УДК 517.5

В. Г. Доронин, канд. физ.-мат. наук,
А. А. Лигун, д-р физ.-мат. наук (Днепродзержин. индустр. ин-т)

К задаче об усилении неравенств типа Джексона

Получены неравенства, являющиеся усилением некоторых неравенств типа Джексона с точной константой.

Доведені нерівності, що є посиленням деяких нерівностей типу Джексона з точною константою.

Пусть L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ таких, что $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$, с нормой

$$\|f\|_p = \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Через L_∞ обозначим пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормо $\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|$.

Обозначим, как обычно, $E(f, \mathfrak{N})_p = \inf\{\|f - \varphi\|_p \mid \varphi \in \mathfrak{N}\}$ — наилучшее приближение функции f множеством $\mathfrak{N}$ в метрике L_p; $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_p = \sup\{E(f, \mathfrak{N})_p \mid f \in \mathfrak{M}\}$ — наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ классом $\mathfrak{N}$ в метрике L_p; $\omega_k(f, \delta)_p = \sup\{\|\Delta_{2t}^k f\|_p \mid |t| < \delta/2\}$ — модуль гладкости функции $f(x)$ порядка k в пространстве L_p, где $\Delta_{2t}^k f(x) = \Delta_{2t}(\Delta_{2t}^{(k-1)} f(x))$, $\Delta_{2t} f(x) = f(x+t) - f(x-t)$; T_{2n-1} — множество всех тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$; $S_{2n,\mu}$ — множество всех сплайнов минимального дефекта порядка μ с $2n$ равноотстоящими узлами; L_p^r — множество всех 2π-периодических функций f, у которых $(r-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на всей оси, а $f^{(r)} \in L_p$; W_p^r — множество всех $f \in L_p^r$, у которых $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$. Положим

$$b_s(p) = b_s(p, \mathfrak{N}) = \left(\frac{E(W_p^s, \mathfrak{N})_p}{K_s}\right)^{1/s} \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $K_s = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(s+1)}/(2\nu+1)^{s+1}$ — константы Фавара.

А. А. Лигун [1] доказал, что если $p = \infty, 1$, а $\mathfrak{N}$ — произвольное подпространство пространства L_p, то для $r = 1, 3, 5, \ldots$ при любом целом $s \geqslant r + 1$

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant \frac{K_r}{2} (b_s(p))^r \omega_1(f^{(r)}, \pi b_s(p))_p, \tag{2}$$

причем эти неравенства являются точными по крайней мере в тех случаях, когда $\mathfrak{N}$ есть T_{2n-1} или $S_{2n,\mu}$ $(\mu \geqslant r)$.

Цель работы — установление неравенств, являющихся усилениями неравенств (2). Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $p = \infty, 1$, а $\mathfrak{N}$ — произвольное подпространство пространства L. Тогда для $r = 1, 3, 5, \ldots$ и любого целого $s \geqslant r + 2$ справедливы неравенства*

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant \frac{K_r}{2} b_s^r(p) \left\{d_r \omega_1(f^{(r)}, \pi b_s(p))_p + (1 - d_r) \frac{1}{2} \omega_2(f^{(r)}, \pi b_s(p))_p\right\}, \tag{3}$$

где K_r — константы Фавара, величины $b_s(p)$ определены равенством (1), *константы d_r — равенствами* (23)—(25). *В частности, для* $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ $d_r = (r+1)(2^{r+1}-1)^{-1}$.

Замечание 1. Ввиду очевидной оценки

$$\omega_2(f^{(r)}, \delta)_p \leqslant 2\omega_1(f^{(r)}, \delta)_p \tag{4}$$

непосредственным следствием (3) оказываются неравенства (2) для $s \geqslant r + 2$. Следовательно, неравенства (3) являются усилением неравенств (2). Указанные в теореме 1 частные значения констант d_r подчеркивают, что усиления, доставляемые неравенствами (3), носят существенный характер.

