УДК 517.5

О. В. Давыдов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

О фиксации значений последовательностей полунорм

Доказаны теоремы о фиксации значений последовательностей непрерывных полунорм на некоторых множествах в банаховых пространствах, позволившие получить новые результаты об асимптотическом поведении приближений индивидуальных функций и о сходимости интерполяционных процессов на классах функций.

Доведені теореми про фіксацію значень послідовностей неперервних півнорм на деяких множинах в банахових просторах, які дозволили одержати нові результати про асимптотичну поведінку наближень індивідуальних функцій і про збіжність інтерполяційних процесів на класах функцій.

1. Введение. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Функционал $p:X\to\mathbb{R}$ называется полунормой, если он удовлетворяет условиям $p(f+g)\leqslant p(f)+p(g)$, $p(\alpha f)=|\alpha|\,p(f)$ при всех $f,g\in X$, $\alpha\in\in\mathbb{R}$. Положим $p(\mathfrak{M})=\sup\{p(f):f\in\mathfrak{M}\}$, $\mathfrak{M}\subset X$, $\|p\|=p(B)$, где $B==\{f\in X:\|f\|_X\leqslant 1\}$. Нетрудно проверить, что p непрерывен в том и только в том случае, когда $\|p\|<\infty$.

Согласно принципу фиксации особенности для любой последовательности непрерывных полунорм p_n и элементов $f_n\in B$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(f_n)==\infty$, существует $f\in B$, не зависящий от n, для которого $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,p_n(f)==\infty$. Единичный шар B здесь может быть заменен на любое замкнутое ограниченное выпуклое множество $\mathfrak{M}$ в X.

В некоторых задачах теории приближения (необходимые и достаточные условия сходимости интерполяционных процессов на классах функций, асимптотическое поведение приближений индивидуальных функций некоторого класса) требуется получить более тонкий результат — построить элемент $f\in\mathfrak{M}$, для которого $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ p_n(f)/p_n(f_n)$ равен единице или хотя бы строго больше нуля, так что значения $p_n(f_n)$, достигаемые полунормами p_n на множестве $\mathfrak{M}$, оказываются асимптотически «зафиксированными» на элементе f. При этом особый интерес представляет случай такого выбора последовательности f_n, что $\lim\limits_{n\to\infty}\ p_n(f_n)/p_n(\mathfrak{M})=1$,— тогда можно говорить о фиксации экстремальных значений полунорм. Для конкретных последовательностей полунорм p_n и классов функций $\mathfrak{M}$ эта задача, а также более сложная задача о нижнем пределе отношения $p_n(f)/p_n(\mathfrak{M})$ решена в ряде работ С. М. Никольского, К. И. Осколкова, В. Н. Темлякова (см., например, статью [1]).

В работах П. Бутцера, В. Дикмейса, Р. Несселя, Э. ван Викерена получены количественные обобщения принципа фиксации особенности (см., например, [2]). В частности, Э. ван Викерен [3] доказал теорему о мажорированной сходимости, согласно которой в пространстве Фреше Y, определяемом последовательностью полунорм $\{|\cdot|_p:p\in\mathbb{N}\}$, при некоторых условиях на элементы $f_n\in K\bigcap Y_{b,M}$ и сублинейные функционалы $T_n:Y\to\mathbb{R}$ из соотношения $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|T_n(f_n)|\geqslant d$ вытекает существование $f_0\in\overline{K}^Y\bigcap Y_{b,M}$ такого, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|T_n(f_0)|\geqslant\max\{d/2, d-e\}$, где $e\geqslant\sup\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|T_n(f)|:f\in K\cap Y_b\}$, K — некоторый конус в $Y, Y_{b,M}=\{f\in Y:\sup\limits_p|f|_p\leqslant M\}$, $Y_b=\bigcup\limits_M Y_{b,M}$.

В настоящей работе получены общие теоремы о фиксации значений последовательностей полунорм p_n на множестве $\mathfrak{M}_H$, задаваемом с помощью семейства полунорм H (никак не связанного с $\{p_n\}$) в банаховом пространстве X. Эти результаты применяются для исследования асимптотического поведения наилучших приближений индивидуальных функций в метрике L_1.

