УДК 519.21

Д. Алимов, канд. физ.-мат. наук (Туркм. политехн. ин-т, Ашхабад)

О преобразованиях марковских функционалов

Рассматриваются преобразования марковских функционалов с помощью присоединения дополнительной компоненты. Выясняется связь между асимптотическим поведением марковских функционалов до преобразования и после него.

Разглядаються перетворення марковських функціоналів за допомогою приєднання додаткової компоненти. З'ясовується зв'язок між асимптотичною поведінкою марковських функціоналів до перетворення та після нього.

В настоящей статье продолжается изучение марковских функционалов (коротко МаФ), начатое в [1, 2]. Все предварительные обозначения и определения можно найти в [1].

Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$, — однородный марковский процесс со значениями в метрическом полном сепарабельном пространстве $(E, \mathcal{B})$. Будем считать его (процесс) эргодическим в смысле [3] и (ради простоты) стохастически непрерывным. Обозначим через $P_t(x, A)$ переходную вероятность процесса $X(\cdot)$ за время t из состояния $x \in E$ в множество $A \in \mathcal{B}$, а через π — инвариантное распределение вероятностей на $(E, \mathcal{B})$.

Для сокращения формулировок будем предполагать, что процесс $X(t)$ непериодичен [3], т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \int_E \varphi(y) P_t(x, dy) = \int_E \varphi(y)\pi(dy) \tag{1}$$

для всех $x \in E$ и всех ограниченных непрерывных функций φ.

Рассмотрим последовательность МаФ $\xi_n(t)$ от процесса $X(t)$, сходящуюся к МаФ $\xi(t)$ в следующем смысле:

$$\xi_n(0) = \xi(0) \qquad \mathbf{P}_{x,i} \text{ — п. н.}; \tag{2}$$

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = i,\ \xi(t) = j\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

для всех $t \geqslant 0$, $i \neq j$;

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_n \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) \neq i\} = 0 \tag{4}$$

для всех $x \in E$, $i = 1, 2, \dots, d$.

Как указано в [1, 2], из условий (1) — (4) вытекает существование такой нормирующей последовательности $\varepsilon_n \to 0+$ и последовательности матриц $C_n = \| c_n^{ij} \|_{i,j=1}^d$ таких, что $c_n^{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $\sum_j c_n^{ij} \leqslant 0$, $\sum_i c_n^{ii} = -1$ и

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t/\varepsilon_n) = j\} - q_n^{ij}(u) \to 0 \tag{5}$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$, $t\varepsilon_n \to u$, где $q_n^{ij}(u)$ — (i, j)-й элемент матрицы e^{uC_n}.

Так как пара $\{X(t), \xi_n(t)\}$ образует однородный марковский процесс, то можно от этого процесса рассмотреть МаФ $\eta_n(t)$, т. е. тройку

$$\{X(t),\ \xi_n(t),\ \eta_n(t)\}, \tag{6}$$

где $\xi_n(t) \in \{1, 2, \dots, d\}$, $\eta_n(t) \in \{1, 2, \dots, m\}$.

В частности, если функция $\eta_n(t)$ принимает два значения, причем одно из них поглощающее, то это соответствует сокращению времени жизни пары $\{X(t), \xi_n(t)\}$.

Предположим, что $C_n \to C$. По доказанному

$$\xi_n(t/\varepsilon_n) \to \tilde{\xi}(t) \tag{7}$$

в смысле сходимости распределений, где $\tilde{\xi}(t)$ — цепь Маркова с конечным числом значений с матрицей переходных вероятностей e^{tC}.

Поскольку тройка (6) образует марковский процесс, то пару $\{\xi_n(t), \eta_n(t)\}$ можно рассматривать как МаФ от процесса $X(t)$. Если выполнены аналоги условий (1)—(4), то этой паре можно поставить в соответствие какую-то нормировку $\delta_n \to 0+$ такую, что по некоторой подпоследовательности

$$\{\xi_n(t/\delta_n),\ \eta_n(t/\delta_n)\} \to \{\overline{\xi}(t),\ \overline{\eta}(t)\} \tag{8}$$

в смысле сходимости распределений, где $\{\overline{\xi}(t), \overline{\eta}(t)\}$ — марковский процесс с конечным числом значений $\{(i, j)\colon i = 1, 2, \ldots, d;\ j = 1, 2, \ldots, m\}$.

