УДК 513.88+517.947

В. А. Деркач, канд. физ.-мат. наук (Макеев. инж.-строит. ин-т),
М. М. Маламуд, канд. физ.-мат. наук (Донец. политехн. ин-т)

Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов

Изучаются характеристические оператор-функции $W(\lambda)$ почти разрешимых расширений эрмитова оператора. Решена обратная задача, доказана теорема умножения, выведена формула, выражающая $W(\lambda)$ через функцию Вейля и граничный оператор. Вычислены характеристические функции различных дифференциальных и разностных операторов, с помощью которых доказаны теоремы полноты систем собственных и присоединенных векторов.

Вивчаються характеристичні оператор-функції $W(\lambda)$ майже розв'язних розширень ермітова оператора. Розв'язана обернена задача, доведена теорема множення, виведена формула, яка виражає $W(\lambda)$ через функцію Вейля і крайовий оператор. Обчислені характеристичні функції різних диференціальних і різницевих операторів, за допомогою яких доведені теореми повноти системи власних та приєднаних векторів.

Понятие характеристической оператор-функции (х. о.-ф.) квазиэрмитова оператора с единичным рангом неэрмитовости впервые введено М. С. Лившицем [1]. Х. о.-ф. различных классов неограниченных операторов изучались А. В. Штраусом [2, 3], А. В. Кужелем [4, 5], Э. Р. Цекановским, Ю. Л. Шмульяном и др. (см. литературу в обзоре [6]). В настоящей работе, имеющей в известной мере обзорный характер, изучается х.о.-ф., определение которой совпадает по форме с определением М. С. Бродского — М. С. Лившица [7, 8] х. о.-ф. ограниченного оператора и базируется на понятии пространства граничных значений (ПГЗ). Роль ПГЗ в теории расширений достаточно полно освещена в обзоре [9].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — эрмитов оператор с плотной в H областью определения $\mathfrak{D}(A)$ и равными дефектными числами $n_+(A) = n_-(A) \leqslant \infty$. Известно, что расширение $\tilde{A} \supset A$ называют собственным, если $A \subset \tilde{A} \subset A^*$. Следуя [10 — 13], будем называть собственное расширение $\tilde{A} \supset A$ почти разрешимым и относить к классу $\mathrm{as}(A)$, если существует ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ и оператор $B \in [\mathcal{H}]$ такие, что $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$. Класс $\mathrm{as}(A)$ достаточно широк, ему принадлежат [10] собственные расширения $\tilde{A} \supset A$, имеющие две регулярные точки $z_1, z_2 \in \rho(\tilde{A})$, для которых $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 < 0$, (в частности, разрешимые расширения), а при $n_\pm(A) < \infty$ все квазиэрмитовы расширения [14]. Каждому оператору $\tilde{A} \in \mathrm{as}(A)$ ставим в соответствие х. о.-ф. $W_{\tilde{A}}(z)$ (см. формулу (13)) и устанавливаем связь этого определения и определения А. В. Штрауса [2], пригодного для любого оператора $\tilde{A}$ с $\rho(\tilde{A}) \neq \varnothing$. Несмотря на то, что не все операторы $\tilde{A}$ с $\rho(\tilde{A}) \neq \varnothing$ содержатся в $\mathrm{as}(A)$, этот класс оказывается удобным по ряду причин. Так, для операторов класса $\mathrm{as}(A)$ решена обратная задача, получена теорема умножения, найдена формула [10, 11]

$$W_{\tilde{A}}(\lambda) = [B - M(\lambda)][B^* - M(\lambda)]^{-1}, \tag{1}$$

выражающая $W_{\tilde{A}}(\lambda)$ через граничный оператор B и функцию Вейля

$M(\lambda)=\Gamma_1(\Gamma_2|_{\mathfrak{N}_\lambda})^{-1}$ $(\mathfrak{N}_\lambda=\ker(A^*-\lambda))$, совпадающая в случае несамосопряженного расширения минимального оператора Штурма — Лиувилля в $L_2[0,\infty)$ с известной формулой [15].

Особое внимание уделим вычислительным аспектам, показывая в каждом из рассматриваемых примеров совпадение функции Вейля с классическими объектами: характеристической матрицей дифференциального оператора $2n$-го порядка на полуоси в случае $n_\pm(A)=n$ [16], характеристической функцией [17] для канонического уравнения (системы Дирака) и т. д. Ввиду формулы (1) х. о.-ф. тем самым выражается через те же классические объекты. В частности, для системы Дирака х. о.-ф. некоторого расширения совпадает с матрицантом [18]. Отметим также, что известные свойства функции Вейля $M(\lambda)$ и х. о.-ф. $W(\lambda)$ позволяют единообразно описать аналитические свойства ряда классических оператор-функций, возникающих в конкретных задачах, спектры расширений и др., устанавливаемые обычно с использованием специфики задачи (ср. [16—18]).

В последнее время появились работы [19—21], в которых х. о.-ф. диссипативных расширений некоторых классов дифференциальных операторов вычисляются с помощью самосопряженной дилатации методами работы [15]. Заметим, что полученные в [19—21] формулы для х. о.-ф. являются следствием формулы (1), доказанной в [10, 11] без использования дилатаций.

Будем придерживаться следующих обозначений: H, $\mathcal{H}$ — гильбертовы пространства; $[\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2]$ — множество ограниченных линейных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$; $[\mathcal{H}]:=[\mathcal{H},\mathcal{H}]$; $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных операторов T в $\mathcal{H}$ с плотной областью определения; $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных отношений θ в $\mathcal{H}$ (подпространств в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$); $\mathfrak{R}(\theta)=\{g\in\mathcal{H}:\exists f\in\mathcal{H}\,\{f,g\}\in\theta\}$, $\ker\theta=\{f\in\mathcal{H}:\{f,0\}\in\theta\}$ — область значений и ядро отношения θ; $\rho(\theta)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ker(\theta-\lambda)=\{0\},\ \mathfrak{R}(\theta-\lambda)=\mathcal{H}\}$, $\sigma(\theta)=\mathbb{C}\setminus\rho(\theta)$ — резольвентное множество и спектр отношения θ; $\sigma_p(\theta)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ker(\theta-\lambda)\neq\{0\}\}$, $\sigma_r(\theta)=\{\lambda\in\sigma(\theta)\setminus\sigma_p(\theta):\overline{\mathfrak{R}(\theta-\lambda)}\neq\mathcal{H}\}$, $\sigma_c(\theta)=\sigma(\theta)\setminus(\sigma_p(\theta)\cup\sigma_r(\theta))$ — точечный, остаточный и непрерывный спектры отношения θ; все приведенные определения распространяются на оператор $T\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$, если отождествить T с его графиком $\theta=\{\{f,Tf\}:f\in\mathfrak{D}(T)\}$; $\hat{\rho}(T)$ — поле регулярности оператора T; T_R, T_I — реальная и мнимая части оператора $T\in[\mathcal{H}]$; $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$ — открытая верхняя (нижняя) полуплоскость.

1. Почти разрешимые расширения.

1. Сформулируем некоторые определения.

Определение 1 [22—24]. *Совокупность $\{\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2\}$, в которой $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, а Γ_1,Γ_2 — линейные отображения из $\mathfrak{D}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется пространством граничных значений (ПГЗ) для A^*, если отображение $\Gamma:f\to\{\Gamma_2 f,\Gamma_1 f\}$ из $\mathfrak{D}(A^*)$ в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ сюръективно и $\forall f,g\in\mathfrak{D}(A^*)$*

$$(A^*f,g)-(f,A^*g)=(\Gamma_1 f,\Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}-(\Gamma_2 f,\Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}. \tag{2}$$

Пусть $\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ — пространство с индефинитной метрикой $[\varphi,\psi]_{\tilde{\mathcal{H}}}=(j\varphi,\psi)$, где $j=\begin{pmatrix}0 & -iI_{\mathcal{H}}\\ iI_{\mathcal{H}} & 0\end{pmatrix}$. Тогда формула (2), приобретая вид $(A^*f,g)-(f,A^*g)=i[\Gamma f,\Gamma g]_{\tilde{\mathcal{H}}}$, совпадает с определением граничного пространства $\tilde{\mathcal{H}}$ из [22].

Определение 2. *Два собственных расширения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ оператора A называют дизъюнктными, если $\mathfrak{D}(\tilde{A}_1)\cap\mathfrak{D}(\tilde{A}_2)=\mathfrak{D}(A)$, и трансверсальными, если, к тому же, $\mathfrak{D}(\tilde{A}_1)+\mathfrak{D}(\tilde{A}_2)=\mathfrak{D}(A^*)$.*

Если в $\mathfrak{D}(A^*)$ введена норма графика, то отображение $\Gamma:f\to\{\Gamma_2 f,\Gamma_1 f\}$ задает топологический изоморфизм между $\mathfrak{D}(A^*)/\mathfrak{D}(A)$ и $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Поэтому между собственными расширениями $\tilde{A}$ и замкнутыми линейными отношениями в $\mathcal{H}$ имеется биективное соответствие

$$\tilde{A} = \tilde{A}_\theta \leftrightarrow \theta = \Gamma\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} : f \in \mathfrak{D}(\tilde{A})\}. \tag{3}$$

Легко видеть, что дизъюнктность $\tilde{A}_{\theta_1}$ и $\tilde{A}_{\theta_2}$ эквивалентна условию $\theta_1 \cap \cap \theta_2 = \{0\}$, а их трансверсальность — трансверсальности отношений θ_1 и θ_2 в обычном смысле: $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. С каждым ПГЗ естественно связаны два трансверсальных самосопряженных расширения (с. р.) $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^*$ $(i = 1, 2)$, для которых $\mathfrak{D}(\tilde{A}_i) = \ker \Gamma_i$, а $\Gamma\mathfrak{D}(\tilde{A}_1) = \mathcal{H}^{(1)} := \mathcal{H} \oplus \{0\}$, $\Gamma\mathfrak{D}(\tilde{A}_2) = \mathcal{H}^{(2)} := \{0\} \oplus \mathcal{H}$.

2. Лемма 1. *Пусть* $B_i \in [\mathcal{H}]$, $\theta_i = \{\{f, B_i f\} : f \in \mathcal{H}\}$ $(i = 1, 2)$. *Тогда верны эквивалентности:*

а) θ_1 *и* θ_2 *трансверсальны* $\Leftrightarrow 0 \in \rho(B_1 - B_2)$;

в) $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \Leftrightarrow 0 \in \rho(B_1 - B_2) \cup \sigma_c(B_1 - B_2)$.

Доказательство. а). Пусть $0 \in \rho(B_1 - B_2)$. Тогда $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, полагая $f = (B_1 - B_2)^{-1}(h_2 - B_2 h_1)$, $g_1 = h_1 - f$, получаем $\{f, B_1 f\} + \{g, B_2 g\} = \{h_1, h_2\}$. Обратная импликация доказывается аналогично.

в). Пусть $0 \in \sigma_c(B_1 - B_2)$. Тогда $\ker(B_1 - B_2) = \{0\}$, отсюда $\theta_1 \cap \theta_2 = \{0\}$. Далее, если $\{h_1, h_2\} \perp \theta_1 \dot{+} \theta_2$, то $(h_1 + B_1^* h_2, f) + (h_1 + B_2^* h_2, g) = 0$ $\forall f, g \in \mathcal{H}$. Полагая последовательно $g = -f$ и $g = 0$, в силу равенства $\ker(B_1^* - B_2^*) = \{0\}$ получаем $h_1 = h_2 = 0$.

Следствие 1. *Пусть* θ_1, θ_2 — *замкнутые линейные отношения в* $\mathcal{H}$ *и* $\exists z_0 \in \rho(\theta_1) \cap \rho(\theta_2)$. *Тогда трансверсальность* θ_1 *и* θ_2 *в* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, *а следовательно, и расширений* $\tilde{A}_{\theta_1}$ *и* $\tilde{A}_{\theta_2}$ *эквивалентна условию*

$$0 \in \rho((\theta_1 - z_0)^{-1} - (\theta_2 - z_0)^{-1}). \tag{4}$$

Доказательство вытекает из утверждения а) леммы 1, если представить θ_i в виде $\theta_i - z_0 = \{\{(\theta_i - z_0)^{-1} f, f\} : f \in \mathcal{H}\}$ $(i = 1, 2)$, где $(\theta_i - z_0)^{-1} \in [\mathcal{H}]$.

Лемма 2. *Подпространства* θ и $\mathcal{H}^{(2)}$ *трансверсальны* ($\theta \dot{+} \mathcal{H}^{(2)}$ $= \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$), *если и только если* $\theta = \{\{\varphi, B\varphi\} : \varphi \in \mathcal{H}\}$, *где* $B \in [\mathcal{H}]$ ($B \in \mathscr{E}(\mathcal{H})$).

Доказательство. Если $\theta \cap \mathcal{H}^{(2)} = \{0\}$, то в θ отсутствуют элементы вида $\{0, \varphi\}$, т. е. θ — график некоторого замкнутого оператора B. Если, к тому же, $\theta \dot{+} \mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, то $\mathfrak{D}(B) = \mathcal{H}$ и, следовательно, $B \in [\mathcal{H}]$. Обратное утверждение очевидно.

Следствие 2. *Если расширения* $\tilde{A}$ *и* $\tilde{A}_2$ *трансверсальны (дизъюнктны), то* $\exists B \in [\mathcal{H}]$ $(B \in \mathscr{E}(\mathcal{H}))$: $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$.

Замечание 1. Леммы 1 и 2 являются частными случаями предложения 1, доказательство которого здесь не приводится.

Предложение 1. *Пусть* θ_1 *и* θ_2 — *подпространства в* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Тогда:* *а)* θ_1 *и* θ_2 *трансверсальны* $\Leftrightarrow 0 \in \rho(\theta_1 - \theta_2) \cap \rho(\theta_1^{-1} - \theta_2^{-1})$;
в) $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \Leftrightarrow 0 \in [\rho(\theta_1 - \theta_2) \cup \sigma_c(\theta_1 - \theta_2)] \cap [\rho(\theta_1^{-1} - \theta_2^{-1}) \cup \sigma_c(\theta_1^{-1} - \theta_2^{-1})]$.

3. Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{M}_+ (\mathfrak{M}_-)$ — *максимальное равномерно положительное (отрицательное) подпространство в* $\tilde{\mathcal{H}}$. *Если подпространство* θ *трансверсально* $\mathfrak{M}_+$ *и* $\mathfrak{M}_-$, *то найдется максимальное нейтральное подпространство* $\mathfrak{M}_0$, *трансверсальное* θ.