Основные результаты статьи содержатся в диссертации автора [4] и анонсированы в [5].

2. Теоремы фиксации. Пусть H — некоторое семейство полунорм $h:X\to\mathbb{R}$ таких, что $\|h\|<\infty$. Положим

$$\mathfrak{M}_H=\{f\in X:\sup_{h\in H}h(f)\leqslant 1\},\qquad \mathfrak{M}_H^*=\{f\in\mathfrak{M}_H:\lim_{\|h\|\to\infty}h(f)=0\},$$

где соотношение $\lim\limits_{\|h\|\to\infty}h(f)=0$ понимается в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое действительное $M>0$, что какова бы ни была полунорма $h\in H$, удовлетворяющая неравенству $\|h\|\geqslant M$, выполняется $h(f)<\varepsilon$. Таким образом, если семейство H ограничено, т. е. $\sup\{\|h\|:h\in H\}<\infty$, то $\mathfrak{M}_H^*=\mathfrak{M}_H$; если $H=\varnothing$, то $\mathfrak{M}_H=\mathfrak{M}_H^*=X$; если $H=\{\|\cdot\|_X\}$, то $\mathfrak{M}_H=\mathfrak{M}_H^*=B$.

Следующая теорема доказывается методом скользящего горба.

Теорема 1. *Для любой последовательности полунорм $p_n:X\to\mathbb{R}$ и элементов $f_n\in\mathfrak{M}_H^*$ таких, что $\|p_n\|<\infty$, $p_n(f_n)\neq 0$, $n=1,2,\ldots$, и*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_X=0, \tag{1}$$

существует элемент $f\in\mathfrak{M}_H$, не зависящий от n, для которого

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,p_n(f)/p_n(f_n)\geqslant 1. \tag{2}$$

Доказательство. Построим индуктивно три последовательности чисел $M_k\in\mathbb{R}$, $n_k\in\mathbb{N}$, $s_k=\pm 1$, где $k=1,2,\ldots$. При $k=1$ положим $M_1=n_1=s_1=1$. Пусть $k\geqslant 2$ и числа M_i, n_i, s_i при $i=\overline{1,k-1}$ выбраны. Ввиду того, что $f_{n_i}\in\mathfrak{M}_H^*$, $i=\overline{1,k-1}$, мы можем выбрать M_k настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\sum_{i=1}^{k-1}h(f_{n_i})\leqslant\frac{1}{k+2}\,,\ \text{если}\ \|h\|\geqslant M_k,\quad h\in H, \tag{3}$$

$$M_k>\max\{k, M_{k-1}\}. \tag{4}$$

Затем выберем n_k настолько большим, что

$$\|f_{n_k}\|_X\leqslant 2^{-1}\min\{(k+1)^{-1}M_k^{-1},\|f_{n_{k-1}}\|_X\}, \tag{5}$$

$$p_{n_i}(f_{n_k})\leqslant 2^{-k}p_{n_i}(f_{n_i}),\quad i=\overline{1,k-1}, \tag{6}$$

$$n_k\geqslant k. \tag{7}$$

Возможность такого выбора вытекает из предположения (1), непрерывности полунорм p_{n_i} и условия $p_{n_i}(f_{n_i})\neq 0$, $i=\overline{1,k-1}$. Выберем «знак» s_k. Для этого положим $g=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{i}{i+2}\,s_if_{n_i}$. Очевидно,

$$\max\left\{p_{n_k}\left(g+\frac{k}{k+2}\,f_{n_k}\right),\quad p_{n_k}\left(g-\frac{k}{k+2}\,f_{n_k}\right)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(p_{n_k}\left(g+\frac{k}{k+2}f_{n_k}\right)+p_{n_k}\left(g-\frac{k}{k+2}f_{n_k}\right)\right)\geqslant \frac{k}{k+2}\, p_{n_k}(f_{n_k}).$$

Поэтому, выбирая $s_k=1$ или -1, добиваемся выполнения неравенства

$$p_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{i+2}\, s_i f_{n_i}\right)\geqslant \frac{k}{k+2}\, p_{n_k}(f_{n_k}). \tag{8}$$

Итак, существуют последовательности $\{M_k\}$, $\{n_k\}$, $\{s_k\}$, для которых при всех $k\geqslant 2$ выполняются соотношения (3) — (8). Из (5) вытекает, что при всех $k=1, 2, \ldots$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\|f_{n_i}\|_X \leqslant 2\|f_{n_{k+1}}\|_X \leqslant (k+2)^{-1}M_{k+1}^{-1}. \tag{9}$$

Положим $f=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{i+2}\, s_i f_{n_i}$, где ввиду (9) ряд сходится в банаховом пространстве X, значит, $f\in X$. Покажем, что $f\in\mathfrak{M}_H$ и удовлетворяет (2) — тем самым теорема будет доказана.