Можно считать, что соотношения (7), (8) выполняются для одной и той же подпоследовательности.

Сравнивая два предельных соотношений (7), (8), видим, что в (7) $\xi_n(t/\varepsilon_n) \to \tilde{\xi}(t)$, а в (8) $\xi_n(t/\delta_n) \to \overline{\xi}(t)$, поэтому возникает вопрос о соотношении между ε_n и δ_n. Ниже мы покажем, что, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\varepsilon_n \leqslant \delta_n. \tag{9}$$

Возникает вопрос, когда $\varepsilon_n/\delta_n \geqslant r > 0$ или, что то же самое,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} > 0? \tag{10}$$

Ответ, вообще говоря, отрицательный, и это основной результат данной статьи.

В дальнейшем нам понадобятся явные формулы для ε_n и δ_n. Их удобно выписать, когда $X(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ — цепь Маркова с дискретным временем и существует возвратное состояние $\mathrm{o} \in E$, т. е. $\mathbf{P}_x\{X(t) = \mathrm{o}$ для некоторых $t = 1, 2, \ldots\} = 1$.

Пусть $\tau = \min\{t \geqslant 1\colon X(t) = \mathrm{o}\}$ — момент первого возвращения в возвратное состояние о. В силу эргодичности $X(t)$ должно быть $\mu = \mathbf{P}_{\mathrm{o}}\tau < \infty$. Тогда в качестве ε_n можно взять $\varepsilon_n = \sum_i \varepsilon_n^i$, где $\varepsilon_n^i = \frac{1}{\mu}[1 - \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\xi_n(\tau) = i\}]$. По этой же формуле $\delta_n = \sum_{(i,j)} \delta_n^{ij}$, где $\delta_n^{ij} = \frac{1}{\mu}[1 - \mathbf{P}_{\mathrm{o},i,j}\{\xi_n(\tau) = i,\ \eta_n(\tau) = j\}]$.

Покажем, что $\varepsilon_n \leqslant \delta_n$. Имеем

$$\mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\xi_n(\tau) = i\} = \sum_j \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\xi_n(\tau) = i,\ \eta_n(\tau) = j\} =$$

$$= \sum_j \sum_k \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\eta_n(0) = k\}\, \mathbf{P}_{\mathrm{o},i,k}\{\xi_n(\tau) = i,\ \eta_n(\tau) = j\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_j \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\eta_n(0) = j\}\, \mathbf{P}_{\mathrm{o},i,j}\{\xi_n(\tau) = i,\ \eta_n(\tau) = j\}.$$

Поэтому

$$\varepsilon_n^i = \frac{1}{\mu}[1 - \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\xi_n(\tau) = i\}] \leqslant \frac{1}{\mu} \sum_j \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\eta(0) = j\}\, [1 - \mathbf{P}_{\mathrm{o},i,j}\{\xi_n(\tau) =$$

$$= i,\ \eta_n(\tau) = j\}] = \frac{1}{\mu} \sum_j \mathbf{P}_{\mathrm{o},i}\{\eta(0) = j\}\, \delta_n^{ij} \leqslant \sum_j \delta_n^{ij},$$

следовательно,

$$\varepsilon_n = \sum_i \varepsilon_n^i \leqslant \sum_{(i,j)} \delta_n^{ij} = \delta_n.$$

Приведем пример, когда $\liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n/\delta_n = 0$. Пусть $X(t)$ — цепь Маркова с возвратным состоянием 0, счетным множеством значений $\{0, 1, 2, \ldots\}$

и с переходными вероятностями за один шаг:

$$k \to k+1: \quad p_k;$$
$$k \to 0 \quad : \quad 1 - p_k.$$

Обозначим через $\alpha_n = \min\{t;\ X(t) \geqslant n\}$ момент первого выхода на уровень n процесса $X(t)$. Построим МаФ $\xi_n(t)$ с двумя состояниями $\{1, 2\}$. Для этого достаточно определить момент первого изменения состояния (образно говоря, «скачка») процесса $\xi_n(t)$. Обозначим его через $\beta_n = \min\{t \geqslant 1 : \xi_n(t) \neq \xi(0)\}$ и положим по определению $\beta_n = \alpha_{2n} + 1$. Процесс $\xi_n(t)$ начинает менять свое значение после выхода процесса $X(t)$ на уровень $2n$, независимо от того, попадает ли он следующим шагом в нуль или скачет вверх. Если процесс $X(t)$ после выхода на уровень $2n$ сразу попадает в нуль или после четного числа шагов вверх, то процесс $\xi_n(t)$ меняет свое первоначальное состояние, если же процесс $X(t)$ попадет в нуль после нечетного числа шагов, то процесс $\xi_n(t)$ остается в своем первоначальном состоянии.