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{H}} = \mathfrak{M}_+ [\dot{+}] \mathfrak{M}_+^{[\perp]}$ — каноническое разложение пространства Крейна $\tilde{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_1$ — соответствующая ему гильбертова норма в $\tilde{\mathcal{H}}$. В силу леммы 2 $\theta = \{\{\varphi, Q\varphi\} : \varphi \in \mathfrak{M}_+^{[\perp]}\}$, $\mathfrak{M}_- = \{\{\varphi, K\varphi\} : \varphi \in \mathfrak{M}_+^{[\perp]}\}$, где $Q, K \in [\mathfrak{M}_+^{[\perp]}, \mathfrak{M}_+]$ — угловые операторы подпространств θ и $\mathfrak{M}_-$ относительно разложения $\tilde{\mathcal{H}} = \mathfrak{M}_+ [+] \mathfrak{M}_+^{[\perp]}$. Так как $\mathfrak{M}_-$ равномерно отрицательно, то $\| K \|_1 \leqslant 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу леммы 1 трансверсальность подпространств θ и $\mathfrak{M}_-$ обеспечивает ограниченную обратимость оператора $Q - K$. Поэтому в его полярном разложении $Q - K = UR$, оператор U является изометрией из $\mathfrak{M}_+^{[\perp]}$ на $\mathfrak{M}_+$, а $R > 0$. Так как $\operatorname{Re}(U^* Q + I) = R + I + \operatorname{Re}(U^* K) \geqslant I - (I - \varepsilon I) = \varepsilon I$, то $0 \in \rho(U^* Q + I)$, т. е. оператор $Q + U$ ограниченно обратим. В силу леммы 1 подпространство θ трансверсально максимальному нейтральному подпространству

$$\theta_0 = (I - U)\mathfrak{M}_+^{[\perp]} = \{\{f, -Uf\} : f \in \mathfrak{M}_+^{[\perp]}\}. \tag{5}$$

Замечание 2. Заключение предложения 2 остается в силе, если условия трансверсальности подпространств $\theta, \mathfrak{M}_+$ и $\theta, \mathfrak{M}_-$ заменить следующими:

$$\overline{\theta \dotplus \mathfrak{M}_+} = \tilde{\mathcal{H}}, \overline{\theta \dotplus \mathfrak{M}_-} = \tilde{\mathcal{H}}.$$

Следствие 3. *Пусть θ — замкнутое линейное отношение в $\mathcal{H}$; $z_1, z_2 \in \rho(\theta) \cup \sigma_c(\theta)$, $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 < 0$. Тогда θ трансверсально некоторому максимальному нейтральному подпространству θ_0 вида* (5).

Доказательство вытекает из предложения 2, так как подпространство $\{\{f, zf\} : f \in \mathcal{H}\}$ равномерно положительно при $\operatorname{Im} z > 0$ и равномерно отрицательно при $\operatorname{Im} z < 0$.

Следствие 4. *Если $B \in \mathscr{C}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(B^*)$ и $B_I = \frac{1}{2i}(B - B^*) \in \in [\mathcal{H}]$, то подпространство $\{\{\varphi, B\varphi\} : \varphi \in \mathfrak{D}(B)\}$ трансверсально некоторому максимальному нейтральному подпространству.*

Следствие 5. *Если $z_1, z_2 \in \rho(\theta)$ и $\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 < 0$, то существует оператор $C = C^*$ в $\mathcal{H}$ такой, что*

$$0 \in \rho((\theta - z)^{-1} - (C - z)^{-1}) \quad \forall z \in \rho(\theta) \cap \rho(C). \tag{6}$$

Доказательство. Из следствий 1 и 3 вытекает наличие отношения $\theta_0 = \theta_0^*$ с указанным свойством. Существование же оператора $C = C^*$, удовлетворяющего условию (6), следует из элементарных соображений теории возмущений.

Замечание 3. Одного условия трансверсальности подпространств θ и $\mathfrak{M}_+$ недостаточно для справедливости заключения предложения 2. Действительно, пусть $\theta = \{\{\varphi, \alpha V^* \varphi\} : \varphi \in \mathfrak{M}_+^{[\perp]}\}$, где $|\alpha| > 1$, V — изометрия из $\mathfrak{M}_+$ на $V\mathfrak{M}_+ \subsetneqq \mathfrak{M}_+^{[\perp]}$. Тогда в силу леммы 1 θ не дизъюнктно ни с каким гипермаксимальным нейтральным подпространством $\mathfrak{M}_0 = \{\{\varphi, U\varphi\} : \varphi \in \mathfrak{M}_+^{[\perp]}\}$ (U — изометрия из $\mathfrak{M}_+$ на $\mathfrak{M}_+^{[\perp]}$), так как $0 \in \sigma_p(\alpha V^* - U)$, а следовательно, θ не трансверсально ни с каким максимальным равномерно отрицательным подпространством. Это легко доказать непосредственно или вывести из предложения 1.

4. Определение 3 [10, 11]. *Собственное расширение $\tilde{A} \supset A$ назовем почти разрешимым и будем писать $\tilde{A} \in \operatorname{as}(A)$, если оно трансверсально некоторому самосопряженному расширению оператора A.*

Предложение 3. *$\tilde{A} \in \operatorname{as}(A)$, если и только если $\exists$ ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ и оператор $B \in [\mathcal{H}]$ такие, что $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}(\tilde{A}_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$.*

Доказательство. Если в некотором ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ имеем $\tilde{A} = \tilde{A}_B$, где $B \in [\mathcal{H}]$, то в силу леммы 2 подпространства $\theta = \Gamma\mathfrak{D}(\tilde{A}_B) = \{\{\varphi, B\varphi\} : \varphi \in \mathcal{H}\}$ и $\mathcal{H}_2 = \Gamma\mathfrak{D}(\tilde{A}_2)$ трансверсальны, а следовательно, трансверсальны расширения $\tilde{A}_B$ и $\tilde{A}_2$.

Обратно, пусть $\tilde{A}$ трансверсально некоторому $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^*$, для которого в силу формулы Неймана $\mathfrak{D}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{D}(A) \dotplus (I + V)\mathfrak{N}_i$ ($V \in [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i}]$ — изометрия). Определим, следуя [22], ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, полагая

$$\mathcal{H} = \mathfrak{N}_{-i}, \Gamma_1 = iP_{-i} + iVP_i, \quad \Gamma_2 = -P_{-i} + VP_i, \tag{7}$$

где $P_{\pm i}$ — проекторы на $\mathfrak{N}_{\pm i}$ в разложении $\mathfrak{D}(A^*)$, по формуле Неймана [14]

$$\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A) \dot{+} \mathfrak{N}_i \dot{+} \mathfrak{N}_{-i}. \tag{8}$$

Тогда $\mathfrak{D}(\tilde{A}_2) = \ker \Gamma_2$ и в силу следствия 2 $\exists B \in [\mathcal{H}]$ такой, что

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2) = \mathfrak{D}(\tilde{A}_B).$$

Следствие 6. *Пусть $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^*$, $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^*$ — трансверсальные расширения оператора A. Тогда $\exists$ ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, для которого*

$$\ker \Gamma_i = \mathfrak{D}(\tilde{A}_i) \quad (i = 1, 2). \tag{9}$$

Доказательство. В силу предложения 3 $\exists$ ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0\}$, в котором $\ker \Gamma_2^0 = \mathfrak{D}(\tilde{A}_2)$ и $\ker(\Gamma_1^0 - B\Gamma_2^0) = \mathfrak{D}(\tilde{A}_1)$, где $B = B^* \in [\mathcal{H}]$. Искомое ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ получаем, полагая $\Gamma_2 = \Gamma_2^0$, $\Gamma_1 = \Gamma_1^0 - B\Gamma_2^0$.

Определение 4 [11, 12]. *Оператор-функцию $M(z)$, определенную равенством*

$$M(z)\Gamma_2 f_z = \Gamma_1 f_z, \quad (f_z \in \mathfrak{N}_z, \ z \in \rho(\tilde{A}_2)), \tag{10}$$

называем функцией Вейля, соответствующей ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$.

В [11, 12] показано, что $M(z)$ голоморфна в $\rho(\tilde{A}_2)$, принимает значения в $[\mathcal{H}]$, является Q-функцией оператора A, принадлежащей расширению $\tilde{A}_2$ [25] и связана с х. о.-ф. $C(z)$ оператора A, введенной в [22] и совпадающей в ПГЗ (7), с х. о.-ф. А. В. Штрауса из [26]. Там же (см. также [22]) доказано следующее.

Предложение 4. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — некоторое ПГЗ, θ — замкнутое линейное отношение в $\mathcal{H}$, $\tilde{A}_\theta \supset A$, $z \in \rho(\tilde{A}_2)$. Тогда*:

1) $z \in \rho(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \rho(M(z) - \theta)$;

2) $z \in \sigma_i(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_i(M(z) - \theta) \quad (i = p, c, r)$. (11)

Нам понадобится следующая связь формулы М. Г. Крейна для резольвент с ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, установленная авторами в [11, 12]:

$$(\tilde{A}_\theta - z)^{-1} = (\tilde{A}_2 - z)^{-1} + \gamma(z)(\theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\bar{z}). \tag{12}$$

Здесь $\gamma(z) = (\Gamma_2 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1}$, а $\tilde{A}_\theta$, $\tilde{A}_2$, $M(z)$ определены формулами (3), (9), (10).

Предложение 5. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ оператора A^*, θ_j $(j = 1, 2)$ — замкнутые линейные отношения в $\mathcal{H}$. Если $z_0 \in \rho(\tilde{A}_{\theta_1}) \cap \rho(\tilde{A}_{\theta_2})$, то верна эквивалентность*:

$$\tilde{A}_{\theta_1} \text{ и } \tilde{A}_{\theta_2} \text{ трансверсальны} \Leftrightarrow 0 \in \rho([(\tilde{A}_{\theta_1} - z_0)^{-1} - (\tilde{A}_{\theta_2} - z_0)^{-1}] \upharpoonright \mathfrak{N}_{z_0}).$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $z_0 = i$. Тогда $\exists$ ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, например, вида (7), в котором $M(i) = iI_{\mathcal{H}}$. Поэтому в силу (11) $i \in \rho(\theta_j)$ $(j = 1, 2)$, а из (12) получаем

$$(\tilde{A}_{\theta_1} - i)^{-1} - (\tilde{A}_{\theta_2} - i)^{-1} = \gamma(i)[(\theta_1 - i)^{-1} - (\theta_2 - i)^{-1}]\gamma^*(-i).$$

Теперь предложение следует из (4) с учетом ограниченной обратимости операторов $\gamma(i) \in [\mathcal{H}, \mathfrak{N}_i]$, $\gamma^*(-i) \upharpoonright \mathfrak{N}_{-i} \in [\mathfrak{N}_{-i}, \mathcal{H}]$.

Замечание 4. При дополнительных ограничениях предложение 5 доказано в [11] с помощью следующего аналога формулы Неймана (8):

$$\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A) \dot{+} \mathfrak{N}_{z_1} \dot{+} \mathfrak{N}_{z_2} \quad (\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 < 0).$$

Теорема 1. *Если* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ*, θ — *линейное отношение в* $\mathcal{H}$, *то*:

1) $\tilde{A}_\theta \in \mathrm{as}(A)$, *если* $\exists z_1, z_2 \in \rho(\tilde{A}_\theta) \cup \sigma_c(\tilde{A}_\theta)$ *и* $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 < 0$;

2) $\tilde{A}_\theta \in \mathrm{as}(A)$, *если* $\exists z_1, z_2 \in \rho(\theta) \cup \sigma_c(\theta)$ *и* $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 < 0$;

3) $\tilde{A}_\theta \in \mathrm{as}(A)$, *если* $B \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(B^*)$ *и* $B_I \in [\mathcal{H}]$.

Доказательство. Утверждения 2 и 3 теоремы вытекают из следствий 3 и 4. Далее, в силу предложения 4 $0 \in \rho(\theta - M(z_j)) \cup \sigma_c(\theta - M(z_j))$ $(j = 1, 2)$. Последнее условие эквивалентно трансверсальности отношения θ графикам $\mathfrak{M}_j = \{\{f, M(z_j) f\}\}$ операторов $M(z_j)$. Но в силу свойств $M(z)$ подпространство $\mathfrak{M}_1$ $(\mathfrak{M}_2)$ равномерно положительно (отрицательно), если $\operatorname{Im} z_1 > 0$ $(\operatorname{Im} z_2 < 0)$. Осталось применить предложение 2.

Замечание 5. Приведем примеры операторов T, у которых $\rho(T) \neq \varnothing$, но $T \notin \mathrm{as}(A)$ и, более того, T не дизъюнктно ни с каким с. р. $\tilde{A}$. Легко видеть, что дизъюнктность расширений T и $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^*$, у которых $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(A) \dotplus (I + K)\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{D}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{D}(A) \dotplus (I + V)\mathfrak{N}_i$, эквивалентна условию $1 \notin \sigma_p(V^*K)$, а их трансверсальность — условию $1 \in \rho(V^*K)$.

Необходимые примеры получаем, полагая $K = \alpha U^*$, где $|\alpha| > 1$, U — изометрия из $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{N}_{-i}$ на $U\mathfrak{N}_{-i} \subsetneqq \mathfrak{N}_i$. Действительно, для любой изометрии V из $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$ оператор UV — неунитарная изометрия в $\mathfrak{N}_{-i}$ и, следовательно, $\sigma(UV)$ и $\sigma(V^*U^*)$ совпадают с единичным кругом, причем $\sigma_p(V^*U^*) = \{z : |z| < 1\}$. Поэтому $1 \in \sigma_p(\alpha V^*U^*)$ при $|\alpha| > 1$, хотя $-i \in \rho(T)$, ибо $K = \alpha U^* \in [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i}]$.

Среди указанных примеров содержатся максимальные эрмитовы расширения $T \subset T^*$. Построенные примеры интересны и тем, что операторы T и T^* трансверсальны при $|\alpha| > 1$. В самом деле, их трансверсальность эквивалентна условию $1 \in \rho(K^*K) \cap \rho(KK^*)$, которое, очевидно, выполняется, ибо $KK^* = |\alpha|^2 I$, $K^*K = |\alpha|^2 P$ (P — ортопроектор в $\mathfrak{N}_i$ на $U\mathfrak{N}_{-i}$). Таким образом, трансверсальность T и T^* не достаточна для почти разрешимости расширения $T \supset A$.

2. Характеристические оператор-функции.

1. Пусть $\tilde{A} \in \mathrm{as}(A)$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, в котором $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$, где $B \in [\mathcal{H}]$ (см. предложение 3) $\Gamma_2(z) = \Gamma_2 \restriction_{\mathfrak{N}_z} \in [\mathfrak{N}_z, \mathcal{H}]$.

Определение 4. *Включим оператор* B *в узел* $\varphi = (B, \mathcal{H}; K, J, E)$, *т. е. гильбертово пространство* E *и операторы* $J \in [E]$, $K \in [E, \mathcal{H}]$ *таковы, что* $J = J^* = J^{-1}$, $B_I = KJK^*$ [8]. *Оператор-функцию*

$$W(z) = I + 2iK^*\Gamma_2(\tilde{A}_B^* - z)^{-1}\Gamma_2^*(\bar{z})KJ \quad (z \in \rho(A_B^*)) \tag{13}$$

назовем х. о.-ф. оператора $\tilde{A}_B$ *класса* Λ_J. *Будем говорить, что* $W(z) \in \Lambda_J^0$, *если при этом* $\ker K = \{0\}$.