Пусть $h\in H$. Ввиду (4) найдется номер k, для которого $M_k\leqslant\|h\|<M_{k+1}$. Используя (9), получаем

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}h(f_{n_i})\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}\|h\|\,\|f_{n_i}\|_X\leqslant(k+2)^{-1}.$$

Учитывая (3) и тот факт, что $f_{n_k}\in\mathfrak{M}_H$, имеем

$$h(f)\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}h(f_{n_i})+\frac{k}{k+2}\,h(f_{n_k})+\sum_{i=k+1}^{\infty}h(f_{n_i})\leqslant(k+2)^{-1}+$$

$$+k(k+2)^{-1}+(k+2)^{-1}=1.$$

В силу произвольности $h\in H$ это означает, что $f\in\mathfrak{M}_H$.

Далее, ввиду (6)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}p_{n_k}(f_{n_i})\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-i}p_{n_k}(f_{n_k})=2^{-k}p_{n_k}(f_{n_k}).$$

Поэтому, используя (8), получаем при $k\geqslant 2$

$$p_{n_k}(f)\geqslant p_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{i+2}\,s_i f_{n_i}\right)-\sum_{i=k+1}^{\infty}p_{n_k}(f_{n_i})\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{k}{k+2}-2^{-k}\right)p_{n_k}(f_{n_k}),$$

откуда ввиду (7) вытекает (2). Теорема доказана.

Непосредственное применение теоремы 1 в задачах фиксации экстремальных значений $p_n(\mathfrak{M}_H)$ затруднено условиями $f_n\in\mathfrak{M}_H^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_X=0$. Поэтому представляют интерес следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}_H^*$ всюду плотно в $\mathfrak{M}_H$ в метрике пространства X, а последовательность полунорм $p_n: X\to\mathbb{R}$ и элементов $f_n\in\mathfrak{M}_H$ удовлетворяет условиям $\|p_n\|<\infty$, $p_n(f_n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, и* (1). *Тогда существует $f\in\mathfrak{M}_H$, для которого выполняется* (2).

Доказательство. Ввиду плотности $\mathfrak{M}_H^*$ в $\mathfrak{M}_H$ при каждом $n=1, 2, \ldots$ найдется элемент $g_n\in\mathfrak{M}_H^*$, для которого $\|f_n-g_n\|_X\leqslant n^{-1}\times$

$\times \min\{1, p_n(f_n)/\| p_n \|\}$. Тогда $\| g_n \|_X \leqslant \| f_n \|_X + n^{-1}$, так что ввиду (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \| g_n \|_X = 0$. Кроме того, $p_n(g_n) \geqslant p_n(f_n) - \| p_n \| \| f_n - g_n \|_X \geqslant (1 - - n^{-1}) p_n(f_n)$. Применяя теорему 1 к последовательности полунорм p_n и элементов g_n, получаем существование $f \in \mathfrak{M}_H$, для которого выполняется (2). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}_H^*$ всюду плотно в $\mathfrak{M}_H$. Если множество $\mathfrak{M}_H$ компактно, то для любой последовательности полунорм $p_n : X \to \mathbb{R}$ таких, что $\| p_n \| < \infty$, $p_n(\mathfrak{M}_H) \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, существует элемент $f \in \in \mathfrak{M}_H$, для которого*

