DOI: 10.3842/umzh.v76i4.7877

УДК 517.5

Роман Дмитришин[1], **Ілона-Анна Луців** (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ),
Марта Дмитришин (Західноукраїнський національний університет, Тернопіль),
Клементе Чезарано (Міжнародний телематичний університет UNINETTUNO, Рим, Італія)

ПРО ДЕЯКІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБОВИХ РОЗВИНЕНЬ ВІДНОШЕНЬ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГОРНА H_4

For various conditions imposed on the parameters of the Horn hypergeometric function H_4, we study different domains of convergence of the branched continued-fraction expansions of the ratios of these functions.

За різних умов на параметри гіпергеометричної функції Горна H_4 досліджено різні області збіжності гіллястих ланцюгових дробових розвинень відношень цих функцій.

1. Вступ. Гіпергеометричні функції (Гаусса, Аппеля, Горна, Лаурічелли та інші) природно зустрічаються у різних задачах прикладної математики та статистики, хімії та біології, математичної фізики та в інженерних науках. Їх дослідження постійно проводиться протягом останніх двох століть (див., наприклад, [6, 9, 11, 25 – 30, 33 – 35]).

У 1931 році Якоб Горн перелічив 34 різні збіжні гіпергеометричні ряди з двома змінними [32]. Усі 34 функції Горна поділено на 14 повних гіпергеометричних функцій ($F_1 - F_4$ — функції Аппеля, $G_1 - G_3$, $H_1 - H_7$) та 20 вироджених гіпергеометричних функцій ($\Phi_1 - \Phi_3$, Ψ_1, Ψ_2, Ξ_1, Ξ_2, Γ_1, Γ_2, $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_{11}$) [27, с. 224 – 227].

Гіпергеометрична функція Горна H_4 визначається подвійним степеневим рядом вигляду

$$H_4(a,b;c,d;\mathbf{z}) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r+s}(b)_s}{(c)_r(d)_s} \frac{z_1^r}{r!} \frac{z_2^s}{s!}, \quad |z_1| < p, \quad |z_2| < l,$$

де a, b, c, d — комплексні сталі, причому c і d не дорівнюють недодатному цілому числу; p та l — додатні числа, такі що $4p = (l-1)^2$ і $l \neq 1$; $(\cdot)_k$ — символ Похгаммера, визначений для будь-якого комплексного числа α і невід'ємного цілого n таким чином: $(\alpha)_0 = 1$ і $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$; $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

У цій статті продовжується дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробових розвинень відношень гіпергеометричних функцій Горна H_4, розпочате у роботах [12, 24].

Збіжність гіллястих ланцюгових дробових розвинень відношень гіпергеометричних функцій F_1 і F_3 досліджено відповідно у роботах [2, 3] і [4, 20], гіпергеометричної функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ — у статті [31], відношень гіпергеометричних функцій Горна H_3 — у роботах [7, 13], а відношень вироджених гіпергеометричних функцій Горна H_6 і H_7 — відповідно у статтях [10] і [8]. Залишається відкритою задача дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробових розвинень відношень гіпергеометричних функцій F_2 та у загальному випадку F_4, побудованих відповідно у роботах [19] і [21].

[1] Відповідальний за листування, e-mail: dmytryshynr@hotmail.com.

2. Збіжність гіллястого ланцюгового дробового розвинення. Із теореми 1 [12] за умови, що $b = d + 1$ та $(ij)_0 = (1, 2)$, випливає такий результат.

Теорема 1. *Відношення*

$$\frac{H_4(a, d+1; c, d; \mathbf{z})}{H_4(a+1, d+1; c, d+1; \mathbf{z})} \tag{1}$$

має формальне гілясте ланцюгове дробове розвинення вигляду

$$1 - \frac{d-a}{d} z_2 - \cfrac{h_1 z_1}{1 - z_2 - \cfrac{h_2 z_1}{1 - z_2 - \cfrac{h_3 z_1}{1 - \ddots}}}, \tag{2}$$

де

$$h_1 = \frac{2(a+1)}{c}, \quad h_k = \frac{(2c - a + k - 3)(a + k)}{(c + k - 2)(c + k - 1)}, \quad k \geq 2. \tag{3}$$

***Зауваження* 1.** Гіллястий ланцюговий дріб (2) є неперервним дробом за своєю формою. Особливістю тут є те, що їх підхідні дроби визначаються по-різному. А саме, послідовність підхідних дробів неперервного дробу для гіллястого ланцюгового дробу є послідовністю так званих фігурних підхідних дробів [1, с. 18]. Дослідження збіжності, пов'язані з різними фігурними підхідними дробами, можна знайти, зокрема, у роботах [5, 14, 15, 17, 18].