Это определение естественно обобщает определение М. С. Лившица х. о.-ф. ограниченного оператора [8] на класс $\mathrm{as}(A)$, если заметить, что в силу условия $B_I = KJK^*$, $\forall f, g \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_B)$

$$\frac{1}{2i}[(\tilde{A}_B f, g) - (f, \tilde{A}_B g)] = \operatorname{Im}(B\Gamma_2 f, \Gamma_2 g) = (KJK^*\Gamma_2 f, \Gamma_2 g).$$

Формальному обобщению препятствует незамыкаемость оператора Γ_2 из H в $\mathcal{H}$, поэтому в (13) вместо Γ_2^* участвует $\Gamma_2^*(\bar{z}) \in [\mathcal{H}, \mathfrak{N}_{\bar{z}}]$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *некоторое ПГЗ*; $M(z)$ — *соответствующая функция Вейля*, $B \in [\mathcal{H}]$, $\varphi = (B, \mathcal{H}; K, J, E)$ — *операторный узел. Тогда х. о.-ф* $W(z)$ *оператора* $\tilde{A}_B$ *имеет вид*

$$W(z) = I + 2iK^*(B^* - M(z))^{-1}KJ. \tag{14}$$

Доказательство. Учитывая соотношения $\gamma(z) = (\Gamma_2 \restriction_{\mathfrak{N}_z})^{-1}$ и $\Gamma_2 (\tilde{A}_2 - z)^{-1} = 0$ (см. п. 1), получаем из (12), (13) $\forall z \in \rho(\tilde{A}_B^*)$

$$W(z) = I + 2iK^* \Gamma_2 (\tilde{A}_B^* - z)^{-1} \Gamma_2^* (\bar{z}) KJ = I + 2iK^* \Gamma_2 (\tilde{A}_2 - z)^{-1} \Gamma_2^* (\bar{z}) KJ +$$

$$+ 2iK^* \Gamma_2 \gamma(z) (B - M(z))^{-1} \gamma^* (\bar{z}) \Gamma_2^* (\bar{z}) KJ = I + 2iK^* (B^* - M(z))^{-1} KJ.$$

Теорема доказана.

Замечание 6. Пусть $\ker B_I = \{0\}$ и $E = \mathfrak{R}(|B_I|^{1/2})$ — гильбертово пространство с метрикой $\|h\|_E = \||B_I|^{-1/2} h\|_{\mathcal{H}}$ $(h \in E)$, $J = \operatorname{sign} B_I \in [E]$, $K = \operatorname{sign} B_I$. Тогда $K^* = J|B_I| \in [\mathcal{H}, E]$ и х. о.-ф., соответствующая построенному узлу $\varphi = (B, \mathcal{H}; K, J, E)$, имеет вид

$$W(z) = I + 2iJ|B_I|(B^* - M(z))^{-1} = (B - M(z))(B^* - M(z))^{-1}, \quad (15)$$

вполне аналогичный известной формуле для х. о.-ф. оператора Штурма—Лиувилля (см., например, [15]).

Замечание 7. В предложении 6 покажем, что х. о.-ф. $W(z)$ класса Λ_J^0 совпадает с х. о.-ф. по А. В. Штраусу оператора $\tilde{A}_B$ [2]. Напомним, что линейное пространство $\mathfrak{L}$ с невырожденным эрмитовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{L}}$ называется граничным пространством оператора $\tilde{A}$, если существует линейный оператор Γ $(\Gamma \mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{L})$ такой, что $\forall f, g \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$

$$(\tilde{A} f, g) - (f, \tilde{A} g) = i \langle \Gamma f, \Gamma g \rangle_L.$$

Оператор Γ называется граничным. Пусть $\mathfrak{L}', \Gamma'$ — граничное пространство и граничный оператор для $-\tilde{A}^*$. Тогда х. о.-ф. $\chi(z)$ расширения $\tilde{A}$ определяется равенством

$$\chi(z) \Gamma f = \Gamma' g_z \ (z \in \rho(\tilde{A}^*), f \in \mathfrak{D}(\tilde{A})),$$

где $g_z \in \mathfrak{D}(\tilde{A}^*)$ — решение уравнения $(\tilde{A}^* - z) g_z = (\tilde{A} - z) f$.

Предложение 6. *Пусть* $\tilde{A} = \tilde{A}_B \in \operatorname{as}(A)$, $\varphi = (B, \mathcal{H}; K, J, E)$, $W(z) \in \Lambda_J^0$, *граничные пространства* $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ *и граничные операторы* Γ, Γ' *определены равенствами* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' = K^* \mathcal{H}$, $\Gamma = K^* \Gamma_2 \restriction_{\mathfrak{D}(\tilde{A})}$, $\Gamma' = K^* \Gamma_2 \restriction_{\mathfrak{D}(\tilde{A}^*)}$. *Тогда* $W(z) = \chi(z)$.

Доказательство. $\forall f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_B)$ найдем $g_z \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_B^*)$ из условия $\tilde{A}_B f - \tilde{A}_B^* g_z = z(f - g_z)$, $(z \in \rho(\tilde{A}_B^*))$. Так как $f - g_z \in \mathfrak{N}_z$, то $\Gamma_1(f - g_z) = M(z) \Gamma_2 (f - g_z)$. Учитывая, что $\Gamma_1 f = B \Gamma_2 f$, $\Gamma_1 g_z = B^* \Gamma_2 g_z$, получаем $B\Gamma_2 f - B^* \Gamma_2 g_z = M(z) \Gamma_2 (f - g_z)$. Отсюда $[B - M(z)] \Gamma_2 f = [B^* - M(z)] \Gamma_2 g_z$. Так как $z \in \rho(\tilde{A}_B^*)$, то в силу предложения 4 $0 \in \rho(B^* - M(z))$. Поэтому $\Gamma_2 g_z = [B^* - M(z)]^{-1} [B - M(z)] \Gamma_2 f$. Таким образом,

$$W(z) \Gamma f = [I + 2iK^* (B^* - M(z))^{-1} KJ] K^* \Gamma_2 f = K^* (B^* - M(z))^{-1} \times$$

$$\times (B - M(z)) \Gamma_2 f = K^* \Gamma_2 g_z = \Gamma' g_z = \chi(z) \Gamma f.$$

2. Определим в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ голоморфную оператор-функцию

$$V(z) = K^* (B_R - M(z))^{-1} K. \quad (16)$$

Предложение 7. *Пусть* $W(z) \in \Lambda_J$. *Тогда* $\forall z \in \rho(\tilde{A}_B^*) \cap (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$ *существует* $(W(z) + I)^{-1} \in [E]$ *и*

$$V(z) = -i(W(z) - I)(W(z) + I)^{-1} J. \quad (17)$$

Доказательство (ср. с [8]). Умножим соотношение

$$(B^* - M(z))^{-1} - (B_R - M(z))^{-1} = i(B^* - M(z))^{-1} KJK^* (B_R - M(z))^{-1}$$

слева на $2iK^*$, а справа на KJ. Получим

$$W(z) - I - 2iV(z)J = i(W(z) - I)V(z)J,$$

откуда $(W(z) + I)(I - iV(z)J) = 2I$. Аналогично устанавливается равенство $(I - iV(z)J)(W(z) + I) = 2I$, из которого и следует (17).

Отметим следующие свойства функций $V(z)$ и $W_{\tilde{A}}(z)$.

Предложение 8. *a)* $V(z) \in (R)$, *т. е.* $\operatorname{Im} V(z)/\operatorname{Im} z \geqslant 0$;

$$b) \ \frac{J - W_{\tilde{A}}(z) J W^*_{\tilde{A}}(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0 \quad \forall z \in (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-) \cap \rho(\tilde{A}^*); \tag{18}$$

c) $\forall z \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{A}^*)$ *существует* $W^{-1}_{\tilde{A}}(z)$ *и справедливы равенства*

$$W^{-1}_{\tilde{A}}(z) = W_{\tilde{A}^*}(z) = JW^*(\bar{z})J.$$

Доказательство. Так как $\operatorname{Im} M(z)/\operatorname{Im} z > 0$, из (16) получаем

$$\frac{\operatorname{Im} V(z)}{\operatorname{Im} z} = K^*(B_R - M(z))^{-1} \frac{\operatorname{Im} M(z)}{\operatorname{Im} z} (B_R - M^*(z))^{-1} K \geqslant 0. \tag{19}$$

Утверждение b) вытекает из тождества

$$\operatorname{Im} V(z) = (W_{\tilde{A}}(z) + I)^{-1} (J - W_{\tilde{A}}(z) J W^*_{\tilde{A}}(z)) (W_{\tilde{A}}(z)^* + I)^{-1}. \tag{20}$$

Равенство $W_{\tilde{A}}(z)^{-1} = W_{\tilde{A}^*}(z)$ следует из соотношения (15), а равенство $W_{\tilde{A}^*}(z) = JW^*(\bar{z})J$ — из (14).

Если $W(z) \in \Lambda^0_J$, то, как видно из (19), $\ker V_I(z) = \{0\}$. Это позволяет с учетом неравенства $V_I(z) > 0 \ \forall z \in \mathbb{C}_+$ ввести [27] оснащение $E^W_+ := V_I^{1/2}(z_0) E \subset E \subset E^W_-$, полагая $\forall \xi, \eta \in E^W_+$; $f, g \in E$:

$$(\xi, \eta)_+ = (V_I(z_0)^{-1/2}\xi, V_I(z_0)^{-1/2}\eta), \ (f, g)_- = (V_I(z_0)^{1/2} f, V_I(z_0)^{1/2} g). \tag{21}$$

Предложение 9. *Пусть* $W(z) \in \Lambda^0_J$. *Тогда a) метрики в* E^W_+, E^W_- *при различных* $z_0 \in \mathbb{C}_+$ *эквивалентны; b)* $V(z) \in [E^W_-, E^W_+]$ $\forall z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, $V^{-1}(z) \in [E^W_+, E^W_-]$; *c)* $(W(z) - I)J$ *допускает расширение до изоморфизма из* E^W_- *в* E^W_+; *d)* $W(z) + I$ *— изоморфизм пространства* E^W_+.

Доказательство. Рассмотрим пополнение E_- пространства E в метрике $\|f\|_- = \|K^* f\|$, $E_+ = \Re(K^*)$ с метрико $\|\xi\|_+ = \|(K^*)^{-1}\xi\|$. Тогда $K^*(K)$ — изоморфизм со значениями в $[\mathcal{H}, E_+]$ ($[E_-, \mathcal{H}]$). Из (19) получим

$$V_I(z_0) = K^*(B_R - M(z_0))^{-1} M_I(z_0) (B_R - M^*(z_0))^{-1} K.$$

Так как $M_I(z_0)$ — изоморфизм в $\mathcal{H}$, то $V_I(z_0)$ допускает продолжение до изоморфизма из E_- на E_+. Таким образом, $E^W_- = E_-$ и $E^W_+ = E_+$, что и доказывает утверждение a). Утверждения b), c) следуют из (16) и равенства $(W(z) - I)J = 2iK^*(B^* - M(z))^{-1}K$.

3. Характеристические функции $W(z)$ вида (13) зависят от выбора ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, в котором $\tilde{A} = \tilde{A}_B$ ($B \in [\mathcal{H})$, и способа включения оператора B в узел φ. Связь между двумя х. о.-ф. содержится в теореме 3, которой предпошлем предложения 10, 11.

Предложение 10. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *и* $\{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ *— некоторые ПГЗ оператора* A^*, $M(z)$ *и* $\tilde{M}(z)$ *— соответствующие функции Вейля,* V *— изометрический оператор из* $\mathcal{H}$ *на* $\tilde{\mathcal{H}}$ ($\dim \mathcal{H} = \dim \tilde{\mathcal{H}}$), $j =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -iI_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ iI_{\tilde{\mathcal{H}}} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2) = \ker(\tilde{\Gamma}_1 - \tilde{B}\tilde{\Gamma}_2)$. *Тогда выполняются соотношения*

$$\tilde{M}(z) = (X_{11}VM(z)V^{-1} + X_{12})(X_{21}VM(z)V^{-1} + X_{22})^{-1}, \tag{22}$$

$$\tilde{B} = (X_{11}VBV^{-1} + X_{12})(X_{21}VBV^{-1} + X_{22})^{-1}, \tag{23}$$

в которых $X = (X_{ij})_{i,j=1,2}$ — *j-унитарный оператор в* $[\tilde{\mathcal{H}} \oplus \tilde{\mathcal{H}}]$.

Доказательство. Известно [22], что ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, $\{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ связаны равенством

$$X\{V\Gamma_1 f, V\Gamma_2 f\} = \{\tilde{\Gamma}_1 f, \tilde{\Gamma}_2 f\}, \tag{24}$$

в котором $X = (X_{ij})_{i,j=1,2}$ — j-унитарный и, следовательно, ограниченный оператор. Равенство (24) записывается в эквивалентном виде

$$\tilde{\Gamma}_1 = X_{11}V\Gamma_1 + X_{12}V\Gamma_2, \quad \tilde{\Gamma}_2 = X_{21}V\Gamma_1 + X_{22}V\Gamma_2 \quad (X_{ij} \in [\tilde{\mathcal{H}}]). \tag{25}$$

Из (25) и равенств $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2) = \ker(\tilde{\Gamma}_1 - \tilde{B}\tilde{\Gamma}_2)$ получаем

$$\tilde{B}(X_{21}VBV^{-1}X_{22}) = X_{11}VBV^{-1} + X_{12}. \tag{26}$$

Покажем ограниченную обратимость оператора $X_{21}VBV^{-1} + X_{22}$. Из j-унитарности оператора X вытекают соотношения

$$X_{11}^* X_{21} = X_{21}^* X_{11}, \quad X_{12}^* X_{22} = X_{22}^* X_{12}, \quad X_{11}^* X_{22} - X_{21}^* X_{12} = I, \tag{27}$$

$$X_{11}X_{12}^* = X_{12}X_{11}^*, \quad X_{21}X_{22}^* = X_{22}X_{21}^*, \quad X_{11}X_{22}^* - X_{12}X_{21}^* = I. \tag{28}$$

Домножив (26) слева на X_{21}^* и учтя (27), получим

$$(X_{11}^* - X_{12}^*\tilde{B})(X_{21}VBV^{-1} + X_{22}) = I, \tag{29}$$

Аналогично из равенства $\tilde{B}(X_{21}VB^*V^{-1} + X_{22})X_{21}^* = (X_{11}VBV^{-1} + X_{22})X_{21}^*$ и соотношений (28) выводим

$$(X_{21}VBV^{-1} + X_{22})(X_{11}^* - X_{12}^*\tilde{B}) = I. \tag{30}$$

Таким образом, в силу (29), (30) $\exists\,(X_{21}VBV^{-1} + X_{22})^{-1} = X_{11}^* - X_{12}^*\tilde{B} \in [\mathcal{H}]$. Соотношение (23) следует теперь из (26), а (22) — частный случай (23) при $B = M(z)$, $\tilde{B} = \tilde{M}(z)$.