Положим

$$\eta_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \geqslant \beta_n, \\ 1 & \text{при } t < \beta_n. \end{cases} \tag{11}$$

Теперь покажем, что при подходящем выборе вероятностей p_k соотношение (10) не будет выполнено. Прежде всего надо проверить, что при подходящем выборе p_k процесс $X(t)$ будет эргодическим, т. е. чтобы время возвращения было конечным и имело конечное среднее. Имеем

$$P_0\{\tau > n\} = P_0\{X(1) = 1,\ X(2) = 2, \ldots, X(n) = n\} = p_1 p_2 \ldots p_n = \prod_{j=1}^{n} p_j.$$

Теперь подсчитаем ε_n^i и δ_n^{ij}, $i = 1, 2$; $j = 0, 1$. Поскольку $\varepsilon_n^1 = \frac{1}{\mu} \mathbf{P}_{0,1}\{\xi_n(\tau) = 2\}$, $\varepsilon_n^2 = \frac{1}{\mu} \mathbf{P}_{0,2}\{\xi_n(\tau) = 1\}$, то $\varepsilon_n^1 = \varepsilon_n^2$. Далее,

$$\mathbf{P}_{0,1}\{\xi_n(\tau) = 2\} = \mathbf{P}_{0,1}\{\tau > \alpha_{2n},\ \xi_n(\tau) = 2\} =$$
$$= \prod_{j=1}^{2n} p_j \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_{2n+2k}) \prod_{m=0}^{2k-1} p_{2n+m},$$

поэтому

$$\varepsilon_n = \frac{2}{\mu} \prod_{j=1}^{2n} p_j \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_{2n+2k}) \prod_{m=0}^{2k-1} p_{2n+m}. \tag{12}$$

Вычислим δ_n. Имеем

$$\delta_n^{i0} = \frac{1}{\mu} [1 - \mathbf{P}_{0,i,0}\{\xi_n(\tau) = i,\ \eta_n(\tau) = 0\}] =$$

$$= \frac{1}{\mu} [1 - \mathbf{P}_{0,i}\{\xi_n(\tau) = i\}] = \varepsilon_n^i, \quad i = 1, 2,$$

$$\delta_n^{i1} = \frac{1}{\mu} [1 - \mathbf{P}_{0,i,1}\{\xi_n(\tau) = i,\ \eta_n(\tau) = 1\}] =$$

$$= \frac{1}{\mu} [1 - \mathbf{P}_{0,i}\{\xi_n(\tau) = i,\ \tau < \beta_n\}] = \frac{1}{\mu} \mathbf{P}_{0,i}\{\beta_n \leqslant \tau\}, \qquad i = 1, 2.$$

Далее,

$$\mathbf{P}_{0,1}\{\beta_n \leqslant \tau\} = \mathbf{P}_{0,2}\{\beta_n \leqslant \tau\} = \mathbf{P}_{0,1}\{X(\tau - 1) \geqslant 2n\} =$$

$$= \mathbf{P}_{0,1}\{\tau - 1 \geqslant 2n\} = P_0\{\tau > 2n\} = \prod_{j=1}^{2n} p_j.$$

Следовательно,

$$\delta_n = \frac{2}{\mu} \prod_{j=1}^{2n} p_j (1 + r_n), \tag{13}$$

где $r_n = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_{2n+2k}) \prod_{m=0}^{2k-1} p_{2n+m}$.