Безпосередньо із теореми 1 [23] отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай a і d — комплексні сталі, причому $d \neq 0$; $g_{0,k}$, $k \geq 1$, — дійсні числа, такі що $0 < g_{0,k} \leq 1$ для всіх $k \geq 1$. Тоді гіллястий ланцюговий дріб*

$$1 - \frac{d-a}{d} z_{1,0} - \cfrac{g_{0,1} z_{0,1}}{1 - (1 - g_{0,1}) z_{1,1} - \cfrac{g_{0,2}(1 - g_{0,1}) z_{0,2}}{1 - (1 - g_{0,2}) z_{1,2} - \cfrac{g_{0,3}(1 - g_{0,2}) z_{0,3}}{1 - \ddots}}}$$

збігається, якщо $|z_{1,k}| \leq 1/2$ і $|z_{0,k+1}| \leq 1/2$ для всіх $k \geq 0$.

Із доведення леми 4.41 [33] випливає такий результат.

***Наслідок* 2.** *Якщо $x \geq c > 0$ і $v^2 \leq 4u + 4$, де $u, v \in \mathbb{R}$, то*

$$\min_{-\infty < y < +\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{u + iv}{x + iy}\right) = -\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2x}.$$

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай a, c і d — комплексні сталі, такі що*

$$|h_k| + \operatorname{Re}(h_k) \leq pq(1 - q), \quad k \geq 1, \tag{4}$$

де h_k, $k \geq 1$, визначені в (3), p — додатне число, $0 < q < 1$ і $d \neq 0$. Тоді гіллястий ланцюговий дріб (2) збігається до функції $f(\mathbf{z})$, голоморфної в області

$$\Omega_{p,q} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < \frac{1 + \cos(\arg(z_1))}{2p}, \quad \operatorname{Re}\left(z_2 e^{-(i/2)\arg(z_1)}\right) < \frac{q}{2} \cos\left(\frac{\arg(z_1)}{2}\right) \right\}, \tag{5}$$

до того ж збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $\Omega_{p,q}$.

Доведення. Нехай

$$F_n^{(n)}(\mathbf{z}) = 1, \quad n \geq 1, \tag{6}$$

і

$$F_k^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 - z_2 - \cfrac{h_{k+1}z_1}{1 - z_2 - \cfrac{h_{k+2}z_1}{1 - \ddots - z_2 - \cfrac{h_{n-1}z_1}{1 - z_2 - h_n z_1}}}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad n \geq 2.$$

Тоді

$$F_k^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 - z_2 - \frac{h_{k+1}z_1}{F_{k+1}^{(n)}(\mathbf{z})}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad n \geq 2, \tag{7}$$

і n-й підхідний дріб гіллястого ланцюгового дробу (2) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = 1 - \frac{d-a}{d} z_2 - \frac{h_1 z_1}{F_1^{(n)}(\mathbf{z})}. \tag{8}$$

Покажемо, що кожний підхідний дріб $f_n(\mathbf{z})$ є голоморфною функцією в області (5). Для цього достатньо показати, що $F_1^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $n \geq 1$ і $\mathbf{z} \in \Omega_{p,q}$.

Покладемо $\arg(z_1) = \alpha$. Нехай n — довільне натуральне число, а $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка з області (5). Індукцією по k доведемо такі нерівності:

$$\mathrm{Re}(F_k^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha/2}) > (1-q)\cos(\alpha/2) \geq c > 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1. \tag{9}$$

Оскільки $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка з області (5), то для її довільного околу знайдеться $\delta > 0$ таке, що $|\alpha/2| \leq \pi/2 - \delta$, і, отже,

$$(1-q)\cos(\alpha/2) \geq (1-q)\cos(\pi/2 - \delta) = (1-q)\sin(\delta) = c > 0.$$

Покажемо виконання першої нерівності в (9). При $k = n$ ця нерівність очевидна. За припущення, що перша нерівність у (9) виконується при $k = r + 1 \leq n$, доведемо її при $k = r$. Із співвідношення (7) отримуємо

$$F_r^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha/2} = e^{-i\alpha/2} - z_2 e^{-i\alpha/2} - \frac{h_{r+1}z_1 e^{-i\alpha}}{F_{r+1}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha/2}}. \tag{10}$$