Предложение 11. *Пусть ПГЗ* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, $\{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ *связаны соотношением* (24), $V = I$, U_2 — *J-унитарный оператор в* $\mathcal{H}$ *и оператор* B *включен в узел* $\varphi = \{\mathcal{H}, B; K, J, E\}$. *Положим* $\tilde{K} = (B^*X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1}K(U_2^*)^{-1}$. *Тогда совокупность* $\tilde{\varphi} = \{\mathcal{H}, \tilde{B}; \tilde{K}, J, E\}$ *образует узел и соответствующие х. о.-ф.* $W(z)$ *и* $\tilde{W}(z)$ *связаны соотношением* $\tilde{W}(z) = U_1W(z)U_2$, *в котором*

$$U_1 = U_2^{-1}[I - 2iK^*(X_{21}B + X_{22})^{-1}X_{21}KJ].$$

Доказательство. В силу (23), (27) и равенства $B_I = KJK^*$ получаем

$$2i\tilde{B}_I = [(X_{11}B + X_{12})(X_{21}B + X_{22})^{-1} - (B^*X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1}(B^*X_{11}^* + X_{12}^*)] =$$
$$= (B^*X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1}[B^*(X_{21}^*X_{12} - X_{12}^*X_{22})B + B^*(X_{21}^*X_{12} - X_{11}^*X_{22}) +$$

$$+ (X_{22}^* X_{11} - X_{12}^* X_{21}) B + (X_{22}^* X_{12} - X_{12}^* X_{22})] (X_{21} B + X_{22})^{-1} =$$

$$= 2i (B^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} K (U_2^*)^{-1} J (U_2)^{-1} K^* (X_{21} B + X_{22})^{-1} = 2i \tilde{K} J \tilde{K}^*.$$

Таким образом, совокупность $\tilde{\varphi} = \{\mathcal{H}, \tilde{B}; \tilde{K}, J, E\}$ образует узел. Далее, согласно (22), (23) с учетом тождества (27) получаем

$$\tilde{W}(z) = I + 2i\tilde{K}^* (B^* - M(z))^{-1} \tilde{K} J = I + 2iU_2^{-1} K^* (X_{21} B + X_{22})^{-1} \times$$
$$\times [(B^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} (B^* X_{11}^* + X_{12}^*) - (X_{11} M(z) + X_{12})(X_{21} M(z) + X_{22})^{-1}]^{-1} \times$$
$$\times (B^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} KJU_2 = I + 2iU_2^{-1} K^* (X_{21} B + X_{22})^{-1} (X_{21} M(z) + X_{22}) \times$$
$$\times (B^* - M(z))^{-1} KJU_2 = [I - 2iU_2^{-1} K^* (X_{21} B + X_{22})^{-1} X_{21} KJU_2] \times$$
$$\times [I + 2iU_2^{-1} K^* (B^* - M(z))^{-1} KJU_2] = U_1 W(z) U_2.$$

Заметим, что оператор $U = U_2 U_1 J$ унитарен. Действительно,

$$JU^* J = I + 2iK^* X_{21}^* (B^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} KJ = U^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть $W(z) \in \Lambda_J^0$ и U_1, U_2 — J-унитарные операторы в E. Для того чтобы оператор-функция $\tilde{W}(z) = U_1 W(z) U_2$ принадлежала классу Λ_J^0, необходимо и достаточно, чтобы: a) оператор $U = U_2 U_1$ являлся изоморфизмом в E_+^W; b) $(U - I) J \in [E_-^W, E_+^W]$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\tilde{W}(z) = U_1 W(z) U_2 \in \in \Lambda_J^0$, то $W_1(z) = U_1^{-1} \tilde{W}(z) U = W(z) U_2 U_1 \in \Lambda_J^0$. Кроме того, $U = U_2 U_1$ являлся J-унитарным и, следовательно, совпадают J-формы: $J - W_1(z) \times \times JW_1^*(z) = J - W(z) JW(z)^*$. Из предложения 8 следует, что $(W(z) - I) \times \times J \in [E_-^W, E_+^W]$, $(W_1(z) - I) J \in [E_-^{W_1}, E_+^{W_1}]$. Покажем, что $E_-^W = E_-^{W_1}$. Из равенств (20) (21) получаем $\| f \|_-^W = \| (W_1^* + I)(W^* + I)^{-1} f \|_-^{W_1}$, т. е. оператор $C = (W_1^*(z_0) + I)(W^*(z_0) + I)^{-1}$ является изометрией из E_-^W на $E_-^{W_1}$. Следовательно, оператор $(W_1^*(z_0) + I)^{-1} C (W^*(z_0) + I)$ продолжается с учетом предложения 9 до изоморфизма E_-^W на $E_-^{W_1}$ и, являясь тождественным на E, будет таковым и на E_-^W, т. е. $E_-^W = E_-^{W_1}$.

Далее, из равенств

$$Uf = (I - W(z)) J (JUf) + (W_1(z) - I) J (Jf) + f,$$

$$U^{-1} f = (I - W_1(z)) J (JU^{-1} f) + (W(z) - I) J (Jf) + f$$

и предложения 9 видим, что $UE_+^W \subset E_+^W$ и $U^{-1} E_+^W \subset E_+^W$ и, следовательно, U, U^{-1} — изоморфизмы в E_+^W. Но тогда $(U^{-1})^* = JUJ$ — изоморфизм в E_-^W, и из равенства $(W_1(z) - I) J = (W(z) - I) J (JUJ) + (U - I) J$ и предложения 9 вытекает включение $(U - I) J \in [E_-^W, E_+^W]$.

Достаточность. Пусть $\tilde{A}_B \in \mathrm{as}(A)$, $\mathfrak{D}(\tilde{A}_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$, $B \in [\mathcal{H}]$ и $W(z) \in \Lambda_J^0$ — его х. о.-ф. вида (14). Положив $U = U_2 U_1$, введем оператор

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K(U^* + I) K^{-1} & -K(U^* + I) K^{-1} B_R + iK(U^* - I) JK^* \\ i(K^*)^{-1} J (I - U^*) K^{-1} & -i(K^*)^{-1} J (I - U^*) K^{-1} B_R + (K^*)^{-1} \times \\ & \times J (U^* + I) JK^* \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $X_{ij} \in [\mathcal{H}]$ $(i, j = 1, 2)$. Действительно, так как $K^{-1} \in \in [\mathcal{H}, E_-]$, $J(I - U^*) = ((I - U) J)^* \in [E_-, E_+]$ и $(K^*)^{-1} \in [E_+, \mathcal{H}]$, то $X_{21} \in$

$\in[\mathcal{H}]$. Аналогично устанавливается ограниченность в $\mathcal{H}$ остальных операторов X_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant 2)$. Теперь j-унитарность оператора X эквивалентна равенствам (27), (28). Легко видеть, что

$$X_{11}X_{12}^{*} = \frac{1}{4}\{-K(U^{*}+I)K^{-1}B_R(K^{*})^{-1}(U+I)K^{*} - iK(U^{*}+I)\times$$

$$\times J(U-I)K^{*}\} = \frac{1}{4}\{-K(U^{*}+I)K^{-1}B_R(K^{*})^{-1}(U+I)K^{*} + iK(U^{*}-I)\times$$

$$\times J(U+I)K^{*}\} = X_{12}X_{11}^{*},$$

так как $(U^{*}+I)J(I-U) = (U^{*}-I)J(I+U)$. Далее,

$$X_{11}X_{22}^{*} - X_{12}X_{21}^{*} = \frac{1}{4}\{K(U^{*}+I)J(U+I)JK^{-1} - K(U^{*}-I)J(I-U)\times$$

$$\times JK^{-1}\} = I,$$

$$X_{21}X_{22}^{*} = \frac{1}{4}\{-(I-U^{*})K^{-1}B_R(K^{*})^{-1}(I-U) + i(I-U^{*})J(I+U)\}\times$$

$$\times JK^{-1} = X_{22}X_{21}^{*}.$$

Итак, соотношения (28) выполнены, а (27) проверяются аналогично.

Так как X j-унитарен, определим новое ПГЗ $\{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ формулами (24), (25), положив $V = I$. Легко видеть, что $X_{11}B + X_{12} = iKU^{*}JK^{*}$ и $X_{21}B + X_{22} = (K^{*})^{-1}JU^{*}JK^{*}$. Следовательно, $(X_{21}B + X_{22})^{-1} = (K^{*})^{-1}UK^{*} \in$ $\in[\mathcal{H}]$ в силу условия а) теоремы. В новом ПГЗ $\{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ согласно предложению 10 $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \ker(\tilde{\Gamma}_1 - \tilde{B}\tilde{\Gamma}_2)$, где $\tilde{B} = (X_{11}B + X_{12})(X_{21}B + X_{22})^{-1} =$ $= iKJK^{*}$. Полагая $\tilde{K} = (B^{*}X_{21}^{*} + X_{22}^{*})^{-1}K(U_2^{*})^{-1} = KU_1^{*}$ и включая оператор $\tilde{B}$ в узел $\tilde{\varphi} = (\mathcal{H}, \tilde{B}; \tilde{K}, J, E)$, получаем в силу предложения 11 $\tilde{W}(z) = U_1W(z)U_2$. Теорема доказана.

4. Укажем критерий принадлежности аналитической оператор-функции классу Λ_J^0.

Теорема 4. *Пусть $W(z)$ — аналитическая в некоторой окрестности Z_W точки $z_0 \in \mathbb{C}_+$ оператор-функция со значениями в $[E]$, $J = J^{*} = J^{-1} \in [E]$. Для того чтобы $W(z) \in \Lambda_J^0$, необходимо и достаточно, чтобы $-1 \in \rho(W(z))$ $\forall z \in Z_W \cap \mathbb{C}_+$ и оператор-функция $V(z) = -i(W(z)-I)\times$ $\times(W(z)+I)^{-1}J$ допускала аналитическое продолжение в $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющее условиям:*

$$a)\ V(z) \in (R)_E; \qquad b)\ \lim_{y\uparrow\infty} y^{-1}V(iy) = 0;$$

$$c)\ \lim_{y\uparrow\infty} y(\operatorname{Im} V(iy)f, f) = \infty \quad \forall f \in E_-\setminus\{0\};$$

$$d)\ V(z) \in [E_-^W, E_+^W] \quad \forall z \in Z_W.$$

Доказательство. Необходимость вытекает из формулы (16), результатов работы [25] и предложений 8, 9.

Достаточность. Рассмотрим линеал $\mathfrak{L}(V)$ функций $F = f(z)$ на $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ с конечным носителем и со значениями в E_-. Следуя работе Крейна, Лангера [25], определяем в $\mathfrak{L}(V)$ билинейную форму

$$(F, G)_V = \sum_{z,\zeta}\left(\frac{V(z) - V^{*}(\zeta)}{z - \bar{\zeta}}f(z), g(\zeta)\right) \quad (F = f(z), G = g(\zeta)). \qquad (31)$$

В силу условия d) это определение корректно, так как билинейная форма $(x, y)_E$ продолжается на $E_+ \times E_-$. Замыкание оператора $V(z) \in [E_-, E_+]$ будем также обозначать $V(z)$. Так как $V(z) \in (R)_E$, то $(F, F)_V \geqslant 0$. Из неравенства Коши — Буняковского следует, что $\mathfrak{L}_0 = \{F \in \mathfrak{L}(V) : (F, F)_V = 0\}$ образует линеал в $\mathfrak{L}(V)$. Обозначим H_V пополнение фактор-пространства $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ по норме $\| F \|_V = (F, F)_V^{1/2}$. Определим в $\mathfrak{L}(V)$ оператор $\hat{A}$ и отображения $\chi_1 : \mathfrak{L} \to E_-$, $\chi_2 : \mathfrak{L} \to E_+$, полагая

$$\hat{A}F = zf(z), \ \chi_1(F) = \sum_z f(z), \quad \chi_2(F) = \sum_z V(z) f(z). \tag{32}$$

Обозначив $\mathfrak{D}_i = \ker \chi_i$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$, рассмотрим сужение $\hat{A} \restriction_{\mathfrak{D}_i} = \hat{A}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ оператора $\hat{A}$ на линеалы $\mathfrak{D}_i$. Из (31), (32) получим

$$(\hat{A}F, G)_V - (F, \hat{A}G)_V = \sum_{z,\zeta} ((V(z) - V^*(\zeta)) f(z), g(\zeta)) = (\chi_2(F), \chi_1(G)) - \\ - (\chi_1(F), \chi_2(G)). \tag{33}$$

Из (33) вытекает равенство $(\hat{A}F, G)_Y = (F, \hat{A}_0 G)$, а из него — включение $\hat{A}_0(\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{L}_0$, поэтому оператор $\hat{A}_0$ индуцирует эрмитов оператор в $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$. Из условий b), c), как показано в [25], вытекает, что $\hat{A}\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_0$, $\hat{A}_i(\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{L}_0$ $(i = 1, 2)$ и, следовательно, операторы $\hat{A}_i$, $\hat{A}$ индуцируют операторы в H_V, замыкания которых обозначим A_i $(i = 0, 1, 2)$, A. При этом $\overline{\mathfrak{D}(A_0)} = H_V$, $A_i = A_i^*$ $(i = 0, 1, 2)$, $A = A_0^*$.

Функцию $f(z)$, отличную от нуля лишь в одной точке z_0 $(f(z_0) = h$, $h \in E_-)$, обозначим $\delta_{z_0}(z)h$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{N}_{z_0} = \ker(A_0^* - z_0) = \{\delta_{z_0}(z)h : h \in E_-\} \quad (z_0 \neq \bar{z}_0).$$

Заметим, что $\ker \operatorname{Im} V(i) = \{0\}$, так как при $\operatorname{Im}(V(i)h, h) = 0$, $h \in E$, имеем $\operatorname{Im}(V(z)h, h) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}_+$, что противоречит условию b). Пусть $R = \operatorname{Im} V(i)$, тогда $R^{1/2} \in [E_-, E]$, $R^{-1/2} \in [E_+, E]$. Определим операторы $\Gamma_i : \mathfrak{L} \to E$, полагая $\Gamma_1 F = R^{1/2}\chi_1 F$, $\Gamma_2 F = -R^{-1/2}\chi_2 F$ $(F \in \mathfrak{L})$. Введем в $D(A_0^*)$ норму графика $\| F \|_{+,V}^2 = \| F \|_V^2 + \| A_0^* F \|_V^2$ и покажем непрерывность операторов Γ_1, Γ_2 из $D(A^*)$ в E.

