2. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Basic properties of monogenic functions in a biharmonic plane*, Complex Analysis and Dynamical Systems V, Contemp. Math., **591**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2013), p. 127 – 134.
3. С. В. Грищук, С. А. Плакса, *Моногенные функции в бигармонической плоскости*, Доп. НАН України, Мат., природ., техн. науки, № 12, 13 – 20 (2009).
4. B. Y. Sternin, V. E. Shatalov, *Continuation of solutions to elliptic equations and localization of singularities*, Global Analysis – Studies and Applications V, Lecture Notes in Math., **1520**, Springer, Berlin, Heidelberg (1992), p. 237 – 259.
5. H. Lewy, *Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen*, Math. Ann., **101**, № 1, 609 – 619 (1929).

6. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости*, Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 65 (1934).
7. G. Albinus, *Multiple layer potentials for the quadrant and their application to the Dirichlet problem in plane domains with a piecewise smooth boundary*, Banach Center Publ., **10**, № 1, 7 – 26 (1983).
8. И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Гостехиздат, Москва, Ленинград (1948).
9. H. Poritsky, *Application of analytic functions to two-dimensional biharmonic analysis*, Trans. Amer. Math. Soc., **59**, № 2, 248 – 279 (1946).
10. C. L. Yu, *Reflection principle for solutions of higher order elliptic equations with analytic coefficients*, SIAM J. Appl. Math., **2**, № 3, 358 – 363 (1971).
11. J. H. Bramble, *Continuation of solutions of the equations of elasticity*, Proc. London Math. Soc., **3**, № 10, 335-353 (1960).
12. J. H. Bramble, *Continuation of solutions of the equations of elasticity across a spherical boundary*, J. Math. Anal. and Appl., **2**, № 1, 72 – 85 (1961).
13. T. V. Savina, *On the dependence of the reflection operator on boundary conditions for biharmonic functions*, J. Math. Anal. and Appl., **370**, № 2, 716 – 725 (2010).
14. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem*, Math. Methods Appl. Sci., **39**, № 11, 2939 – 2952 (2016).
15. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. Уравнения с частными производными, Мир, Москва (1966).
16. И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф Калайда, *Математический анализ: в 3-х ч.*, ч. 2, Вища школа, Киев (1985).
17. Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа: в 3-х т.*, т. 2, Дрофа, Москва (2004).
18. Я. Б. Лопатинский, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Вища школа, Киев (1984).
19. В. Ф. Ковалев, И. П. Мельниченко, *Бигармонические функции на бигармонической плоскости*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 8, 25 – 27 (1981).
20. И. П. Мельниченко, *Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга*, Укр. мат. журн., **38**, № 2, 252 – 254 (1986).
21. L. Sobrero, *Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata*, Ric. Ingegn., **13**, № 2, 255 – 264 (1934).
22. A. Douglis, *A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables*, Commun. Pure and Appl. Math., **6**, № 2, 259 – 289 (1953).
23. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1987).

Одержано 16.10.23