Известно, что для $p = \infty$, 1 и s, $n = 1, 2, \ldots$

$$E(W_p^s, T_{2n-1})_p = \frac{K_s}{n^s},$$

для $p = \infty$ это установили Фавар [2], Н. И. Ахиезер [3], М. Г. Крейн [4]; а для $p = 1$ — С. М. Никольский [5]. Кроме того, для $p = \infty$, 1 и любых s, $n = 1, 2, \ldots$

$$E(W_p^s, S_{2n,s-1})_p = \frac{K_s}{n^s},$$

для $p = \infty$ этот результат принадежит В. М. Тихомирову [6], а для $p = 1$ — Н. П. Корнейчуку [7], А. А. Лигуну [8]. Значит, в случаях, когда $\mathfrak{N}$ есть T_{2n-1} или $S_{2n,s-1}$,

$$b_s(p) = \frac{1}{n} \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекат такое следствие.

Следствие 1. *Пусть* $p = \infty, 1$; $n = 1, 2, \ldots$; $r = 1, 3, 5, \ldots$; $s \geqslant r + 2$, $s \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ *есть* T_{2n-1} *или* $S_{2n,s-1}$. *Тогда выполняются неравенства*

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant \frac{K_r}{2n^r}\left\{d_r\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p + (1-d_r)\frac{1}{2}\,\omega_2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p\right\}. \tag{6}$$

Отметим, что в случаях, когда $\mathfrak{N}$ есть T_{2n-1} или $S_{2n,s}$, некоторые из подобных неравенств получены в [9], гл. IV, XIII и [10].

Доказательство теоремы 1 базируется на методе, предложенном в [11].

При произвольном $h > 0$ зададим на $[-\pi h/2, \pi h/2]$ последовательность функций $\psi_{h,r}$:

$$\psi_{h,0}(t) = -\frac{1}{\pi h} \quad (|t| < \pi h/2),$$

$$\psi_{h,1}(t) = \begin{cases} 0{,}5\,(1 - 2t/(\pi h)), & t \in (0, \pi h/2], \\ \psi_{h,1}(-t) = -\psi_{h,1}(t), \end{cases}$$

$$\psi_{h,r}(t) = \int_{\gamma_r}^{t} \psi_{h,r-1}(u)\,du,$$

где γ_r $(-0{,}5\pi h \leqslant \gamma_r < 0)$ выбраны так, что $\int_{-\pi h/2}^{\pi h/2} \psi_{h,r}(t)\,dt = 0$. Положим

$$\Psi_{h,r}(t) = \begin{cases} \psi_{h,r}(t), & r = 2\nu + 1, \\ \psi_{h,r}(t) - \psi_{h,r}(\pi h/2), & r = 2\nu, \end{cases}$$

$$A_{h,r} = \int_{-\pi h/2}^{\pi h/2} |\Psi_{h,r}(t)|\,dt, \quad \psi_{h,2\nu} = \psi_{h,2\nu}(\pi h/2).$$

Заметим, что

$$A_{h,r} = h^r A_{1,r}, \quad |\psi_{h,2\nu}| = h^{2\nu-1}|\psi_{1,2\nu}|. \tag{7}$$

Нам потребуются две следующие леммы.

Лемма 1 [11]. *Для произвольного $h > 0$ и $r = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$h^r K_r = A_{h,r} + 2 \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}| h^{r+1-2\nu} K_{r+1-2\nu}.$$

Для введенного в [11] оператора

$$u_{h,r}(f, t) = f(t) + \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} \psi_{h,2\nu} f_{\pi h}^{(2\nu)}(t), \tag{8}$$

где $f_{\pi h}(t)$ — функция Стеклова функции f с шагом πh.

Лемма 2 [11]. *Для любой функции $f \in L_1^r$*

$$u_{h,r}(f, t) = \int_{-\pi h/2}^{\pi h/2} f^{(r)}(t-u) \Psi_{h,r}(u)\, du$$

$$\| u_{h,r}(f, t) \|_p \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2} A_{h,r} \omega_1 (f^{(r)}, \pi h)_p, & r = 1, 3, 5, \ldots, \\ A_{h,r} \| f^{(r)} \|_p, & r = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases} \tag{9}$$

Из соотношения (8) следует

$$f(t) = u_{h,r}(f, t) - \pi h \sum_{\mu=0}^{[(r-1)/2]} \psi_{h,2\mu} f_{\pi h}^{(2\mu)}(t).$$