Оператор-функция $\tilde{V}(z) = R^{-1/2} V(z) R^{-1/2}$ принадлежит классу $(R)_E$ и допускает интегральное представление

$$\tilde{V}(z) = V_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\Sigma(t), \tag{34}$$

в котором $V_0 = V_0^* \in [E]$, а $\Sigma(t)$ — неубывающая операторная мера, причем $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{-1} d\Sigma(t) < \infty$. Далее, $0 \in \rho(\tilde{V}(i))$ $(\operatorname{Im} \tilde{V}(i) = I)$ и, следовательно, $0 \in \rho(\tilde{V}(z))$ $\forall z \in \mathbb{C}_+$, ибо $\tilde{V}(z) \in (R)_E$. Поэтому оператор-функция $-\tilde{V}^{-1}(z) \in (R)_E$ принимает значения в $[E]$.

Из (31), (34) для $F = f(z) = \sum_j \delta_j(z) h_j$ получаем

$$\| F \|_{+,V}^2 = \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + z_j \bar{z}_k}{(t - z_j)(t - \bar{z}_k)} d(\Sigma(t) R^{1/2} h_j, R^{1/2} h_k) =$$

$$= \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(1 + t z_j)(1 + t \bar{z}_k)}{(t - z_j)(t - \bar{z}_k)} + 1 \right] \frac{d(\Sigma(t) R^{1/2} h_j, R^{1/2} h_k)}{1 + t^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\Sigma(t) R^{1/2} h_j, R^{1/2} h_k)}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\Sigma(t) R^{1/2}\chi_1 F, R^{1/2}\chi_1 F)}{1+t^2} =$$

$$= (\operatorname{Im} \tilde{V}(i)\, \Gamma_1 F, \Gamma_1 F)_E = \| \Gamma_1 F \|_E^2. \tag{35}$$

Далее, оператор-функция $-\tilde{V}^{-1}(z) = R^{1/2} V^{-1}(z) R^{1/2} \in (R)_E$ допускает интегральное представление $\tilde{V}^{-1}(z) = V_0' + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+tz)}{(t-z)(1+t^2)}\, d\Sigma_1(t)$ с неубывающей операторно-значной функцией $\Sigma_1(t)$, $V_0' = (V_0')^*$. Поэтому из (31) аналогично предыдущему получаем

$$\| F \|_{+,V}^2 = \sum_{j,k} (1 + z_j \bar{z}_k) \left(\frac{\tilde{V}^{-1}(\bar{z}_k) - \tilde{V}^{-1}(z_j)}{z_j - \bar{z}_k} R^{-1/2} V(z_j) h_j, R^{-1/2} V(z_k) h_k \right) =$$

$$= \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + z_j \bar{z}_k}{(t - z_j)(t - \bar{z}_k)}\, d(\Sigma_1(t) R^{-1/2} V(z_j) h_j, R^{-1/2} V(z_k) h_k) =$$

$$= \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(1 + t z_j)(1 + t\bar{z}_k)}{(t - z_j)(t - \bar{z}_k)} + 1 \right] \frac{d(\Sigma_1(t) R^{-1/2} V(z_j) h_j, R^{-1/2} V(z_k) h_k)}{1+t^2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\Sigma_1(t) R^{-1/2}\chi_2 F, R^{-1/2}\chi_2 F)}{1+t^2} = -\operatorname{Im}(\tilde{V}(i)^{-1} \Gamma_2 F, \Gamma_2 F)_E =$$

$$= \| \tilde{V}^{-1}(i)\, \Gamma_2 F \|_E^2 \geqslant \| \tilde{V}(i) \|_E^{-2} \| \Gamma_2 F \|_E^2. \tag{36}$$

Неравенства (35), (36) позволяют распространить по непрерывности операторы Γ_1, Γ_2 на $\mathfrak{D}(A_0^*)$. Поэтому тождество

$$(A_0^* F, G)_V - (F, A_0^* G)_V = (\Gamma_1 F, \Gamma_2 G) - (\Gamma_2 F, \Gamma_1 G), \tag{37}$$

вытекающее из (33) для $F, G \in \mathfrak{L}$, справедливо также $\forall F, G \in \mathfrak{D}(A_0^*)$.

Далее, покажем, что отображение $\Gamma: F \to \{\Gamma_2 F, \Gamma_1 F\}$, действующее из $\mathfrak{D}(A_0^*)$ в $E \oplus E$, сюръективно. Пусть $h_1, h_2 \in E$. Полагая $F = F_1 + F_2$, где

$$F_1 = \delta_i(z) g_1 - \delta_{-i}(z) g_1, \quad g_1 = -[2i \operatorname{Im} V(i)]^{-1} R^{1/2} h_2,$$

$$F_2 = \delta_i(z) R^{-1/2} h_1 - [\delta_i(z) - \delta_{-i}(z)]\, g_2, \quad g_2 = [2i \operatorname{Im} V(i)]^{-1} V(i) R^{-1/2} h_1,$$

и учитывая равенства

$$\Gamma_1 F_1 = 0, \quad \Gamma_2 F_1 = -R^{-1/2}(V(i) - V(-i))\, g_1 = h_2,$$

$$\Gamma_1 F_2 = h_1, \quad \Gamma_2 F_2 = -R^{-1/2}(V(i) R^{-1/2} h_1 - (V(i) - V(-i))\, g_2) = 0, \tag{38}$$

получаем $\Gamma_1 F = h_1$, $\Gamma_2 F = h_2$. Таким образом, сюръективность отображения $\Gamma: F \to \{\Gamma_2 F, \Gamma_1 F\}$ доказана. Следовательно, совокупность $\{E, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ с учетом равенства (37) образует ПГЗ. Соответствующая функция Вейля имеет вид $M(z) = -R^{1/2} V^{-1}(z) R^{1/2}$.

Полагая $B = i R^{1/2} J R^{1/2}$, $K = R^{1/2} J$, определяем расширение $\tilde{A} = \tilde{A}_B \in \operatorname{as}(A_0)$ «граничным условием»

$$(\Gamma_1 - B\Gamma_2) F = R^{1/2} \sum (I + iJV(z)) f(z) = 0 \quad (F = f(z) \in \mathfrak{L}). \tag{39}$$

Теперь в силу (14) х. о.-ф. $W_{\tilde{A}}(z)$ расширения (39) имеет вид

$$W_{\tilde{A}}(z) = I + 2iJR^{1/2}(B^* - M(z))^{-1}R^{1/2} = I + 2iJV(z)(I - iJV(z))^{-1} = \\ = (I + iIV(z))(I - iJV(z))^{-1} \quad (40)$$

и совпадает с $W(z)$ в силу формулы (17). Теорема доказана.

Замечание 8. Предложение 9 и теоремы 3, 4 аналогичны соответствующим результатам работы [28], в которых х. о.-ф. определена иначе, с помощью бирасширений [6]. В [28] показано также, что классом Λ_J исчерпываются х. о.-ф. узлов, построенных с помощью бирасширений.

3. Теорема умножения. 1. Пусть $H = H_1 \oplus H_2$, P_j — ортопроектор на H_j $(j = 1, 2)$. Оператор $T \in \mathscr{C}(H)$ называют сцеплением [3] операторов $T_j \in \mathscr{C}(H_j)$ $(j=1, 2)$ и пишут $T = T_1 \vee T_2$, если H_1 инвариантно для T и верны соотношения

$$T_1 = T \restriction_{H_1 \cap \mathfrak{D}(T)}, \quad T_2P_2f = P_2Tf \quad (\forall f \in \mathfrak{D}(T)), \quad \mathfrak{D}(T_2) = P_2\mathfrak{D}(T). \quad (41)$$

Пусть A_j — эрмитов оператор в H_j $(j = 1, 2)$, $T_j \in \operatorname{as}(A_j)$. Пусть также $\{\mathscr{H}_j \Gamma_1^{(j)}, \Gamma_2^{(j)}\}$ — ПГЗ оператора A_j^*, в котором $T_j = \tilde{A}_{B_j}$, где $B_j \in [\mathscr{H}_j]$ $(j = 1, 2)$. Определим ПГЗ $\{\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ оператора $A^* = (A_1 \oplus A_2)^*$, полагая $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, $\Gamma_i = \Gamma_i^{(1)} \oplus \Gamma_i^{(2)}$ $(i = 1, 2)$. Соответствующие функции Вейля связаны равенством $M(z) = M_1(z) \oplus M_2(z)$.

Теорема 5. *Пусть* $T_j = \tilde{A}_{B_j} \in \operatorname{as}(A_j)$, $\varphi_j = (B_j, \mathscr{H}_j; K_j, J, E)$ — *операторные узлы* $(j = 1, 2)$, $\varphi = \varphi_1\varphi_2 = (B, \mathscr{H}; K, J, E)$ — *их произведение* [8], *т. е.*

$$B = B_1P_1' + B_2P_2' + 2iK_1JK_2^*P_2', \quad K = K_1 + K_2. \quad (42)$$

Тогда $\tilde{A}_B \in \operatorname{as}(A)$ — *сцепление операторов* $\tilde{A}_{B_1}$ *и* $\tilde{A}_{B_2}$, $\tilde{A}_B = \tilde{A}_{B_1} \vee \tilde{A}_{B_2}$. *Если, к тому же,* $z \in \rho(\tilde{A}_{B_1}) \cap \rho(\tilde{A}_{B_2})$, *то* $z \in \rho(\tilde{A}_B)$ *и соответствующие х. о.-ф. связаны равенством*

$$W(z) = W_2(z)W_1(z). \quad (43)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_B) \cap H_1$. Тогда из (42) получаем $\Gamma_1 f = B\Gamma_2 f \Rightarrow \Gamma_1^{(1)} f = B_1\Gamma_2^{(1)} f$, т. е. $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_{B_1})$. Если $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_B)$, то из $(\Gamma_1 - B\Gamma_2)f = 0$ получаем с учетом (42) $\Gamma_1^{(2)}P_2f = B_2\Gamma_2^{(2)}P_2f$, т. е. $P_2f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_{B_2})$. Таким образом, второе из равенств (41) получаем из соотношений

$$T_2P_2f = A_2^*P_2f = P_2(A_1^*P_1f + A_2^*P_2f) = P_2A^*f = P_2\tilde{A}_Bf.$$

Далее если $z \in \rho(\tilde{A}_{B_1}) \cap \rho(\tilde{A}_{B_2})$, то в силу предложения 4 $(B_j - M_j(z))^{-1} \in [\mathscr{H}_j]$ и справедливо равенство

$$(B^* - M(z))^{-1} = (B_1^* - M_1(z))^{-1}P_1 + (B_2^* - M_2(z))^{-1}P_2 + \\ + 2i(B_2^* - M_2(z))^{-1}K_2JK_1^*(B_1^* - M_1(z))^{-1}P_1. \quad (44)$$

Из (44) и теоремы 2 получаем равенство (43):

$$W(z) = I + 2iK^*(B^* - M(z))^{-1}KJ = I + 2iK_1^*(B_1^* - M_1(z))^{-1}K_1J + \\ + 2iK_2^*(B_2^* - M_2(z))^{-1}K_2J + (2i)^2K_2^*(B_2^* - M_2(z))^{-1}K_2JK_1^*(B_1^* - M_1(z))^{-1} \times \\ \times K_1J = W_2(z)W_1(z).$$

Теорема доказана.

Замечание 9. В подходе А. В. Штрауса (см. замечание 7) теорема умножения получена лишь для регулярных сцеплений [3]. Заметим, что в условиях теоремы 5 A_B не является, вообще говоря, регулярным сцеплением операторов $\tilde{A}_{B_1}$ и $\tilde{A}_{B_2}$. Можно показать, что если $\ker K_1 = \{0\}$, то условие регулярности сцепления эквивалентно соотношению $\mathfrak{R}(K_1^*) = \mathfrak{R}(K_2^*)$.

2. Пусть $n_\pm(A) < \infty$. Будем относить оператор $S \in [H]$ к предельному множеству $C(M, \infty)$ для функции Вейля $M(z)$ в бесконечности ($S \in C(M, \infty)$), если существует последовательность

$$z_n \in \Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}_+ : |\arg(-iz)| < \pi/2 - \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0),$$

для которой $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} M(z_n) = S\,(\in [\mathcal{H}])$. Множество $C(M, \infty)$ может оказаться пустым даже при $n_\pm(A) = 1$ (например, $M(z) = i\sqrt{z}$). Однако, за счет выбора ПГЗ всегда можно добиться выполнения условия

$$C(M, \infty) \neq \varnothing. \tag{45}$$

Действительно, матрица-функция $T(z) = (M(z) - i)(M(z) + i)^{-1}$ сжимающая. Так как, к тому же, $\dim \mathcal{H} < \infty$, то $\exists\, z_n \in \Omega_\varepsilon$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\exists\, \mathrm{T} := \lim\limits_{n\to\infty} T(z_n)$. Из условия $\dim \mathcal{H} < \infty$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} (T(z_n) - \zeta)^{-1} = (T - \zeta)^{-1}\ \forall \zeta \in \rho(T)$. В частности, при $\zeta \in \rho(T)$ и $|\zeta| = 1$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} (M(z_n) - \lambda)^{-1} = 2i(\lambda + i)^{-2}(T - \zeta)^{-1} - (\lambda + i)^{-1}$, где $\lambda = \bar{\lambda} = i(1 + \zeta)(1 - \zeta)^{-1}$. Полагая $\tilde{\Gamma}_1 = -\Gamma_2 + \lambda\Gamma_1$, $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_1$, видим, что функция Вейля $\tilde{M}(z) = -(M(z) + \lambda)^{-1}$, соответствующая ПГЗ $\{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$, удовлетворяет условию (45).

Известно [29, 30], что максимальное диссипативное отношение θ в $\mathcal{H}$ представимо в виде

$$\theta = \theta_0 \oplus \mathrm{gr}\, B, \tag{46}$$

где θ_0 — самосопряженное отношение в $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, а B — диссипативный оператор в $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0$ такой, что $\ker B_1 = \{0\}$.