Застосовуючи наслідок 2, нерівність (4), нерівності з (5) і припущення індукції до співвідношення (10), маємо

$$\mathrm{Re}(F_r^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha/2}) \geq \cos(\alpha/2) - \mathrm{Re}(z_2 e^{-i\alpha/2}) - \frac{|h_{r+1}| + \mathrm{Re}(h_{r+1})}{2\,\mathrm{Re}(F_{r+1}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha/2})}|z_1|$$

$$> \cos(\alpha/2) - \frac{q\cos(\alpha/2)}{2} - \frac{pq(1-q)}{2(1-q)\cos(\alpha/2)} \frac{1+\cos(\alpha)}{2p} = (1-q)\cos(\alpha/2).$$

Отже, $F_1^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $n \geq 1$ і $\mathbf{z} \in \Omega_{p,q}$. Це означає, що кожний підхідний дріб (8) є функцією, голоморфною в області (5).

Нехай Ξ — довільна компактна підмножина області (5). Тоді існує відкритий бікруг

$$\Gamma_R = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |z_k| < R, k = 1, 2\}, \quad R > 0,$$

такий, що $\Xi \subset \Gamma_R$ і для будь-якого $n \geq 1$ і $\mathbf{z} \in \Omega_{p,q} \cap \Gamma_R$ із (8) маємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq 1 + \left|\frac{d-a}{d}\right| R + \frac{|h_1|R}{\mathrm{Re}(F_1^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha/2})} < 1 + \left|\frac{d-a}{d}\right| R + \frac{|h_1|R}{(1-q)\cos(\alpha/2)} = C(\Xi).$$

Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в кожній компактній підмножині області $\Omega_{p,q}$.

Оскільки $\lim_{k\to+\infty} h_k = 1$, то існує стала $M > 0$ така, що

$$|h_k| \leq M \quad \text{для всіх} \quad k \geq 1. \tag{11}$$

Очевидно, що для кожного l такого, що $0 < l < \min\{1/4, 1/(8M), 1/p, q/2\}$, область

$$\Upsilon_l = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : 0 < z_k < l, k = 1, 2\}$$

міститься в $\Omega_{p,q}$, зокрема $\Upsilon_{l/2} \subset \Omega_{p,q}$.

Використовуючи нерівність (11), для довільного $k \geq 1$ і $\mathbf{z} \in \Upsilon_l$, $\Upsilon_l \subset \Omega_{p,q}$, отримуємо

$$|z_2| < 1/4, \quad |h_k z_1| < 1/8.$$

Це означає, що елементи гіллястого ланцюгового дробу (2) задовольняють умови наслідку 1, де $g_{0,k} = 1/2$, $k \geq 1$. Згідно з цим наслідком гіллястий ланцюговий дріб (2) збігається в області Υ_l, $\Upsilon_l \subset \Omega_{p,q}$, і, отже, на підставі теореми 2.17 [1] (див. також [16, теорема 7], [35, теорема 24.2]) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області (5) до функції $f(\mathbf{z})$, голоморфної в $\Omega_{p,q}$.

Теорему 2 доведено.

Застосуванням теореми 2 є такий результат.

Теорема 3. *Нехай d — ненульова комплексна стала, a і c — дійсні сталі, такі що $h_k < 0$ для всіх $k \geq 1$, де h_k, $k \geq 1$, визначені в* (3). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб* (2) *збігається до функції $f(\mathbf{z})$, голоморфної в області*

$$\Omega_q = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\arg(z_1)| < \pi, \ \mathrm{Re}(z_2 e^{-(i/2)\arg(z_1)}) < \frac{q}{2}\cos\left(\frac{\arg(z_1)}{2}\right)\right\}, \tag{12}$$

де $0 < q < 1$, до того ж збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області Ω_q.

Доведення. Якщо $0 < q < 1$ і $h_k < 0$ для всіх $k \geq 1$, то, очевидно, нерівність (4) виконується для всіх $p > 0$. Нехай Ξ — довільна компактна підмножина області (12). Тоді виконуються включення $\Xi \subseteq \Omega_{p,q} \subseteq \Omega_q$ для деякого досить малого p, для якого множина $\Omega_{p,q}$ є областю (5). Таким чином, ця теорема є безпосереднім наслідком теореми 2.

***Зауваження* 2.** У теоремах 2 і 3 множину $\mathrm{Re}(z_2 e^{-(i/2)\arg(z_1)}) < (q/2)\cos((\arg(z_1))/2)$ можна також записати у вигляді $z_2 \notin [q/2, +\infty)$.