Меняя здесь r на индекс $r + 1 - 2\nu$, а f на функцию $f_{\pi h}^{(2\nu)}(t)$, имеем

$$f_{\pi h}^{(2\nu)}(t) = u_{h,r+1-2\nu}(f_{\pi h}^{(2\nu)}, t) - \pi h \sum_{\mu=0}^{[(r-2\nu)/2]} \psi_{h,2\mu} f_{\pi h, \pi h}^{(2\nu+2\mu)}(t). \tag{10}$$

Пользуясь этим представлением, из соотношения (8) получаем

$$f(t) = u_{h,r}(f, t) - \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} \psi_{h,2\nu} u_{h,r+1-2\nu}(f_{\pi h}^{(2\nu)}, t) + \\ + (\pi h)^2 \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} \psi_{h,2\nu} \sum_{\mu=0}^{[(r-2\nu)/2]} \psi_{h,2\mu} f_{\pi h, \pi h}^{(2\nu+2\mu)}(t). \tag{11}$$

Отсюда по свойству наилучших приближений получаем

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant E(u_{h,r}(f), \mathfrak{N})_p + \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}| E(u_{h,r+1-2\nu}(f_{\pi h}^{(2\nu)}), \mathfrak{N})_p + \\ + (\pi h)^2 \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}| \sum_{\mu=0}^{[(r-2\nu)/2]} |\psi_{h,2\mu}| E(f_{\pi h, \pi h}^{(2\nu+2\mu)}, \mathfrak{N})_p. \tag{12}$$

Далее имеем

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant \| u_{h,r}(f) \|_p + \pi h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}| \| u_{h,r+1-2\nu}(f_{\pi h}^{(2\nu)}) \|_p + \\ + (\pi h)^2 \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |\psi_{h,2\nu}| \sum_{\mu=0}^{[(r-2\nu)/2]} |\psi_{h,2\mu}| E(f_{\pi h, \pi h}^{(2\nu+2\mu)}, \mathfrak{N})_p. \tag{13}$$

Устанавливая, что

$$f_{\pi h}^{(r+1)}(x) = \frac{1}{\pi h} \Delta_{\pi h} f^{(r)}(x), \tag{14}$$

получаем равенство

$$f_{\pi h,\pi h}^{(r+2)}=\frac{1}{(\pi h)^2}\,\Delta_{\pi h}^2 f^{(r)}\,. \qquad (15)$$

При $r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ в силу леммы 2 имеем

$$\| u_{h,r}(f)\|_p\leqslant\frac{1}{2}A_{h,r}\,\omega_1(f^{(r)},\ \pi h)_p \qquad (16)$$

и, кроме того, учитывая четность $r+1-2\nu$ и равенство (14), получаем

$$\| u_{h,r+1-2\nu}(f_{\pi h}^{(2\nu)})\|_p\leqslant\frac{1}{\pi h}A_{h,r+1-2\nu}\,\omega_1(f^{(r)},\ \pi h)_p. \qquad (17)$$

Из определения (1) следует, что для любой функции $f\in L_p^s$

$$E(f,\ \mathfrak{N})_p\leqslant K_s b_s^s(p)\| f^{(s)}\|_p. \qquad (18)$$

Проводя в (18) замены f на функцию $f_{\pi h,\pi h}^{(2\nu+2\mu)}$, s на индекс $r+2-2\nu-$ -2μ, получаем

$$E(f_{\pi h,\pi h}^{(2\nu+2\mu)},\ \mathfrak{N})_p\leqslant K_{r+2-2\nu-2\mu}b_{r+2-2\nu-2\mu}^{r+2-2\nu-2\mu}(p)\,\| f_{\pi h,\pi h}^{(r+2)}\|_p. \qquad (19)$$

Известно [8] (см. также в [12, с. 129] неравенства (7.1) и (7.4)), что при $p=\infty$, 1 для любого подпространства $\mathfrak{N}\subset L_p$, $r=2,\ 3,\ \ldots$ и $k=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1$

$$\left(\frac{E(W_p^k,\ \mathfrak{N})_p}{K_h}\right)^{1/k}\leqslant\left(\frac{E(W_p^r,\ \mathfrak{N})_p}{K_r}\right)^{1/r},$$