Из (12), (13) получаем

$$\varepsilon_n/\delta_n = r_n/(1 + r_n).$$

Отсюда видно, что если $r_n \to 0$, то $\varepsilon_n/\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ясно, что

$$r_n \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} (1 - p_{2j}). \tag{13'}$$

Поэтому если

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_{2k}) < \infty, \tag{14}$$

то $r_n \to 0$, как следует из (13′). Необходима конечность $P_0\tau$. Это можно обеспечить переходами из нечетных состояний. Положим

$$p_{2k+1} = p > 0. \tag{15}$$

Тогда

$$P_0\{\tau > n\} = \prod_{j=1}^{n} p_j \leqslant p^{[n/2]}.$$

Значит, если выполнены условия (14), (15), то $\varepsilon_n/\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и требовалось доказать.

В свете полученного отрицательного ответа на вопрос о совпадении порядков последовательностей ε_n и δ_n возникает вопрос о достаточных условиях, обеспечивающих это совпадение. Другими словами, нас интересуют условия, при которых выполняется (10)

Сначала рассмотрим этот вопрос в частном случае, когда $\eta_n(t)$ задается формулой (11), т. е. когда преобразование МаФ $\xi_n(t)$ состоит в сокращении времени жизни пары $\{X(t), \xi_n(t)\}$ до момента первого скачка процесса $\xi_n(t)$, который обозначен β_n. Время будем снова считать непрерывным.

Явные виды нормировок ε_n и δ_n зависят от конкретного вида процессов $X(t)$ и $\xi_n(t)$. В общей ситуации, как показано в [4], существует π —положительное множество $D \in \mathcal{B}$ и момент марковского вмешательства τ в эволюцию каждого из процессов $X(t)$, $\{X(t), \xi_n(t)\}$ такой, что

$$\mathbf{P}_{x,i}\{X(\tau) \in A\} = \pi_D(A),$$

$$\sup_n \sup_{x\in D} \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) \neq i\} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0,$$

$$\tau \geqslant 1 \quad \mathbf{P}_{x,i} \text{ — п. н.},$$

$$\sup_{x\in D} \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(\tau) \neq i\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\sup_{x\in D} \mathbf{P}_{x,i}\,\tau < \infty$$

для всех $A \in \mathcal{B}$, $x \in E$, $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, где $\pi_D(A) = \pi(AD)/\pi(D)$.

Положим $\mu = \mathbf{P}_{\pi_D,i}\tau$. Тогда в качестве ε_n и δ_n можно брать соответственно

$$\varepsilon_n = \sum_i \varepsilon_n^i, \text{ где } \varepsilon_n^i = \frac{1}{\mu}[1 - \mathbf{P}_{\pi_D,i}\{\xi_n(\tau) = i\}],$$

$$\delta_n = \sum_i \delta_n^i, \text{ где } \delta_n^i = \frac{1}{\mu}\mathbf{P}_{\pi_D,i}\{\beta_n \leqslant \tau\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть существуют вероятностные меры* μ, ν *и число* $r > 0$ *такие, что*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\nu,i}\{X(\beta_n)\in B\} > 0 \tag{16}$$

для всех $B \in \mathcal{B}$ *с*

$$\mu(B) > 1 - r. \tag{17}$$

Тогда выполняется (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное:

$$\varepsilon_{n'}/\delta_{n'} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

для некоторой подпоследовательности $n' \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $n = n'$. Тогда на основании (5) можно считать, что

$$\| \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = j\}\| \xrightarrow[t\varepsilon_n\to u]{} e^{uC}, \tag{18}$$

где $C = \lim C_n$. С другой стороны,

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = i,\ t < \beta_n\} \xrightarrow[t\delta_n\to u]{} e^{-u}. \tag{19}$$

Далее предположим, что существуют пределы (что не ограничивает общности)

$$c^i = \lim \frac{\varepsilon_n^i}{\varepsilon_n} \geqslant 0,$$
$$a^i = \lim \frac{\delta_n^i}{\delta_n} \geqslant 0. \tag{20}$$

Выберем такое фиксированное i, что $c^i > 0$. Так как $t\varepsilon_n \to 0$ при $t\delta_n \to u$, то с учетом (20) из (18), (19) соответственно следует

$$\| \mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = j\}\| \xrightarrow[t\delta_n\to u>0]{} \mathbf{1}, \tag{21}$$

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = i,\ t < \beta_n\} \xrightarrow[t\delta_n\to u>0]{} e^{-a^i u}, \tag{22}$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица. Таким образом, при $j \neq i$

$$\mathbf{P}_{x,i}\{\xi_n(t) = j\} \xrightarrow[t\delta_n\to u>0]{} 0 \tag{23}$$

для всех $x \in E$. В частности, если проинтегрируем (23) по мере ν, то

$$\sum_{j\neq i} \mathbf{P}_{\nu,i}\{\xi_n(t) = j\} \xrightarrow[t\delta_n\to u>0]{} 0. \tag{24}$$

Нам осталось доказать, что при некоторых i и j не будет выполняться соотношение (24).