Предложение 12. *Пусть A — простой оператор, $\hat{\rho}(A) = \mathbb{C}$, $n_\pm(A) < \infty$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ оператора A^* такое, что $C(M, \infty) \neq \varnothing$ θ и B те же, что и в* (46). *Тогда система собственных и присоединенных векторов* (с. с. п. в.) *оператора $\tilde{A}_\theta$ полна в H, если для некоторого $S \in C(M, \infty)$*

$$\ker P_{\mathcal{H}_1}(B - S) \restriction_{\mathcal{H}_1} = \{0\}. \tag{47}$$

Доказательство. Х. о.-ф. $W(z)$ оператора $\tilde{A}_\theta$ вида (14), рассматриваемая в круге, будучи там внутренней, допускает мультипликативное представление [31, 32]

$$W(z) = W\left(i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = UW^{(p)}(\zeta)\,W^{(s)}(\zeta), \tag{48}$$

в котором

$$W^{(p)}(\zeta) = \overset{\curvearrowright}{\prod_{j=1}^{\infty}}\left(\frac{\zeta_j - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_j\zeta}\,\frac{|\zeta_j|}{\zeta_j}P_j + Q_j\right), \qquad W^{(s)}(\zeta) = \overset{\curvearrowleft}{\int_0^l} \exp k[\zeta, v(t)]\, dE(t).$$

Здесь $k(\zeta, v) = (\zeta + e^{iv})(\zeta - e^{iv})^{-1}$, $v(t)$ — сингулярная неубывающая скалярная функция, $E(t) = E^*(t)$ — неубывающая матрица-функция,

$$\mathrm{sp}\, E(t) = t \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \quad P_j^2 = P_j = P_j^*,\ Q_j = I - P_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\zeta_j|) < \infty.$$

Из условия $\hat{\rho}(A) = C$ и вида (14) функции $W(z)$ следует, что $W(z)$ является мероморфной в C с единственной предельной точкой нулей (и полюсов) в бесконечности. Поэтому факторизация (48) принимает вид

$$W(z) = UW^{(p)}(\zeta)\exp(izE_0), \tag{49}$$

где $E_0 = E(+0) - E(-0) > 0$. Заметим, что при $h \in \Re(E_0)$, $z \in \Omega_\varepsilon$

$$\lim_{|z|\to\infty} \| W^{(s)}(z) h \|^2 = \lim_{|z|\to\infty} (\exp i(z-\bar{z}) E_0 h, h) = 0. \tag{50}$$

Пусть z_n — такая последовательность из Ω_ε, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} M(z_n) = S$. Так как $\operatorname{Im}(B^* - M(z)) < \operatorname{Im} B^* < 0$, то $0 \in \rho(B^* - S)$ и, следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} (B^* - M(z_n))^{-1} = (B^* - S)^{-1}. \tag{51}$$

Теперь из (14), (47) и (51) получаем

$$\lim_{n\to\infty} W(z_n) h = \lim_{n\to\infty} [I + 2iK^*(B^* - M(z_n))^{-1} K] h =$$

$$= \lim_{n\to\infty} K^*(B^* - M(z_n))^{-1}(B - M(z_n)(K^*)^{-1} h =$$

$$= K^*(B^* - S)^{-1}(B - S)(K^*)^{-1} h \neq 0. \tag{51'}$$

Из (50) — (51′) заключаем, что $E_0 = 0$, и в силу (49) с. с. п. в. оператора $\widetilde{A}_0$ полна в H.

При $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ рассмотрим эрмитово расширение A_0 оператора A, заданное условиями

$$\mathfrak{D}(A_0) = \{f \in \mathfrak{D}(A^*): P_{\mathcal{H}_1}\Gamma_1 f = P_{\mathcal{H}_1}\Gamma_2 f = 0, \quad \{P_{\mathcal{H}_0}\Gamma_2 f,\ P_{\mathcal{H}_0}\Gamma_1 f\} \in \theta_0\}.$$

Тогда $\mathfrak{D}(A_0^*) = \{f \in \mathfrak{D}(A^*): \{P_{\mathcal{H}_0}\Gamma_2 f,\ P_{\mathcal{H}_0}\Gamma_1 f\} \in \theta_0\}$. ПГЗ оператора A_0^* и соответствующая функция Вейля принимают вид

$$\{\mathcal{H}_1,\ P_{\mathcal{H}_1}\Gamma_1 P_{\mathcal{H}_1}\Gamma_2\},\ M_1(z) = P_{\mathcal{H}_1} M(z)\restriction_{\mathcal{H}_1}, \quad \mathfrak{D}(\widetilde{A}_\theta) = \ker(P_{\mathcal{H}_1}\Gamma_1 - BP_{\mathcal{H}_1}\Gamma_2)$$

и этот случай сводится к предыдущему.

Предложение 12, доказанное в скалярном случае в [20], дополняет для случая мероморфных матриц-функций теорему Гинзбурга — Фростмана [32, 33].

Замечание 10. Заметим, что если $W(z) = W^{(p)}(\zeta)$, то некасательный предел $\lim\limits_{|z|\to\infty} W(z)$ $(z \in \Omega_\varepsilon)$, а следовательно, и $\lim\limits_{|z|\to\infty} M(z)$, вообще говоря, не существует даже в скалярном случае. Примеры таких функций легко строятся с помощью теоремы Карлесона о свободной интерполяции.

4. Примеры. 1) Пусть A — симметрический оператор, порожденный в $L_2([0, b]; H)$ дифференциальной операцией

$$l[y] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (p_{n-k}(t)\, y^{(k)}(t))^{(k)} + p_n(t)\, y(t) \tag{52}$$

и граничными условиями $y^{[k]}(0) = y^{[k]}(b) = 0$ $(1 \leqslant k < 2n-1)$, где $y^{[k]}(t)$ обозначает квазипроизводную [16]. Здесь $p_k(t) = p_k^*(t)$ принимают значения в $[H]$ $(0 \leqslant t \leqslant b)$, $p_k(t) \in C^{n-k}([0, b]; H)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ и $p_0^{-1}(t) \in [H]$ $\forall t \in [0, b]$.

ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ для A^* найдено Ф. С. Рофе-Бекетовым [34] $\mathcal{H} = H^{2n}$,

$$\Gamma_1 y = \{y^{[2n-1]}(0), \ldots, y^{[n]}(0);\ -y^{[2n-1]}(b), \ldots, -y^{[n]}(b)\},$$

$$\Gamma_2 y = \{y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0);\quad y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)\}. \tag{53}$$

Пусть $V_i(t, \lambda)$ — решения операторного уравнения $l[Y] = \lambda Y$, удовлетворяющие начальным условиям $V_i^{[j-1]}(0, \lambda) = \delta_{ij} I_H$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$. Блочный оператор $V(t, \lambda) = (V_1(t, \lambda), \ldots, V_n(t, \lambda))$ устанавливает [34] изоморфизм между H^{2n} и $\mathfrak{N}_\lambda$. Согласно определению функции Вейля $M(\lambda)\Gamma_2 V(\lambda) = \Gamma_1 V(\lambda)$, где оператор-функции $Y_i(\lambda) = \Gamma_i(V_1(t, \lambda), \ldots, V_n(t, \lambda)) = \Gamma_i V(t, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ суть изоморфизмы в $\mathcal{H}$ $(\lambda \neq \bar{\lambda})$. Следовательно,

$$M(\lambda) = Y_1(\lambda)(Y_2(\lambda))^{-1}. \tag{54}$$

Пусть $\widetilde{A} = \widetilde{A}_B \in \mathrm{as}(A)$, $\mathfrak{D}(\widetilde{A}_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$, $B \in [\mathcal{H}]$. Тогда х. о.-ф. $W_{\widetilde{A}}(\lambda)$ имеет вид (14), в котором $M(\lambda)$ определена равенством (54). Если, к тому же, $\dim \mathcal{H} < \infty$, то в силу (15) и (54)

$$W_{\widetilde{A}}(\lambda) = [BY_2(\lambda) - Y_1(\lambda)]\,[B^* Y_2(\lambda) - Y_1(\lambda)]^{-1}. \tag{55}$$

Введем операторы $\Phi(\lambda) = (\Gamma_1 - B\Gamma_2)\restriction_{\mathfrak{N}_\lambda}$, $\Phi_*(\lambda) = (\Gamma_1 - B^*\Gamma_2)\restriction_{\mathfrak{N}_\lambda}$; $\Phi(\lambda)$, $\Phi_*(\lambda) \in [\mathfrak{N}_\lambda, \mathcal{H}]$. Так как $\forall \lambda \in \rho(\widetilde{A}_B^*)$ оператор $\Phi_*(\lambda)$ — изоморфизм из $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathcal{H}$, то выражение (55) для $W_{\widetilde{A}}(\lambda)$ принимает вид

$$W_{\widetilde{A}}(\lambda) = [\Phi(\lambda) V]\,[\Phi_*(\lambda) V]^{-1}. \tag{56}$$

Для оператора $-y''$ из формулы (54) имеем

$$M_1(\lambda) = -M^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} & \dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix},$$

откуда получаем $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} M_1(\lambda) = M_1(\infty) = 0$.

Пользуясь операторами преобразования, легко показать, что решения $V_i(t, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ уравнения $l[y] = -y'' + q(t)y = \lambda y$ удовлетворяют соотношениям

$$V_1(t, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}t\,[1 + O(1/\sqrt{\lambda})],\ V_2(t, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\,[1 + O(1/\sqrt{\lambda})],$$

из которых для соответствующей функции Вейля получаем равенство $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} M^{-1}(\lambda) = \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} Y_2(\lambda) Y_1^{-1}(\lambda) = 0$. В силу предложения 12 с. с. п. в. произвольного диссипативного расширения $\widetilde{A}_0$ оператора A полна в $L_2[0, b]$.

Аналогично для оператора A вида (52), $\dim H < \infty$, с учетом асимптотики решений $V(t, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ уравнения $l[y] = \lambda y$ [16], устанавливается полнота с. с. п. в. диссипативных расширений $\widetilde{A}_0$ оператора A. Этот пример носит иллюстративный характер, ибо указанная полнота — следствие известной теоремы В. Б. Лидского [35, 36] и ядерности резольвенты $(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}$.

Расширение $\widetilde{A}$, задаваемое условиями $y^{[i-1]}(0) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$, не дизъюнктно с $\widetilde{A}_2$ $(\mathfrak{D}(\widetilde{A}_2) = \ker \Gamma_2)$. Поэтому для вычисления его х. о.-ф. $W_{\widetilde{A}}(\lambda)$ введем новое ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1', \Gamma_2'\}$, $\mathcal{H} = H^{2n}$,

$$\Gamma_1' y = \frac{1}{2}\{y^{[j-1]}(0) + y^{[j-1]}(b)\}_{j=1}^{2n},$$

$$\Gamma_2' y = \{(-1)^{\left[\frac{j-1}{n}\right]}(y^{[2n-j]}(b) - y^{[2n-j]}(0))\}_{j=1}^{2n}.$$

Легко видеть, что теперь $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}(\tilde{A}_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$, где $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix}$, $J_n = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j=1}^n$. Отсюда видим, что

$$\Phi(\lambda) V = (\Gamma_1 - B\Gamma_2) V = (V^{[j-1]}(0, \lambda))_{j=1}^n,$$

$$\Phi_*(\lambda) V = (\Gamma_1 - B^*\Gamma_2) V = (V^{[j-1]}(b, \lambda))_{j=1}^n.$$

Если $V_i(t, \lambda)$ — решения операторного уравнения $l[Y] = \lambda Y$, удовлетворяющие условиям $V_i^{[j-1]}(t, \lambda) = \delta_{ij} I_H$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 2n)$, то $\Phi_*(\lambda) V = I_{\mathscr{H}}$, и в силу (56) х. о.-ф. совпадает (ср. с [2]) с вронскианом

$$W_{\tilde{A}}(\lambda) = \Phi(\lambda) V = (V_i^{[j-1]}(0, \lambda))_{i,j=1}^{2n}. \tag{57}$$

2) Пусть A — симметрический оператор, порожденный в $L_2(0, \infty)$ дифференциальной операцией (52) и условиями $y^{[j-1]}(0) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant 2n)$, причем $n_\pm(A) = n$. Построим ПГЗ $\{\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, положив

$$\mathscr{H} = \mathbb{C}^n, \quad \Gamma_1 y = \{y^{[n]}(0), \ldots, y^{[2n-1]}(0)\}, \quad \Gamma_2 y = \{y^{(n-1)}(0), \ldots, y(0)\}, \tag{58}$$

и покажем, что отвечающая ему функция Вейля $M(\lambda)$ совпадает с характеристической матрицей оператора $\tilde{A}_2$ [16, с. 278], соответствующей системе индексов $q_1 = 1$, $q_2 = 2, \ldots, q_n = n$. Действительно, ядро резольвенты оператора $\tilde{A}_2$ имеет вид [16, с. 275]

$$G(t, \tau, \lambda) = \sum_{k=1}^n u_k(t, \lambda) \overline{v_k(\tau, \lambda)} \qquad (t \leqslant \tau),$$

где $u_k(t, \lambda)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — решения уравнения $l[u] = \lambda u$, удовлетворяющие условиям $u_k^{[j-1]}(0, \lambda) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $u^{[n+j-1]}(0, \lambda) = \delta_{kj}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, а $v_k(\tau, \lambda) \in L_2(0, \infty)$.

Воспользуемся формулами скачков квазипроизводных $G_{ij}(t, \tau, \lambda)$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n-1)$ функций Грина [16, с. 260]

$$G_{ij}(t-0, t, \lambda) - G_{ij}(t+0, t, \lambda) = \sum_{k=1}^n \{u_k^{[i]}(t, \lambda) v_k^{[j]}(t, \lambda) - $$

$$- v_k^{[i]}(t, \lambda) u_k^{[j]}(t, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i + j \neq 2n-1; \\ 1 & \text{при} \quad i + j = 2n-1, \ j < i; \\ -1 & \text{при} \quad l + j = 2n-1, \ j > i. \end{cases} \tag{59}$$

В [16, с. 260] имеется неточность; в правой части равенства (59) при $i + j = 2n - 1$ записано $(-1)^{n-1}$. Из (59) вытекают равенства $v_k^{(n-i)}(0, \lambda) = \delta_{ki}$ $(1 \leqslant k, i \leqslant n)$, означающие в силу (57), что $\Gamma_2 v = \Gamma_2(v_1(t, \lambda), \ldots, v_n(t, \lambda)) = I_n$ (здесь I_n — единичная матрица в $\mathbb{C}^n$).

Теперь ясно, что

$$M(\lambda) = \Gamma_1 V(t, \lambda) = (v_k^{[n+j-1]}(0, \lambda))_{j,k=1}^n = (G_{n+k-1, n+j-1}(0, 0, \lambda))_{j,k=1}^n,$$

и требуемое совпадение доказано.

Пусть расширение $\tilde{A} \in \mathrm{as}(A)$ задается условиями

$$\Phi_j(y) = \sum_{k=1}^{2n} \varphi_{jk} y^{[k-1]}(0) = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{60}$$

а расширение $\tilde{A}^*$ — условиями

$$\Phi_{*j} y = \sum_{k=1}^{2n} \varphi_{*jk} y^{[k-1]}(0) = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{61}$$

Так как $\widetilde{A} \in \operatorname{as}(A)$, то для некоторого ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ $\exists B \in [\mathcal{H}]$ такой, что $\mathfrak{D}(\widetilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$, а условия (60), (61) приобретают вид $\Phi y = C_1(\Gamma_1 - B\Gamma_2) y = 0$, $\Phi_* y = C_2(\Gamma_1 - B^*\Gamma_2) y = 0$, где C_1, C_2 — обратимые матрицы из $[\mathcal{H}]$. Вводя матрицы $\Phi(\lambda) V = (\Phi_j v_k(t, \lambda))_{j,k=1}^n$, $\Phi_*(\lambda) V = (\Phi_{*j} v_k(t, \lambda))_{j,k=1}^n$, получим с учетом (15) следующее выражение для х. о.-ф. $W(\lambda)$ оператора $\widetilde{A}_B$:

$$W(\lambda) = [(\Gamma_1 - B\Gamma_2) V]\, [(\Gamma_1 - B^*\Gamma_2) V]^{-1} = C_1^{-1} [\Phi(\lambda) V]\, [\Phi_*(\lambda) V]^{-1} C_2.$$

Замечание. В «естественном» ПГЗ вида (58) матрицы C_1 и C_2 имеют вид $C_1 = (\varphi_{j,n+k})_{j,k=1}^n$, $C_2 = (\varphi_{*j,n+k})_{j,k=1}^n$. Все выводы этого пункта справедливы без изменений для дифференциальной операции вида (52) в $L_2((0, \infty); H)$, если только $n_\pm(A) = n \dim H < \infty$.