$$\varlimsup_{n\to\infty} p_n(f)/p_n(\mathfrak{M}_H) \geqslant \frac{1}{3}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть элементы $f_n \in \mathfrak{M}_H$ таковы, что $p_n(f_n) \geqslant \geqslant (1 - n^{-1}) p_n(\mathfrak{M}_H)$, $n = 1, 2, \ldots$. Ввиду компактности $\mathfrak{M}_H$, и так как нас интересует поведение $p_n(f)$ только для некоторой подпоследовательности, можно считать, что $\{f_n\}$ сходится в метрике пространства X к некоторому элементу $\bar{f} \in \mathfrak{M}_H$. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} p_n(\bar{f})/p_n(\mathfrak{M}_H) \geqslant 1/3$, то (10) выполняется с $f = \bar{f}$. Поэтому будем считать, что указанный предел строго меньше 1/3. В этом случае положим $g_n = \dfrac{1}{2}(f_n - \bar{f})$. Тогда $g_n \in \mathfrak{M}_H$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| g_n \|_X = = 0$. При достаточно больших n $p_n(g_n) \geqslant \dfrac{1}{2} p_n(f_n) - \dfrac{1}{2} p_n(\bar{f}) \geqslant \geqslant \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n}\right) p_n(\mathfrak{M}_H)$. Следовательно, применяя теорему 2 к последовательности полунорм p_n и элементов g_n, выводим существование $f \in \mathfrak{M}_H$, для которого выполняется (10). Теорема доказана.

Отметим, что остается открытым вопрос о возможности заменить в правой части (10) 1/3 на 1.

Следствие. *В условиях теоремы* 3 *следующие свойства последовательности полунорм p_n эквивалентны:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{M}_H$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\mathfrak{M}_H) = 0$.

3. Множества фиксации значений. В этом пункте рассмотрим некоторые конкретные множества $\mathfrak{M}_H$, для которых выполняется условие плотности $\mathfrak{M}_H^*$ в $\mathfrak{M}_H$ и тем самым верны фиксационные свойства, выраженные в теореме 2, а в случае компактности — и в теореме 3. Заметим, что одно и то же замкнутое абсолютно выпуклое множество $\mathfrak{M}$ в пространстве X может быть задано с помощью различных семейств H непрерывных полунорм. Применимость теоремы 2 зависит, таким образом, от аппроксимативных свойств подмножества $\mathfrak{M}_H^*$ и, следовательно, от удачного выбора семейства H. В связи с этим введем следующее определение.

Определение. *Замкнутое абсолютно выпуклое множество $\mathfrak{M}$ в банаховом пространстве X будем называть множеством фиксации значений в X, если для любой последовательности полунорм $p_n : X \to \mathbb{R}$ и элементов $f_n \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих условиям $\| p_n \| < \infty$, $p_n(f_n) \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n \|_X = 0$, существует элемент $f \in \mathfrak{M}$, не зависящий от n, для которого $\varlimsup\limits_{n\to\infty} p_n(f)/p_n(f_n) \geqslant 1$.*

Если множество $\mathfrak{M}$ содержит некоторый шар с центром в нуле, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_H$, где H — семейство, состоящее лишь из одной полунормы — функционала Минковского $h_{\mathfrak{M}}(f) = \inf\{\lambda : \lambda > 0,\ \lambda^{-1} f \in \mathfrak{M}\}$, $\| h_{\mathfrak{M}} \| < \infty$. Тогда $\mathfrak{M}_H^* = \mathfrak{M}_H$ и по теореме 2 $\mathfrak{M}$ является множеством фиксации значений. Любопытно отметить, что вытекающее отсюда утверждение «X

есть множество фиксации значений в X» по существу эквивалентно принципу фиксации особенности, сформулированному во введении. Действительно, чтобы доказать это утверждение, достаточно применить принцип фиксации особенности к последовательности полунорм $(p_n(f_n))^{-1}p_n$ и элементов $\|f_n\|_X^{-1}f_n$. Обратно, для любой последовательности полунорм p_n и элементов $f_n \in B$ таких, что $\lim_{n\to\infty} p_n(f_n) = \infty$, рассмотрим элементы $g_n = (p_n(f_n))^{-1/2}f_n$, и в силу нашего утверждения существует $g \in X$, для которого $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_n(g)/p_n(g_n) \geqslant 1$, откуда $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_n(f) = \infty$ для $f = \|g\|_X^{-1}g \in B$.

Нетривиальные примеры множеств фиксации значений в любом банаховом пространстве X могут быть получены с помощью K-функционала Петре [6].