Зафиксируем состояние i такое, что $a^i > 0$; $j \neq i$. Тогда по формуле полной вероятности в предположении, что первым скачком после i процесс окажется в j, получим

$$\mathbf{P}_{\nu,i}\{\xi_n(t) = j\} \geqslant \int_E \int_0^t \mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_n \in ds,\ X(\beta_n)\in dy,\ \xi_n(\beta_n) = j\} \times$$

$$\times\, \mathbf{P}_{y,j}\{\xi_n(t-s) = j,\ t-s < \beta_n\} \geqslant \int_E \int_0^t \mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_n \in ds,\ X(\beta_n)\in dy,$$

$$\xi_n(\beta_n) = j\}\, \mathbf{P}_{y,j}\{t < \beta_n\} = \int_E \mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_n \leqslant t,\ X(\beta_n)\in dy,\ \xi_n(\beta_n) = j\}\, \mathbf{P}_{y,j}\{t < \beta_n\}. \tag{25}$$

Из (21), (22), в частности, вытекает

$$\mathbf{P}_{y,j}\{t<\beta_n\}\xrightarrow[t\delta_n\to 1]{} e^{-a^j}$$

для всех $y\in E$.

Пусть $t=t_n$, $t_n\delta_n\to 1$. По теореме Егорова существует множество $B\in\mathcal{B}$ такое, что

$$|\mathbf{P}_{y,j}\{t<\beta_n\}-e^{-a^j}|<\frac{1}{2}e^{-a} \tag{26}$$

для всех $y\in B$; $j=1, 2, \ldots, d$; $n\geqslant n_0$, где $a=\max\limits_j a^j$.

В частности, из неравенства (26) вытекает

$$\mathbf{P}_{y,j}\{t<\beta_n\}\geqslant e^{-a^j}-\frac{1}{2}\,e^{-a}\geqslant\frac{1}{2}\,e^{-a}$$

для всех $y\in B$, $n\geqslant n_0$. Учитывая это неравенство, из (25) получаем

$$\mathbf{P}_{\nu,i}\{\xi_n(t)=j\}\geqslant\frac{1}{2}e^{-a}\mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_n\leqslant t,\ X(\beta_n)\in B,\ \xi_n(\beta_n)=j\}.$$

Суммируя это неравенство по всем $j\neq i$, находим

$$\sum_{j\neq i}\mathbf{P}_{\nu,i}(\xi_n(t)=j\}\geqslant\frac{1}{2}e^{-a}\mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_n\leqslant t,\ X(\beta_n)\in B\}. \tag{27}$$

Пусть теперь подпоследовательность n' из условия (15) такова, что

$$\mathbf{P}_{\nu,i}\{X(\beta_{n'})\in B\}\geqslant p>0\ \text{ при }\ n'\geqslant n_0'.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_{n'}\leqslant t,\ X(\beta_{n'})\in B\}\geqslant$$

$$\geqslant\mathbf{P}_{\nu,i}\{X(\beta_{n'})\in B\}-\mathbf{P}_{\nu,i}\{\beta_{n'}>t\}\geqslant p-\frac{1}{2}e^{-a^i},\quad n'\geqslant n_0'. \tag{28}$$

Учитывая (28), неравенство (27) перепишем в виде

$$\sum_{j\neq i}\mathbf{P}_{\nu,i}\{\xi_{n'}(t)=j\}\geqslant\frac{1}{2}e^{-a}\left(p-\frac{1}{2}e^{-a^j}\right),$$

для всех $n'\geqslant n_0'$. Отсюда следует, что для всех натуральных чисел N выполняется неравенство

$$\mathbf{P}_{\nu,i}\{\xi_{n'}(Nt)\neq i\}\geqslant\frac{1}{2}e^{-Na}\left(p-\frac{1}{2}e^{-Na^j}\right)\ \text{ при }\ n'\geqslant n_0'.$$

Выбирая достаточно большое натуральное N, видим, что правая часть здесь положительна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из неравенства (9) следует, что если выполнены условия (16), (17) теоремы 1, то (10) выполняется для всякого МаФ $\eta_n(t)$, для которого $\eta_n(t)=\eta_n(0)$, $0\leqslant t\leqslant\beta_n$.