т. е.

$$b_1(p)\leqslant b_2(p)\leqslant\ldots\leqslant b_{s-1}(p)\leqslant b_s(p)\leqslant\ldots\,. \qquad (20)$$

Учитывая этот факт и равенство (15), из (19) выводим

$$E(f_{\pi h,\pi h}^{(2\nu+2\mu)},\ \mathfrak{N})_p\leqslant K_{r+2-2\nu-2\mu}\,b_{r+2}^{r+2-2\nu-2\mu}(p)\,\frac{1}{(\pi h)^2}\,\omega_2(f^{(r)},\ \pi h)_p. \qquad (21)$$

Применяя оценки (16), (17) и (21) к неравенству (13), получаем, что при любом нечетном $r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ и любом $h>0$

$$E(f,\ \mathfrak{N})_p\leqslant\left(\frac{1}{2}A_{h,r}+\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]}|\psi_{h,2\nu}|\,A_{h,r+1-2\nu}\right)\omega_1(f^{(r)},\ \pi h)_p+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]}|\psi_{h,2\nu}|\sum_{\mu=0}^{[(r-2\nu)/2]}|\psi_{h,2\mu}|\,K_{r+2-2\nu-2\mu}b_{r+2}^{r+2-2\nu-2\mu}(p)\,\omega_2(f^{(r)},\ \pi h)_p. \qquad (22)$$

Обозначим

$$B_{h,r}=\frac{1}{2}A_{h,r}+\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]}|\psi_{h,2\nu}|\,A_{h,r+1-2\nu}. \qquad (23)$$

Следовательно, в силу (7)

$$B_{h,r}=h^r B_{1,r}\,. \qquad (24)$$

Константы d_r определим равенством

$$d_r=2B_{1,r}/K_r. \qquad (25)$$

Выбирая в соотношении (22) $h=b_{r+2}(p)$ и затем дважды применяя к нему лемму 1, заключаем с учетом (23)—(25), что для $r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$

$$E(f,\ \mathfrak{N})_p\leqslant\frac{K_r}{2}h^r\left\{d_r\omega_1(f^{(r)},\ \pi h)_p+(1-d_r)\frac{1}{2}\omega_2(f^{(r)},\ \pi h)_p\right\},$$

что вместе с (20) завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $p = \infty$, 1, а $\mathfrak{N}$ — произвольное подпространство пространства L_p. Тогда для $r = 2, 4, 6, \ldots$ и $s \geqslant r + 2$ справедливы неравенства*

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant K_r b_s^r(p) \left\{ \delta_r \| f^{(r)} \|_p + (d_r - \delta_r) \frac{1}{2} \omega_1(f^{(r)}, \pi b_s(p))_p + \right.$$

$$\left. + (1 - d_r) \frac{1}{4} \omega_2(f^{(r)}, \pi b_s(p))_p \right\}, \qquad (26)$$

где величины $b_s(p)$ определены равенством (1), константы d_r — равенствами (23) — (25), K_r — константы Фавара, $\delta_r = A_{1,r}/K_r$, а $A_{1,r}$ — определены равенством (7). Отметим, в частности, что

$$d_2 = \frac{5}{12}, \; d_4 = \frac{11}{75}, \; d_6 = \frac{481}{10\,248}, \; d_8 = \frac{888}{62\,325}, \ldots;$$

$$\delta_2 = \frac{1}{3}, \; \delta_4 = \frac{7}{75}, \; \delta_6 = \frac{31}{1281}, \; \delta_8 = \frac{127}{20\,775}, \ldots.$$

Замечание 2. Учитывая, что $\omega_2(f, \delta)_p \leqslant 2\omega_1(f, \delta)_p$, непосредственным следствием (26) является неравенство

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant K_r b_s^r(p) \left\{ \delta_r \| f^{(r)} \|_p + (1 - \delta_r) \frac{1}{2} \omega_1(f^{(r)}, \pi b_s(p))_p \right\}. \qquad (27)$$

Отсюда, ввиду оценки $\omega_1(f, \delta)_p \leqslant 2 \| f \|_p$, следует

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant K_r b_s^r(p) \| f^{(r)} \|_p. \qquad (28)$$

Таким образом, неравенство (26) является уточнением неравенства Фавара (28), но не служит уточнением неравенства типа Джексона.