Пусть $U \subset X$ — некоторое линейное многообразие, на котором задана полунорма $|\cdot|_U$. Положим для $f \in X$, $t \geqslant 0$,

$$K_t(f) = K_t(f; X, U) = \inf_{g\in U}(\|f-g\|_X + t|g|_U).$$

Пусть, далее, $\omega(t)$ — некоторый заданный модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая при $t \geqslant 0$ полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Рассмотрим в X множество

$$X_\omega(U) = \{f \in X : K_t(f) \leqslant \omega(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{t\to+0} \omega(t)/t = \infty, \tag{11}$$

то $X_\omega(U)$ *есть множество фиксации значений в* X.

Доказательство. Рассмотрим семейство полунорм $H = \{h_t : t \in (0, \infty)\}$, где $h_t(f) = K_t(f)/\omega(t)$. Имеем

$$\|h_t\| \leqslant 1/\omega(t) < \infty, \quad 0 < t < \infty. \tag{12}$$

Так как $\mathfrak{M}_H = X_\omega(U)$, то для доказательства справедливости утверждения можно будет применить теорему 2, если покажем, что при выполнении условия (11) $\mathfrak{M}_H^*$ всюду плотно в $\mathfrak{M}_H$.

Для этого возьмем произвольный элемент $f \in \mathfrak{M}_H$ и при каждом $\eta \in (0, 1)$ найдем $g_\eta \in U$ такой, что

$$\|f - g_\eta\|_X + \eta|g_\eta|_U \leqslant 2\omega(\eta). \tag{13}$$

Оценим $K_t(g_\eta)$. При фиксированном $t \in (0, \infty)$ и любом $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon \in U$ такой, что $\|f - r_\varepsilon\|_X + t|r_\varepsilon|_U < (1+\varepsilon)\omega(t)$. Поэтому $K_t(g_\eta) \leqslant \|g_\eta - r_\varepsilon\|_X + t|r_\varepsilon|_U \leqslant \|f - g_\eta\|_X + \|f - r_\varepsilon\|_X + t|r_\varepsilon|_U \leqslant 2\omega(\eta) + (1 + \varepsilon)\omega(t)$. Устремляя ε к нулю, получаем $K_t(g_\eta) \leqslant 2\omega(\eta) + \omega(t)$. С другой стороны, ввиду (13) $K_t(g_\eta) \leqslant t|g_\eta| \leqslant 2t\omega(\eta)/\eta$. Таким образом,

$$K_t(g_\eta) \leqslant \min\{2\omega(\eta) + \omega(t),\ 2t\omega(\eta)/\eta\}. \tag{14}$$

Для каждого $\eta \in (0, 1)$ **определим по индукции** числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{[1/\eta]}$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x). Положим $\eta_1 = \eta$, а при выбранных $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ возьмем $\eta_k \in (0, \eta_{k-1})$ таким, что

$$\omega(\eta_k) \leqslant \eta\omega(\eta_{k-1}), \quad \omega(\eta_k)/\eta_k \geqslant \omega(\eta_{k-1})/(\eta\eta_{k-1}) \tag{15}$$

(последнее возможно в силу (11)). Положим

$$f_\eta = \frac{\eta(1-\eta)}{1+5\eta}\sum_{k=1}^{[1/\eta]} g_{\eta_k}, \quad 0 < \eta < 1.$$

Покажем, что $f_\eta \in \mathfrak{M}_H^*$. Зафиксируем $t \in (0, \infty)$ и найдем номер $k_0 =$

$=\min\{k:\eta_k\leqslant t\}$. Имеем

$$K_t(f_\eta)\leqslant\frac{\eta(1-\eta)}{1+5\eta}\Big(\sum_{k=1}^{k_0-1}K_t(g_{\eta_k})+\sum_{k=k_0}^{[1/\eta]}K_t(g_{\eta_k})\Big).$$