Отметим, что вычислению х. о.-ф. дифференциальных операторов в скалярном случае ($\dim H = 1$) посвящены работы [5, 38].

3. Пусть A — минимальный оператор, порожденный в $L_2([0, 1]; H)$ системой Дирака

$$l[y] = J\frac{dy}{dt} - Q(t) y, \qquad (J = -J^* = -J^{-1}) \tag{62}$$

и граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$. Легко видеть, что решение задачи Коши

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{2}(JQ(t) + Q(t) J) U(t), \quad U(1) = I_H \tag{63}$$

определяет унитарную группу $U(t)$ в H, коммутирующую с J $(JU(t) = U(t) J)$. Поэтому после замены $y(t, \lambda) = U(t) z(t, \lambda)$ получаем уравнение

$$l[z] = J\frac{dz}{dt} - \Omega(t) z(t, \lambda) = \lambda z(t, \lambda), \tag{64}$$

в котором $\Omega(t) = u^*(t) JU'(t) + U^*(t) Q(t) U(t)$, и $J\Omega(t) + \Omega(t) J = 0$. В силу последнего условия решение задачи Коши для уравнения (63) с начальным условием $z(0, \lambda) = h$ представляется [38, 39] в виде

$$z(t, \lambda) = \left[\exp(-\lambda J t) + \int_{-t}^{t} k(t, s) \exp(-\lambda J s)\, ds\right] h. \tag{65}$$

Введем ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ оператора A^*, полагая

$$\mathcal{H} = H, \quad \Gamma_1 y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y(0) + y(1)), \quad \Gamma_2 y = \frac{1}{\sqrt{2}} J(y(0) - y(1)). \tag{66}$$

Пусть $Y(t, \lambda)$ — решение операторного уравнения $l[Y] = \lambda Y$ с начальным условием $Y(0, \lambda) = I_H$. Тогда функция Вейля $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda) = [I + Y(1, \lambda)]\, [Y(1, \lambda) - I]^{-1} J. \tag{67}$$

В силу (63), (65) при $\lambda \to \infty$

$$Y(1, \lambda) = \exp(-\lambda J) + \int_{-1}^{1} k(1, s) \exp(-\lambda J s)\, ds = \exp(-\lambda J)\, [1 + o(1)]. \tag{68}$$

Из (67) и (68) с учетом спектрального разложения $J = iP_1 - iP_2$ получаем следующее выражение для функции Вейля:

$$M(\lambda) = i(1 + e^{i\lambda})(1 - e^{i\lambda})^{-1} + o(1), \tag{69}$$

в котором член $o(1)$ отсутствует при $Q(t) = \Omega(t) \equiv 0$. Отсюда, в частности, вытекает (при $Q(t) = 0$) унитарная эквивалентность операторов, соответствующих периодической (косопериодической) задаче при различных $J = -J^* = -J^{-1}$.

В силу теоремы 2 х. о.-ф. оператора $\tilde{A}_B \in \mathrm{as}(A)$ определяется формулой (14), в которой $M(\lambda)$ определена равенством (69). В частности, х. о.-ф. расширения $\tilde{A}_{-J}$, определяемого условием $y(1) = 0$ ($\mathcal{D}(\tilde{A}_{-J}) = \ker(\Gamma_1 + J\Gamma_2)$), имеет вид

$$W(\lambda) = I + 2iK^*(B^* - M(\lambda))^{-1} KJ =$$
$$= I_H + 2iI_H(J - M(\lambda))^{-1} I_H(iJ) = Y(1, \lambda),$$

т. е. совпадает со значением матрицанта в точке 1 [18].

Пусть теперь $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2n}$. Граничное условие

$$C_1 y(0) + C_2 y(1) = 0 \tag{70}$$

определяет максимальное диссипативное (самосопряженное) расширение $\tilde{A}$ оператора A, если и только если

$$-i(C_1JC_1^* - C_2JC_2^*) \geqslant 0 \qquad (C_1JC_1^* - C_2JC_2^* = 0)$$

и $\operatorname{rank}(C_1, C_2) = 2n$ (здесь $J = iP_1 - iP_2$).

Предложение 15. *Система корневых векторов максимального диссипативного расширения $\tilde{A} \supset A$, определяемого условием* (70), *полна в* $L_2([0, 1]; \mathbb{C}^{2n})$, *если и только если*

$$\det(C_1P_2 + C_2P_1) \neq 0 \quad (P_1 = (I - iJ)/2, \quad P_2 = (I + iJ)/2). \tag{71}$$

Доказательство. Пусть в ПГЗ (66) $\tilde{A} = \tilde{A}_\theta$ (θ — отношение в $\mathcal{H}$). Заметим, что в силу (69) $\lim\limits_{y\uparrow\infty} M(iy) = iI_{\mathcal{H}}$, а условие (71) эквивалентно условию $\{h, ih\} \notin \theta \ \ \forall h \in \mathcal{H}$ (т. е. условию (47)). Поэтому достаточность вытекает из простоты оператора A [18] и предложения 12.

В случае $J = iI$ и $Q(t) \equiv 0$ предложение 15 доказано Ю. П. Гинзбургом [32].

Замечание 11. Пусть $C_1JC_1^* = C_2JC_2^*$, т. е. расширение $\tilde{A}$, определяемое условием (70), самосопряженное. Если C_1 и C_2 обратимы, то функция Вейля $M(\lambda)$, соответствующая ПГЗ

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2n}, \quad \Gamma_1 y = \frac{1}{2}(y(0) - C_1^{-1}C_2 y(1)), \quad \Gamma_2 y = J(y(0) + C_1^{-1}C_2 y(1)),$$

определяется равенством

$$M(\lambda) = \frac{1}{2}(M + Y(1, \lambda)^{-1} N)(M - Y(1, \lambda)^{-1} N)^{-1} J,$$

в котором $M = JC_1^*$, $N = -JC_2^*$, т. е. совпадает (с точностью до знака) с характеристической функцией в смысле [17, с. 308]. Заметим, что если $k(x, t; \lambda)$ — функция Грина задачи (70) для уравнения $l[y] = \lambda y$ (64), то $k(0, 0, \lambda) = -M(\lambda)$.

4. Пусть потенциал $q(x) = \overline{q(x)}$ таков, что минимальный оператор A, порожденный в $L_2(0, \infty)$ дифференциальной операцией $l[y] = -y'' + q(x)y$, имеет индексы $n_\pm(A) = 2$. Пусть $y_i(x, \lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda$ — решения уравнения $l[y] = \lambda y$, $y_i^{(j-1)}(0, \lambda) = \delta_{ij}$, $v_i(x) = y_i(x, 0)$ $(i, j = 1, 2)$. Следуя [40] (см. также [20]), определяем ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ оператора A^*, полагая $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$:

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} w[f, v_2]_0 \\ w[f, v_1]_\infty \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 f = \begin{pmatrix} w[f, v_1]_0 \\ w[f, v_2]_\infty \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Здесь $w[f, v]_x = f(x)v'(x) - f'(x)v(x)$ — вронскиан. Из формулы Грина вытекает, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} w[f, v]_x = w[f, v]_\infty$. Легко видеть, что функция Вейля $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{w[y_2,v_2]_\infty}{w[y_1,v_2]_\infty} & -\dfrac{1}{w[y_1,v_2]_\infty} \\ -\dfrac{1}{w[y_1,v_2]_\infty} & \dfrac{w[y_1,v_1]_\infty}{w[y_1,v_2]_\infty}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} m_{0,\infty}(\lambda) & -\dfrac{1}{w[y_1,v_2]_\infty} \\ -\dfrac{1}{w[y_1,v_2]_\infty} & m_{0\infty}(\lambda)\varkappa(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{73}$$

где $m_{0\infty}(\lambda)$ — функция Вейля — Титчмарша оператора $A_{0\infty}=A_{0\infty}^*$, определяемого условиями $y'(0)=0$, $w[y,v_2]_\infty=0$; $\varkappa(\lambda)=w[y_1,v_1]_\infty/w[y_2,v_2]_\infty$. Заметим, что $m_{0\infty}(\lambda)\varkappa(\lambda)$ совпадает с функцией Вейля $M'(\lambda)$ оператора $A'\subset A^*$ $(n_\pm(A')=1)$, где

$$\mathfrak{D}(A')=\{f\in\mathfrak{D}(A^*):f'(0)=0,\ w[f,v_1]_\infty=w[f,v_2]_\infty=0\},$$

соответствующей ПГЗ $\{\mathcal{H}_0',\Gamma_1',\Gamma_2'\}$:

$$\mathcal{H}'=\mathbb{C},\quad \Gamma_1'f=w[f,v_1]_\infty,\quad \Gamma_2'f=w[f,v_2]_\infty. \tag{74}$$

В силу теоремы 2 х. о. -ф. расширения $\widetilde{A}_B$ представима в виде (15), где $M(\lambda)$ определена формулой (73), а х. о. -ф. оператора $\widetilde{A}_h'$ $(\mathfrak{D}(\widetilde{A}_h')=\ker(\Gamma_1'-h\Gamma_2')$ (см. (74)) в виде

$$W_{0h}(\lambda)=(m_{0\infty}(\lambda)\varkappa(\lambda)-h)/(m_{0\infty}(\lambda)\varkappa(\lambda)-\bar{h}). \tag{75}$$

Формула (75) получена из других соображений в [20].

Рассмотрим в качестве примера оператор A с $q(x)=-e^{2x}$. ПГЗ оператора A^* определяется формулой (72), в которой $v_1(x)=\sqrt{\pi/2}J_0(e^x)$, $v_2(x)=\sqrt{\pi/2}Y_0(e^x)$ ($J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода), ибо известно, что $w[v_1,v_2]_x=1$. Соответствующая функция Вейля (ср. с (73)) имеет вид

$$M(\lambda)=\frac{1}{d(\lambda)}\begin{pmatrix} w[J_\nu-J_{-\nu},Y_0]_1 & -\dfrac{4}{\pi}\sin\dfrac{\pi\nu}{2} \\ -\dfrac{4}{\pi}\sin\dfrac{\pi\nu}{2} & W[J_\nu+J_{-\nu},J_0]_1\operatorname{tg}\dfrac{\pi\nu}{2}\end{pmatrix}, \tag{76}$$

где $d(\lambda)=w[J_\nu-J_{-\nu},J_0]_1$, $\lambda=-\nu^2$.

Несложно указать асимптотику собственных значений оператора $\widetilde{A}_B$ $(\mathfrak{D}(\widetilde{A}_B)=\ker(\Gamma_1-B\Gamma_2))$ (ср. с [20]), из которой вытекает ядерность резольвенты $(\widetilde{A}_B-\lambda)^{-1}$. Из теоремы В. Б. Лидского [35, 36] получаем полноту в $L_2(0,\infty)$ с. с. п. в. оператора $\widetilde{A}_B$, если $\operatorname{Im}B\geqslant 0$. Заметим, что предложение 12 с учетом вытекающего из (76) равенства $M(i\infty):=$ $:=\lim\limits_{y\uparrow\infty}M(iy)=\begin{pmatrix}J_0(1)/Y_0(1) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ обеспечивает полноту лишь при $\det(B-M(i\infty))\neq 0$, оставляя вопрос открытым в остальных случаях. При этом х. о. -ф. $W_{0h}(\lambda)$ оператора A_h' (см. (75)) является произведением Бляшке, для которого существует угловой предел $W_{0h}(i\infty)=\dfrac{i-h}{i-\bar{h}}$.

В частности, $W_{0i}(i\infty)=0$ при $h=i$, хотя оператор $\widetilde{A}_i$ обладает полнотой и в этом случае (ср. с [20]).

5. Пусть $A \subset A^*$ — симметрический оператор в $H = l_2((0, \infty); \mathcal{H})$, соответствующий блочной якобиевой матрице, ассоциированной с неопределенным случаем операторной проблемы моментов Гамбургера [27]

$$(A^*y)_n = a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{77}$$

$a_n, \ b_n \in [\mathcal{H}], \ a_n = a_n^*, \ b_n > 0, \ a_{-1} = 0, \ a_0^{-1} \in [\mathcal{H}]$. Пусть $\mathcal{P}_k(\lambda)$, $\mathcal{Q}_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — ортогональные полиномы I-го и II-го рода; $\mathcal{P}(\lambda) = \{\mathcal{P}_k(\lambda)\}_0^\infty$, $\mathcal{Q}(\lambda) = \{\mathcal{Q}_k(\lambda)\}_0^\infty$ [27]. Определим, следуя работе [12], ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, полагая

$$\Gamma_1 y = \mathcal{Q}^*(0) A^* y - P_0 y, \quad \Gamma_2 y = \mathcal{P}^*(0) A^* y \qquad (y \in \mathfrak{D}(A^*)), \tag{78}$$

где P_0 — ортопроектор в $H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i \ (\mathcal{H}_i = \mathcal{H} \ \forall i \in \mathbb{Z}_+)$ на $\mathcal{H}_0$.

Из формулы Грина следует, что $\forall \ y, \ z \in \mathfrak{D}(A^*)$ существует $[y, z]_\infty := \lim_{n\to\infty} [y, z]_n = (y, A^*z) - (A^*y, z)$, где $[y, z]_n = (a_n y_n, z_{n+1}) - (a_n y_{n+1}, z_n)$,

$$(\Gamma_1 y, h) = -[y, \mathcal{Q}(0) h]_\infty, \quad (\Gamma_2 y, h) = -[y, \mathcal{P}(0) h]_\infty \qquad (\forall h \in \mathcal{H}). \tag{79}$$

В скалярном случае ($\dim \mathcal{H} = 1$) в виде (79) ПГЗ оператора введено позже в [21]. Легко видеть, что

$$\Gamma_1 \mathcal{P}(\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{Q}_k^*(0) \mathcal{P}_k(\lambda) - I_{\mathcal{H}} = B(\lambda),$$

$$\Gamma_2 \mathcal{P}(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k^*(0) \mathcal{P}_k(\lambda) = D(\lambda).$$

Поэтому функция Вейля $M(\lambda)$, соответствующая ПГЗ (78), имеет вид $M(\lambda) = B(\lambda) D^{-1}(\lambda)$. Х. о. -ф. $W(\lambda)$ оператора $\widetilde{A}_B \in \mathrm{as}(A)$, $(\mathfrak{D}(\widetilde{A}_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2))$ вычисляется по формуле (15). В частности, при $\dim \mathcal{H} = 1$ и $B = h$ имеем $W_h(\lambda) = [B(\lambda) - hD(\lambda)]\,[B(\lambda) - \bar{h}D(\lambda)]^{-1}$. В таком виде $W_h(\lambda)$ из других соображений вычислена в [21].