Доказательство теоремы 2. При четных $r = 2, 4, 6, \ldots$ в силу леммы 2

$$\| u_{h,r}(f) \|_p \leqslant A_{h,r} \| f^{(r)} \|_p \qquad (29)$$

и, кроме того, учитывая нечетность $r + 1 - 2\nu$ и пользуясь равенством (14), получаем

$$\| u_{h,r+1-2\nu}(f_{\pi h}^{(2\nu)}) \|_p \leqslant \frac{1}{2} A_{h,r+1-2\nu} \omega_1(f_{\pi h}^{(r+1)}, \pi h)_p \leqslant$$

$$\leqslant A_{h,r+1-2\nu} \| f_{\pi h}^{(r+1)} \|_p = \frac{1}{\pi h} A_{h,r+1-2\nu} \| \Delta_{\pi h} f^{(r)} \|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi h} A_{h,r+1-2\nu} \omega_1(f^{(r)}, \pi h)_p. \qquad (30)$$

Используя оценки (29), (30) и (21) в неравенстве (13), получаем, что при любом четном r и любом $h > 0$

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant A_{h,r} \| f^{(r)} \|_p + \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} | \psi_{h,2\nu} | A_{h,r+1-2\nu} \omega_1(f^{(r)}, \pi h)_p +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} | \psi_{h,2\nu} | \sum_{\mu=0}^{[(r-2\nu)/2]} | \psi_{h,2\mu} | K_{r+2-2\nu-2\mu} b_{r+2}^{r+2-2\nu-2\mu}(p) \, \omega_2(f^{(r)}, \pi h)_p. \qquad (31)$$

Выбирая в соотношении (31) $h = b_{r+2}(p)$ и затем дважды применяя к нему лемму 1, заключаем с учетом определения констант d_r и δ_r, что для четных $r = 2, 4, 6, \ldots$

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant K_r h^r \left\{ \delta_r \| f^{(r)} \|_p + (d_r - \delta_r) \frac{1}{2} \omega_1(f^{(r)}, \pi h)_p + \right.$$

$$\left. + (1 - d_r) \frac{1}{4} \omega_2(f^{(r)}, \pi h)_p \right\}, \qquad (32)$$

что вместе с (20) завершает доказательство теоремы 2.

В силу (5) из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 2. *Пусть* $p=\infty$, 1; $n=1, 2, \dots$; $r=2, 4, 6, \dots$, $s \geqslant r+2$, $s \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ *есть* T_{2n-1} *или* $S_{2n,s-1}$. *Тогда выполняются неравенства*

$$E(f, \mathfrak{N})_p \leqslant \frac{K_r}{n^r}\left\{\delta_r \| f^{(r)} \|_p + (d_r-\delta_r)\frac{1}{2}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p + (1-d_r)\frac{1}{4}\omega_2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p\right\}.$$

1. *Лигун А. А.* О точных константах в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки.— 1985.— 38, № 2.— С. 248—256.
2. *Favard J.* Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. Sci. Math.— 1937.—**61**.— P. 209—224; 243—256.
3. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН СССР.— 1938.— **18**, № 4/5.— С. 241—244.
4. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Там же.— С. 245—251.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— **10**, № 3.— С. 81—120.
6. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.— 1960.— **15**, № 3.— С. 81—120.
7. *Korneĭčuk N. P.* Exact error bound of approximation by interpolating splines in L-metric on the classes W_p^r $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions // Anal. Math.— 1977.— **3**, N 2.— P. 109—117.
8. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Ibid.— 1976.— **2**, N 1.— P. 11—20.
9. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. — Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982.— 366 с.
10. *Доронин В. Г.* К вопросу об усилении неравенств типа Джексона // Приближение функций полиномами и сплайнами и суммирование рядов.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1990.— С. 24—30.
11. *Лигун А. А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки.— 1973.— **14**, вып. 1.— С. 21—30.
12. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями.— Киев: Наук. думка, 1982.— 250 с.

Получено 29.12.91