Ввиду (14) и (15)

$$\sum_{k=k_0}^{[1/\eta]}K_t(g_{\eta_k})\leqslant\sum_{k=k_0}^{[1/\eta]}(2\omega(\eta_k)+\omega(t))\leqslant 2\omega(\eta_{k_0})\sum_{i=0}^{[1/\eta]-k_0}\eta^i+$$

$$+\omega(t)/\eta\leqslant\frac{1+\eta}{\eta(1-\eta)}\omega(t),$$

а также

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}K_t(g_{\eta_k})\leqslant\sum_{k=1}^{k_0-1}2t\omega(\eta_k)/\eta_k\leqslant 2t\sum_{i=0}^{k_0-2}\eta^i\omega(\eta_{k_0-1})/\eta_{k_0-1}\leqslant 4\omega(t)/(1-\eta),$$

где использовано известное соотношение $\dfrac{\omega(t'')}{t''}\leqslant 2\dfrac{\omega(t')}{t'}$, верное при $0<t'<t''$ для любого модуля непрерывности. Из этих выкладок следует, что $K_t(f_\eta)\leqslant\omega(t)$, откуда в силу произвольности $t\in(0,\infty)$ получаем $f_\eta\in\mathfrak{M}_H$. Ввиду (12) из условия $\|h_t\|\to\infty$ вытекает $t\to+0$. Поэтому из (14) и (11) имеем

$$h_t(f_\eta)\leqslant\frac{t}{\omega(t)}\,\frac{2\eta(1-\eta)}{1+5\eta}\sum_{k=1}^{[1/\eta]}\frac{\omega(\eta_k)}{\eta_k}\to 0$$

при $\|h_t\|\to\infty$. Тем самым доказано, что $f_\eta\in\mathfrak{M}_H^*$. Убедимся, что f_η сколь угодно хорошо аппроксимирует элемент f в метрике пространства X. Для этого оценим $\|f-f_\eta\|_X$, используя (13) и (15):

$$\|f-f_\eta\|_X=\left\|\frac{\eta(1-\eta)}{1+5\eta}\sum_{k=1}^{[1/\eta]}(g_{\eta_k}-f)+\left(\frac{\eta(1-\eta)}{1+5\eta}[1/\eta]-1\right)f\right\|_X\leqslant$$

$$\leqslant\eta(1-\eta)\sum_{k=1}^{[1/\eta]}\|g_{\eta_k}-f\|_X+7\eta\|f\|_X\leqslant\eta(1-\eta)\sum_{k=1}^{[1/\eta]}2\omega(\eta_k)+7\eta\|f\|_X\leqslant$$

$$\leqslant\eta(2\omega(\eta)+7\|f\|_X).$$

Таким образом, $\lim\limits_{\eta\to 0}\|f-f_\eta\|_X=0$. В силу произвольности $f\in\mathfrak{M}_H$ получаем плотность $\mathfrak{M}_H^*$ в $\mathfrak{M}_H$. Теорема доказана.

Отметим, что другая общая конструкция множеств фиксации значений, использующая мажоранту наилучшего приближения, рассмотрена в [7].

4. Асимптотическое поведение приближений индивидуальных функций.

Пусть L_p^r, $r=0,1,\ldots$ $(L_p^0=L_p)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — банахово пространство 2π-периодических функций f таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна (при $r\geqslant 1$), а $f^{(r)}$ суммируема на $(0,2\pi)$ в p-й степени при $1\leqslant p<\infty$ и существенно ограничена при $p=\infty$, с нормой $\|f\|_{pr}=\max\{\|f^{(k)}\|_{L_p(0,2\pi)}:0\leqslant k\leqslant r\}$ $(\|f\|_{p0}=\|f\|_p)$; C^r, $r=0,1,\ldots$ $(C^0=C)$ — банахово пространство 2π-периодических r раз непрерывно дифференцируемых функций f с нормой $\|f\|_{\infty r}$; F_{2n-1}^T, $n=1,2,\ldots,$ — пространство тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$; $W^rH_p^\omega$, $r=0,1,\ldots$ $(W^0H_p^\omega=H_p^\omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — класс функций $f\in L_p^r$, $1\leqslant p<\infty$, и $f\in C^r$ при $p=\infty$ таких, что $\omega(f^{(r)},t)_p\leqslant\omega(t)$, $t\in[0,\pi]$, где $\omega(g,t)_p=\sup\{\|g(\cdot+\delta)-g(\cdot)\|_p:|\delta|\leqslant t\}$ — модуль непрерывности функции $g\in L_p$, а $\omega(t)$ — некоторый заданный модуль непрерывности. Пусть $E_n(f)_p=\inf\{\|f-T_n\|_p:T_n\in$

$\in F^T_{2n-1}\}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_p$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $E_n(\mathfrak{M})_p = \sup\{E_n(f)_p : f \in \mathfrak{M}\}$, где $\mathfrak{M} \subset L_p$.