6. Рассмотрим в $L_2([0, b]; H)$ минимальный оператор L_0, порожденный дифференциальной операцией

$$l[y] = -y''(t) + Ay + q(t)\, y(t) \qquad (A = A^* \geqslant I).$$

М. Л. Горбачук [41] (см. также [23, 42]) показал, что $\forall y \in \mathfrak{D}(L_0^*)$ граничные значения $y(0)$, $y(b)$ существуют в пространстве $H_{-1/4}$ $(\| f \|_{H_{-1/4}} = \| A^{-1/4} f \|)$ и указал следующее ПГЗ оператора L_0^*:

$$\mathcal{H} = H \oplus H, \quad \Gamma_1 y = \{-A^{-1/4} y(0), \ A^{-1/4} y(b)\}, \tag{80}$$
$$\Gamma_2 y = \{A^{1/4}[y'(0) + A^{1/2} y(0)], \quad A^{1/4}[y'(b) - A^{1/2} y(b)]\}.$$

В случае $q(t) \equiv -I$ для $y(t) \in \mathfrak{N}_\lambda$ справедливо представление [41]

$$y(t, \lambda) = A^{1/4} \exp(-t\sqrt{A - \lambda - I})\, f_1 +$$
$$+ \frac{\operatorname{sh} t\sqrt{A - \lambda - I}}{\sqrt{A - \lambda - I}} A^{3/4} \exp(-bA^{1/2})\, f_2,$$

а соответствующая функция Вейля $M(\lambda)$ имеет вид [11, 43, 44]

$$M(\lambda) = \hat{A}^{-1/4} (N(\lambda) - \hat{A}^{1/2})^{-1} \hat{A}^{-1/4}, \tag{81}$$

где

$$N(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{A - I - \lambda}}{\operatorname{th} \pi\sqrt{A - I - \lambda}} & \dfrac{\sqrt{A - I - \lambda}}{\operatorname{sh} \pi\sqrt{A - I - \lambda}} \\ \dfrac{\sqrt{A - I - \lambda}}{\operatorname{sh} \pi\sqrt{A - I - \lambda}} & \dfrac{\sqrt{A - I - \lambda}}{\operatorname{th} \pi\sqrt{A - I - \lambda}} \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Рассмотрим расширение $\widetilde{L} \in \mathrm{as}(L_0)$, определяемое граничным условием

$$Y' = SY, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'(0) \\ y'(b) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y(0) \\ -y(b) \end{pmatrix}, \quad S \in \mathscr{C}(\mathscr{H}), \quad S_I \in [\mathscr{H}],$$

$$(\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(S^*) \supset \mathfrak{D}(\hat{A}^{1/2})), \quad 0 \notin \sigma_p(\hat{A}^{1/2} + S),$$

$$\hat{A}^{-1/4}(\hat{A}^{1/2} + S)^{-1} \ \hat{A}^{-1/4} \in [\mathscr{H}]. \tag{83}$$

В ПГЗ (80) расширение $\widetilde{L}$ определяется равенствами

$$\mathfrak{D}(\widetilde{L}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2), \quad B = -\hat{A}^{-1/4}(\hat{A}^{1/2} + S)^{-1}\hat{A}^{-1/4}. \tag{84}$$

Легко видеть, что $B_I = KJK^*$, где

$$K = \hat{A}^{-1/4}(\hat{A}^{1/2} + S)^{-1} |S_I|^{1/2}, \qquad J = \operatorname{sign} S_I. \tag{85}$$

Теперь из формул (14), (81) — (85) получаем следующее выражение для х. о. -ф. $W(\lambda)$ расширения $\widetilde{L}_B$:

$$W(\lambda) = I + 2iK^*(B^* - M(\lambda))^{-1} KJ = I + 2i |S_I|^{1/2} (S^* + N(\lambda))^{-1} \times$$

$$\times (\hat{A}^{1/2} - N(\lambda))(\hat{A}^{1/2} + S)^{-1} |S_I|^{1/2} J = W_0(\lambda) U. \tag{86}$$

Здесь

$$W_0(\lambda) = I + 2i |S_I|^{1/2} (S^* + N(\lambda))^{-1} |S_I|^{1/2} J, \tag{87}$$

$$U = I - 2i |S_I|^{1/2} (S + \hat{A}^{1/2})^{-1} |S_I|^{1/2} J.$$

Заметим, что J-унитарный оператор U не удовлетворяет условиям теоремы 3, т. е. $W_0(\lambda) \notin \Lambda_J$, хотя $\widetilde{L}_B \in \mathrm{as}(L_0)$.

Оператор $\widetilde{L}$, порожденный условием (83) при $q(t) = -I$ и

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + I \qquad (\mathfrak{D}(A) = \{f \in W_2^2[0, b] : f(0) = f(b) = 0\})$$

соответствует следующей краевой задаче для оператора Лапласа:

$$\widetilde{L}y = -\Delta y = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y, \quad Y' = SY \qquad (S \in \mathscr{C}(\mathscr{H})),$$

$$y(t, 0) = y(t, b) = 0. \tag{88}$$

Среди задач вида (88) при $S = \begin{pmatrix} \sigma_1(x) & 0 \\ 0 & \sigma_2(x) \end{pmatrix}$ содержится третья краевая задача:

$$\left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \sigma_1(x)\, y(x, t)\right]\Bigg|_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \sigma_2(x)\, y(x, t)\right]\Bigg|_{t=\pi} = 0.$$

Если S удовлетворяет условиям (83), то $\widetilde{L} = \widetilde{L}_B \in \mathrm{as}(L_0)$ (см. (84)). Поэтому х. о. -ф. $W(\lambda)$ оператора $\widetilde{L}$ имеет вид (86), (87). Из (82) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ вытекает неравенство

$$|\operatorname{Im}((S^*f, f) + (N(\lambda) f, f))| \geqslant |\operatorname{Im}(N(\lambda) f, f)| \geqslant C\sqrt{\operatorname{Im}\lambda}\, \|f\|^2. \tag{89}$$

Пусть $S_I \geqslant 0$, тогда $B_I \geqslant 0$ и оператор $\widetilde{L} = \widetilde{L}_B$ вида (84) максимально диссипативный. Из (87), (89) получаем при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ оценку $\| W_0(\lambda) -$

$- I\| \leqslant C_1/\mathrm{Im}\,\lambda$, из которой вытекает равенство

$$\lim_{y\uparrow\infty} W(iy) = \lim_{y\uparrow\infty} W_0(iy)U = U = I - 2i\,|S_I|^{1/2}(S^* + \hat{A}^{1/2})^{-1}|S_I|^{1/2}. \quad (90)$$

Если, к тому же, B_I — ядерный ($B_I \in \mathfrak{S}_1$), то из (90) аналогично доказательству предложения 12 получаем полноту с. с. п. в. оператора $\widetilde{L} = \widetilde{L}_B$.

Отметим, что теоремы В. Б. Лидского — М. В. Келдыша [35, 36] о полноте с. с. п. в. оператора $T \in \mathfrak{S}_p$ с числовым образом в угле $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/p$ ($p \geqslant 1$), здесь, вообще говоря, неприменимы. Например, если $S = -2\hat{A}^{1/2} + iS_I$, то $-\hat{B}^{-1} = -\hat{A} + i\hat{A}^{1/4}S_I\hat{A}^{1/4}$, а так как $\min\{\varphi : 0 \leqslant \arg(-B^{-1}h, h) \leqslant \varphi \quad \forall h \in \mathfrak{D}(B^{-1})\} = \pi$, то числовой образ оператора $\widetilde{L} = \widetilde{L}_B$ заполняет $\mathbb{C}_+$. В то же время $(\widetilde{L}_B - \lambda)^{-1} \notin \mathfrak{S}_1$, если $B \in \mathfrak{S}_1$.

7. Рассмотрим минимальный оператор L_0, порожденный в $L_2((0, \infty); H)$ дифференциальной операцией

$$l[y] = -y''(t) + (A - I)\,y(t) \qquad (A = A^* \geqslant I,\ t \in [0, \infty)).$$

ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ оператора L_0^* имеет [23, 41, 42] вид

$$\mathcal{H} = H, \quad \Gamma_1 y = -A^{-1/4}y(0), \quad \Gamma_2 y = A^{1/4}(y'(0) + A^{1/2}y(0)). \quad (91)$$

Так как $\mathfrak{N}_\lambda$ состоит из вектор-функций $\exp(-t\sqrt{A - I - \lambda})\,A^{1/4}f$ ($f \in H$) [40], то соответствующая функция Вейля имеет [43, 44] вид

$$M(\lambda) = -A^{-1/2}\,[A^{1/2} - (A - I - \lambda)^{1/2}]^{-1}.$$

Расширение $\widetilde{L}$, соответствующее граничному условию $y'(0) = Sy(0)$, $S \in \mathcal{E}(H)$, $\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(S^*) \supset \mathfrak{D}(A^{1/2})$, определяется в ПГЗ (91) соотношением

$$\mathfrak{D}(\widetilde{L}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2), \quad B = -A^{-1/4}(S + A^{1/2})^{-1}A^{-1/4}.$$

Определяя K и J равенствами (85), получаем аналогично (86), что х. о.-ф. $W(\lambda)$ имеет вид $W(\lambda) = W_0(\lambda)U$, где

$$W_0(\lambda) = I + 2i\,|S_I|^{1/2}[S^* + (A - I - \lambda)^{1/2}]^{-1}|S_I|^{1/2}J,$$

$$U = I - 2i\,|S_I|^{1/2}(S + A^{1/2})^{-1}|S_I|^{1/2}J,$$

причем J-унитарный оператор U не удовлетворяет условиям теоремы 3, т. е. $W_0(\lambda) \notin \Lambda_J$, хотя $\widetilde{L} \in \mathrm{as}(L_0)$.

1. *Лившиц М. С.* Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сб.— 1946.— 19 (61), № 2.— С. 239—260.
2. *Штраус А. В.* Характеристические функции линейных операторов // Изв. АН СССР.— 1960.— **24**.— С. 43—74.
3. *Штраус А. В.* О теореме умножения характеристических функций линейных операторов // Докл. АН СССР.— 1959.— **126**, № 4.— С. 723—726.
4. *Кужель А. В.* О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду // Там же.— 1958.— **119**, № 5.— С. 868—887.
5. *Кужель А. В.* О спектре регулярного квазидифференциального оператора // Там же.— 1964.— **156**, № 4.— С. 731—733.
6. *Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л.* Теория бирасширений операторов в оснащенных гильбертовых пространствах // Успехи мат. наук.— 1977.— 32, № 5.— С. 69—124.
7. *Бродский М. С., Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов // Успехи мат. наук.— 1958.— **13**, № 1.— С. 3—85.
8. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов.— М. : Наука, 1969.— 287 с.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 10.— С. 1299—1313.
10. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* О характеристических функциях расширений эрмитова оператора.— Киев, 1984.— 45 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1692.
11. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с харак-

теристической функцией.— Донецк, 1985.— 51 с.— (Препринт / АН УССР. ДонФТИ; 85-9).
12. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР.— 1987.— **293**, № 5.— С. 1041—1046.
13. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Об одном классе расширений эрмитова оператора и функции Вейля // Изв. вузов.— 1989.— № 5.— С. 71—75.
14. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1965.— 543 с.
15. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов // Труды 7-й Зимней Школы по математическому программированию.— М. : ЦЭМИ АН СССР, Наука, 1976.— С. 3—69.
16. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 526 с.
17. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи.— М. : Мир, 1968.— 749 с.
18. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
19. *Соломяк Б. М.* О функциональной модели для диссипативных операторов // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— **178**.— С. 57—90.
20. *Аллахвердиев Б. П.* К теории дилатации и спектральному анализу диссипативных операторов Шредингера в случае предельного круга Вейля // Изв. АН СССР.— 1990.— **54**, № 2.— С. 242—257.
21. *Аллахвердиев Б. П., Гусейнов Г. Ш.* К спектральной теории диссипативных разностных операторов // Мат. сб.— 1989.— **180**, № 1.— С. 101—118.
22. *Штраус А. В.* О самосопряженных операторах в ортогональной сумме гильбертовых пространств // Докл. АН СССР.— 1962.— **144**, № 5.— С. 512—515.
23. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1984.— 284 с.
24. *Кочубей А. Н.* О характеристических функциях симметрических операторов // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1980.— № 3.— С. 218—232.
25. *Krein M. G., Langer H.* Über die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators im Raume // Acta Math. Szeged.— 1973.— **34**.— P. 191—230.
26. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**.— С. 186—207.
27. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.
28. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* Регулярные бирасширения неограниченных операторов.— М., 1979.— 73 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2876—79.
29. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Selfadjoint extensions of symmetric subspaces // Pacif. J. Math.— 1974.— **54**, N 1.— P. 71—100.
30. *Coddington E. A., de Snoo H. S. V.* Positive selfadjoint extensions of positive symmetric subspaces // Math. Z. — 1978.— **159**.— P. 203—214.
31. *Лившиц М. С., Потапов В. П.* Теорема умножения характеристических матриц-функций // Докл. АН СССР.— 1950.— **62**, № 4.— С. 625—628.
32. *Гинзбург Ю. П.* О спектральных свойствах сжатий // Функцион. анализ.— 1971.— **5**, № 3.— С. 32—41.
33. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига.— М. : Наука, 1980.— 383 с.
34. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций и функцион. анализ.— 1969.— **8**.— С. 3—24.
35. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.
36. *Лидский В. Б.* Несамосопряженные операторы, имеющие след // Докл. АН СССР.— 1959.— **125**, № 3.— С. 485—488.
37. *Арлинский Ю. М.* О регулярных бирасширениях дифференциальных операторов // Граничные задачи дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— С. 3—12.
38. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1977.— 331 с.
39. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию.— М. : Наука, 1970. — 671 с.
40. *Холькин А. М.* Описание расширений дифференциальных операторов на бесконечном интервале в неопределенном случае // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1985.— **44**.— С. 112—121.
41. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для уравнения второго порядка с операторным коэффициентом // Функцион. анализ и его прил.— 1971.— **5**, № 1.— С. 10—21.
42. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов.— Киев : Наук. думка, 1983.— 210 с.
43. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Обобщенные разольвенты и граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами.— Киев, 1988.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.59).
44. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized Resolvents and the Boundary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps // J. Funct. Anal.— 1991.— **95**, N 1.— P. 1—95.

Получено 07.02.91