Міркуваннями, подібними до міркувань при отриманні теореми 2 (див. також [22]), отримуємо такий результат.

Теорема 4. *Нехай d — ненульова комплексна стала, a і c — дійсні сталі, такі що*

$$0 < h_k < r \quad \text{для всіх} \quad k \geq 1, \tag{13}$$

де h_k, $k \geq 1$, визначені в (3), r — додатне число. Тоді гіллястий ланцюговий дріб (2) збігається до функції $f(\mathbf{z})$, голоморфної в області

$$\Theta_r = \bigcup_{-\pi/2<\varphi<\pi/2} \Theta_{r,\varphi},$$

де

$$\Theta_{r,\varphi} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |z_1| + \mathrm{Re}(z_1 e^{-2i\varphi}) < \frac{\cos^2(\varphi)}{4r},\ \mathrm{Re}(z_2 e^{-i\varphi}) < \frac{\cos(\varphi)}{4} \right\},$$

до того ж збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області Θ_r.

***Зауваження* 3.** У теоремі 4 область Θ_r також можна записати у вигляді

$$\Theta_r = \big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : z_1 \notin [1/(8r), +\infty),\ z_2 \notin [1/4, +\infty) \big\}.$$

Застосуванням теореми 2 [12] є такий результат.

Теорема 5. *Нехай d — ненульова комплексна стала, a і c — дійсні сталі, такі що задовольняють нерівності (13), де h_k, $k \geq 1$, визначені в (3), r — додатне число. Тоді гіллястий ланцюговий дріб (2) збігається до функції $f(\mathbf{z})$, голоморфної в області*

$$\Pi_r = \big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : z_k \notin [1/(4(1+r)), +\infty),\ k = 1, 2 \big\},$$

до того ж збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області Π_r.

Доведення цієї теореми подібне доведенню частини (A) теореми 3 [12].