З а м е ч а н и е 2. Утверждения теоремы 1 и замечания 1 сохраняют силу и для дискретного времени.

В заключение приведем пример выполнения условий (16), (17) теоремы 1 в частном случае, когда

$$\mathbf{P}_x\{\beta_n>t/\mathcal{N}_t\}=e^{-\int_0^t v_n(X(s))ds},$$

где $v_n(x)$ — последовательность $\mathcal{B}$-измеримых функций, $\mathcal{N}_t=\sigma\{X(s),\ s\leqslant t\}$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная течением процесса $X(\cdot)$ до момента времени t.

Т е о р е м а 2. *Пусть существует последовательность $\gamma_n\to 0+$ та-*

кая, что

$$\sup_{x\in E}\frac{1}{\gamma_n}v_n(x)<\infty, \tag{29}$$

$$\rho=\pi\left\{x\in E:\ \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}v_n(x)>0\right\}>0. \tag{30}$$

Тогда выполнены условия (16), (17) *с* $\nu=\mu=\pi$ *и с* $r=\frac{1}{2}\rho$.

Доказательство. Обозначим

$$g(x)=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}v_n(x). \tag{31}$$

Тогда условие (30) равносильно следующему:

$$\int_E \pi(dx)\,g(x)>0. \tag{32}$$

Согласно условию (29)

$$v_n(x)\leqslant K\gamma_n, \tag{33}$$

где $K=\mathrm{const}$.

Полагая $\nu=\pi$, а также пользуясь неравенством (33) и инвариантностью меры π, получаем

$$\mathbf{P}_\pi\{X(\beta_n)\in B\}=\mathbf{P}_\pi\int_0^\infty v_n(X(t))\,\mathbf{1}_B(X(t))\,e^{-\int_0^t v_n(X(s))ds}dt\geqslant$$

$$\geqslant\mathbf{P}_\pi\int_0^\infty v_n(X(s))\,\mathbf{1}_B(X(t))\,e^{-Kt}\,dt=\int_0^\infty e^{-\gamma_nKt}\mathbf{P}_\pi\,[v_n(X(t)),\ X(t)\in B]\,dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\gamma_nKt}dt\int_B\pi(dx)\,v_n(x)=\frac{1}{K}\int_B\pi(dx)\frac{1}{\gamma_n}v_n(x),$$

где

$$\mathbf{1}_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B,\\ 0, & x\notin B.\end{cases}$$

Пользуясь леммой Фату и обозначением (31), заключаем, что

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbf{P}_\pi\{X(\beta_n)\in B\}\geqslant\frac{1}{K}\int_B g(x)\,\pi(dx).$$

Рассмотрим множества

$$A_m=\left\{x\in E:\ g(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}.$$

Последовательность множеств $\{A_m\}$ монотонно возрастает. Кроме того, $\bigcup_m A_m=\{g>0\}$ и $\pi\{g>0\}=p>0$. Значит, $\pi(A_m)\uparrow\rho>0$ при $m\to\infty$. Поэтому найдется такое натуральное число N, что $\pi(A_N)>3\rho/4$. Теперь выберем множество B из условия $\pi(B)>1-\rho/2$ и покажем, что

$$\int_B g(x)\,\pi(dx)>0.$$

Имеем

$$\int_B g(x)\,\pi(dx)\geqslant\int_{A_NB}g(x)\,\pi(dx)\geqslant\frac{1}{N}\,\pi(A_NB)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{N}\,[\pi(A_N)+\pi(B)-1]\geqslant\rho/4N.$$

Теорема доказана.

1. *Алимов Д.* Три примера марковских функционалов // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, № 3.— С. 299—304.
2. *Алимов Д.* Закон больших чисел для марковских функционалов // Докл. АН УССР.— 1991.— № 4.— С. 27—29.
3. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 336 с.
4. *Алимов Д.* Несколько замечаний об искусственной регенерации // Стохастические уравнения и предельные теоремы.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.— С. 10—14.

Получено 03.07.91