Теорема 5. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию* (11). *Тогда класс $W^r H^\omega_p$ является множеством фиксации значений в пространстве L^r_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в C^r при $p = \infty$.*

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ (случай $p = \infty$ рассматривается аналогично). Очевидно, $W^r H^\omega_p = \mathfrak{M}_H$, где H — семейство полунорм $h_t(f) = \omega(f^{(r)}, t)_p / \omega(t)$, $t \in (0, \pi]$, в пространстве L^r_p. Имеем

$$\| h_t \| \leqslant 2/\omega(t) < \infty, \quad t \in (0, \pi]. \tag{16}$$

Докажем, что $\mathfrak{M}^*_H$ всюду плотно в $\mathfrak{M}_H$ в метрике пространства L^r_p.

Пусть $f \in W^r H^\omega_p$. Рассмотрим функцию Стеклова с шагом $h > 0$

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} f(x+u)\, du.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, нетрудно доказать, что при любом $\delta > 0$ $\| f^{(r)}_h(\cdot + \delta) - f^{(r)}_h(\cdot) \|_p \leqslant \omega(f^{(r)}, \delta)_p$. Вместе с тем $f_h \in \in L^{r+1}_p$, причем $\| f^{(r+1)}_h \|_p \leqslant \omega(f^{(r)}, h)_p / h$ [8], откуда $\omega(f^{(r)}_h, t)_p \leqslant t\omega(f^{(r)}; h)_p / /h$, $t \in (0, \pi]$, а значит, $h_t(f_h) \leqslant t\omega(h)/(h\omega(t))$. Учитывая (11) и (16), получаем равенство

$$\lim_{\|h_t\| \to \infty} h_t(f_h) = \lim_{t \to +0} h_t(f_h) = 0.$$

Таким образом, $f_h \in \mathfrak{M}^*_H$. В силу известных свойств функции Стеклова $\| f^{(k)}_h - f^{(k)} \|_p \leqslant \omega(f^{(k)}, h)_p$, $k = \overline{0, r}$ [8], тогда $\lim\limits_{h \to 0} \| f_h - f \|_{pr} = 0$. Ввиду произвольности $f \in \mathfrak{M}_H = W^r H^\omega_p$ получаем, что $\mathfrak{M}^*_H$ плотно в $\mathfrak{M}_H$.

Применяя теорему 2, получаем отсюда, что $W^r H^\omega_p$ есть множество фиксации значений. Теорема доказана.

Покажем, как с помощью теоремы 5 доказывается один из результатов, анонсированных в [5].

Теорема 6. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности.*

А) Если $\omega(t)$ удовлетворяет условию (11), *то при каждом $r = 0, 1, \ldots$ существует функция $f \in W^r H^\omega_\infty$, для которой*

$$\varlimsup_{n \to \infty} E_n(f)_1 / E_n(W^r H^\omega_\infty)_1 = 1. \tag{17}$$

Б) если условие (11) *не выполняется, то для любой $f \in W^r H^\omega_\infty$*

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f)_1 / E_n(W^r H^\omega_\infty)_1 = 0. \tag{18}$$

Доказательство. А) Согласно теореме Н. П. Корнейчука [8] $E_n(W^r H^\omega_\infty)_1 = E_n(f_{nr})_1$, где $f_{nr} = f_{nr}(\omega)$ — функция класса $W^r H^\omega_\infty$, являющаяся r-м периодическим интегралом, в среднем равным нулю, от $2\pi/n$-периодической нечетной функции f_{n0}, заданной на $[0, \pi/n]$ равенствами

$$f_{n0}(t) = \begin{cases} \omega(2t)/2, & 0 \leqslant t \leqslant \pi/(2n), \\ \omega(2\pi/n - 2t)/2, & \pi/(2n) \leqslant t \leqslant \pi/n. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n \to \infty} \| f_{nr} \|_{\infty r} = 0$. Учитывая, что $W^r H^\omega_\infty$ является множеством фиксации значений в пространстве C^r и рассматривая последовательность полунорм $p_n(f) = E_n(f)_1$ и функций $f_n = f_{nr}$, получаем существование $f \in W^r H^\omega_\infty$, не зависящей от n, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(f)_1 / E_n(f_{nr})_1 = 1,$$

что равносильно (17).