***Зауваження* 4.** Результати, аналогічні теоремам 2 – 4, можна отримати для двох інших гіллястих ланцюгових дробових розвинень відношень гіпергеометричних функцій Горна H_4, отриманих із теореми 1 [12] за умов, що $b = d,\ (ij)_0 = (1, 1)$ і $b = d + 1,\ (ij)_0 = (2, 2)$. У випадку, коли $b = d + 1$ та $(ij)_0 = (2, 2)$, також можна отримати результат, аналогічний теоремі 5. У загальному випадку задача дослідження збіжності усіх трьох розвинень залишається відкритою.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автори заявляють, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. Д. И. Боднар, *Ветвящиеся цепные дроби*, Наук. думка, Киев (1986).
2. П. І. Боднарчук, В. Я. Скоробогатько, *Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування*, Наук. думка, Київ (1974).
3. Н. П. Гоєнко, О. С. Манзій, *Розвинення гіпергеометричних функцій Аппеля F_1 та Лаурічелли $F_D^{(N)}$ у гіллясті ланцюгові дроби*, Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат., **48**, 17 – 26 (1997).
4. О. С. Манзій, *Дослідження розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб*, Теорія наближень функцій та її застосування, Праці Інституту математики НАН України, **31**, 344 – 353 (2000).
5. T. M. Antonova, M. V. Dmytryshyn, S. M. Vozna, *Some properties of approximants for branched continued fractions of the special form with positive and alternating-sign partial numerators*, Carpathian Math. Publ., **10**, № 1, 3 – 13 (2018).
6. T. Antonova, R. Dmytryshyn, V. Goran, *On the analytic continuation of Lauricella – Saran hypergeometric function $F_K(a_1, a_2, b_1, b_2; a_1, b_2, c_3; \mathbf{z})$*, Mathematics, **11** № 21, Article 4487 (2023).
7. T. Antonova, R. Dmytryshyn, V. Kravtsiv, *Branched continued fraction expansions of Horn's hypergeometric function H_3 ratios*, Mathematics, **9**, № 2, Article 148 (2021).
8. T. Antonova, R. Dmytryshyn, P. Kril, S. Sharyn, *Representation of some ratios of Horn's hypergeometric functions H_7 by continued fractions*, Axioms, **12**, № 8, Article 738 (2023).
9. T. Antonova, R. Dmytryshyn, R. Kurka, *Approximation for the ratios of the confluent hypergeometric function $\Phi_D^{(N)}$ by the branched continued fractions*, Axioms, **11**, № 9, Article 426 (2022).
10. T. Antonova, R. Dmytryshyn, S. Sharyn, *Branched continued fraction representations of ratios of Horn's confluent function H_6*, Constr. Math. Anal., **6**, № 1, 22 – 37 (2023).
11. T. Antonova, R. Dmytryshyn, S. Sharyn, *Generalized hypergeometric function ${}_3F_2$ ratios and branched continued fraction expansions*, Axioms, **10**, № 4, Article 310 (2021).
12. T. Antonova, R. Dmytryshyn, I.-A. Lutsiv, S. Sharyn, *On some branched continued fraction expansions for Horn's hypergeometric function $H_4(a, b; c, d; z_1, z_2)$ ratios*, Axioms, **12**, № 3, Article 299 (2023).
13. T. M. Antonova, *On convergence of branched continued fraction expansions of Horn's hypergeometric function H_3 ratios*, Carpathian Math. Publ., **13**, № 3, 642 – 650 (2021).
14. T. M. Antonova, O. M. Sus', S. M. Vozna, *Convergence and estimation of the truncation error for the corresponding two-dimensional continued fractions*, Ukr. Math. J., **74**, № 4, 501 – 518 (2022).
15. T. M. Antonova, O. M. Sus', *Sufficient conditions for the equivalent convergence of sequences of different approximants for two-dimensional continued fractions*, J. Math. Sci., **228**, № 1, 1 – 10 (2018).
16. D. I. Bodnar, I. B. Bilanyk, *Parabolic convergence regions of branched continued fractions of the special form*, Carpathian Math. Publ., **13**, № 3, 619 – 630 (2021).
17. D. I. Bodnar, I. B. Bilanyk, *Two-dimensional generalization of the Thron – Jones theorem on the parabolic domains of convergence of continued fractions*, Ukr. Math. J., **74**, № 9, 1317 – 1333 (2023).
18. D. I. Bodnar, O. S. Bodnar, I. B. Bilanyk, *A truncation error bound for branched continued fractions of the special form on subsets of angular domains*, Carpathian Math. Publ., **15**, № 2, 437 – 448 (2023).
19. D. I. Bodnar, *Expansion of a ratio of hypergeometric functions of two variables in branching continued fractions*, J. Math. Sci., **64**, № 32, 1155 – 1158 (1993).
20. D. I. Bodnar, O. S. Manzii, *Expansion of the ratio of Appel hypergeometric functions F_3 into a branching continued fraction and its limit behavior*, J. Math. Sci., **107**, № 1, 3550 – 3554 (2001).
21. D. I. Bodnar, *Multidimensional C-fractions*, J. Math. Sci., **90**, № 5, 2352 – 2359 (1998).
22. O. S. Bodnar, R. I. Dmytryshyn, S. V. Sharyn, *On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **12**, № 2, 353 – 359 (2020).
23. R. I. Dmytryshyn, *Convergence of multidimensional A- and J-fractions with independent variables*, Comput. Methods Funct. Theory, **22**, № 2, 229 – 242 (2022).
24. R. I. Dmytryshyn, I.-A. V. Lutsiv, *Three- and four-term recurrence relations for Horn's hypergeometric function H_4*, Res. Math., **30**, № 1, 21 – 29 (2022).

25. R. I. Dmytryshyn, S. V. Sharyn, *Approximation of functions of several variables by multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **13**, № 3, 592 – 607 (2021).
26. R. I. Dmytryshyn, *Two-dimensional generalization of the Rutishauser qd-algorithm*, J. Math. Sci., **208**, № 3, 301 – 309 (2015).
27. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. 1, McGraw-Hill Book Co., New York (1953).
28. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. 2, McGraw-Hill Book Co., New York (1953).
29. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. 3, McGraw-Hill Book Co., New York (1955).
30. H. Exton, *Multiple hypergeometric functions and applications*, E. Horwood (ed.), Halsted Press, Chichester (1976).
31. V. R. Hladun, N. P. Hoyenko, O. S. Manzij, L. Ventyk, *On convergence of function $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ expansion into a branched continued fraction*, Math. Model. and Comput., **9**, № 3, 767 – 778 (2022).
32. J. Horn, *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen*, Math. Ann., **105**, 381 – 407 (1931).
33. W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions: analytic theory and applications*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading (1980).
34. H. M. Srivastava, P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian hypergeometric series*, Halsted Press, New York (1985).
35. H.S . Wall, *Analytic theory of continued fractions*, D. Van Nostrand Co., New York (1948).

Одержано 23.10.23