Б) Если $\omega(t)$ не удовлетворяет условию (11), то найдется число $M > 0$ такое, что $\omega(t) \leqslant Mt$ для всех t. Поэтому $W^r H^\omega_\infty \subset L^{r+1}_\infty$, значит, в силу теоремы Джексона для любой функции $f \in W^r H^\omega_\infty$ имеем $E_n(f)_1 \leqslant c_1 n^{-r-1} \omega(f^{(r+1)}, n^{-1})_1 = o(n^{-r-1})$, $n \to \infty$, и в то же время, как известно, $E_n(W^r H^\omega_\infty)_1 \geqslant c_2 n^{-r-1}$ (здесь c_1, c_2 — положительные постоянные). Следовательно, выполняется (18). Теорема доказана.

Остальные теоремы из [5] доказываются аналогично. То же самое можно сказать о результатах работы [9].

Негрудно понять, что из части Б) теоремы 6 вытекает, что класс $W^r H^\omega_\infty$ не является множеством фиксации значений в пространстве C^r, если не выполнено условие (11). В силу этого нельзя отказаться от условия (11) и в формулировке теоремы 4 — ведь, как известно, в случае $X = C$, $U = C^1$ для некоторых положительных постоянных c_3, c_4 выполняется неравенство $c_3 \omega(f, t)_\infty \leqslant K_t(f) \leqslant c_4 \omega(f, t)_\infty$.

В заключение отметим, что следствие из теоремы 3 позволило получить некоторые критерии сходимости интерполяционных процессов Лагранжа на классах функций, заданных мажорантой модуля непрерывности r-й производной или мажорантой наилучшего приближения [4, 10, 11].

1. *Корнейчук Н. П.* С. М. Никольский и развитие исследований по теории приближения функций в СССР // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, вып. 5.— С. 71—131.
2. *Dickmeis W., Nessel R. J., Wickeren E. van.* Quantitative Extension of the Uniform Boundedness Principle // Jahresber. Dtsch. Math. Ver.— 1987.— **89**, N 3.— P. 105—134.
3. *Wickeren E. van.* A Baire Approach to Quantitative Resonance Principles // Numer. Funct. Anal. and Optimiz.— 1987.— **9**, N 1, 2.— P. 147—180.
4. *Давыдов О. В.* Об асимптотическом поведении приближений индивидуальных функций и функционалов : Дис. ... канд физ.-мат. наук.— Днепропетровск, 1987.— 75 с.
5. *Давыдов О. В.* Асимптотическое поведение наилучших приближений индивидуальных функций классов $W^r H_\omega$ в метрике L_p // Докл. АН СССР.—1989.— **306**, № 4.— С. 777—781.
6. *Peetre J.* Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1963.— **256**.— P. 1424—1426.
7. *Давыдов О. В.* Фиксация значений последовательностей полунорм на множествах, заданных мажорантой наилучшего приближения // Приближение функций полиномами и сплайнами и суммирование рядов.— Днепропетровск : Изд-во Днепропетр. ун-та, 1990.— С. 18—24.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
9. *Давыдов О. В.* О приближении индивидуальных функций суммами Фурье и их средними // Вопросы оптимальной аппроксимации функций и суммирования рядов.— Днепропетровск : Изд-во Днепропетр. ун-та, 1988.— С. 20—23.
10. *Давыдов О. В.* Асимптотическое поведение приближений индивидуальных функций и сходимость интерполяционных процессов // Теория функций и приближений : Труды 4-й Саратовской зимней школы (25 янв.— 5 февр. 1988 г.).— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990.— Ч. 2.— С. 79—81.
11. *Давыдов О. В.* О сходимости интерполяционных процессов Лагранжа в классах дифференцируемых функций // Изв. вузов. Математика.— 1990.— № 4.— С. 74—77.

Получено 24.08.90