УДК 517.955

С. В. Жестков, Е. А. Ермолаев, кандидаты физ.-мат. наук
(Могилев. отд-ние Ин-та физики АН Беларуси)

Об одном алгебраическом способе исследования устойчивости линейных нормальных систем в частных производных

Выделены классы линейных нормальных систем в частных производных, для которых могут быть получены достаточные коэффициентные условия устойчивости нулевого решения задачи Коши. Реализация этой возможности основана на использовании в рамках модифицированного метода мажорант n-мерных гиперкомплексных чисел с ассоциативно-коммутативным умножением.

Виділені класи лінійних нормальних систем у частинних похідних, для яких можуть бути одержані достатні коефіцієнтні умови стійкості нульового розв'язку задачі Коші. Реалізація цієї можливості основана на використанні в рамках модифікованого методу мажорант n-вимірних гіперкомплексних чисел з асоціативно-комутативним множенням.

В последние годы различным абстрактным и конструктивным вариантам линейной и нелинейной теоремы Коши — Ковалевской посвящено значительное число публикаций (см., например, [1—6]), характерной чертой которых является локальная постановка задачи Коши, восходящая к известным работам С. В. Ковалевской. Для некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих существование глобальных по t решений, в монографии [7] проведены исследования устойчивости по двум мерам соответствующих краевых задач. В настоящей работе выделяются классы линейных нормальных систем в частных производных, для которых удается получить достаточные коэффициентные условия устойчивости задачи Коши. При этом используется теория гиперкомплексных числовых систем.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{l} C_k(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = A(t, x) u + f(t, x), \ u \in R^n, \tag{1}$$

$$u|_{t=t_0} = \psi(x), \ G = \{t, x : t \geqslant 0, \ \|x\| \leqslant Q\}, \tag{2}$$

где $t_0 \geqslant 0$, $Q > 0$. Под нормой вектора (матрицы) понимаются величины

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant l} |x_k|, \ \|u\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|, \ \|A\| = \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{si}|.$$

Относительно $n \times n$-матриц $A(t, x)$, $C_k(t, x)$ и векторов $f(t, x)$, $\psi(x)$ будем предполагать, что в области G они непрерывны по t и аналитичны по x, причем компоненты векторов $f_i(t, x)$, $\psi_i(x)$ имеют следующие мажоранты (ср. с [8]):

$$\frac{\rho_i(t)}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)}, \quad \frac{\gamma_i}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)} \quad (\|x\| \leqslant Q_0 < Q),$$

где

$$\rho_i(t) \equiv \max_{\|x\| \leqslant Q} |f_i(t,x)|, \quad \gamma_i \equiv \max_{\|x\| \leqslant Q} |\Psi_i(x)|, \quad i = \overline{1, n};$$

$\rho_i(t)$ непрерывны и ограничены на $[0, \infty)$. Точнее говоря, предполагаем, что элементы матриц $A(t, x)$, $C_k(t, x)$ и компоненты векторов $f(t, x)$, $\psi(x)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Маклорена по x в области $t \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant Q$.

Определение. *Нулевое решение однородной системы* (1) *будем называть устойчивым относительно указанного класса начальных* $\psi(x)$ *и внешних* $f(t, x)$ *возмущений, если для каждого решения задачи* (1), (2) *и при любом* $t_0 \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\|u(t, x)\| \leqslant \mathcal{J}_1 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i + \mathcal{J}_2 \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} \rho_i(t)\, dt, \quad t \geqslant t_0, \ \|x\| \leqslant Q,$$

где $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ *— положительные постоянные, не зависящие от выбора решения* $u(t, x)$.

Заметим, что величина

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} \rho_i(t)\, dt < \infty$$

представляет собой меру внешних постоянно действующих возмущений *.

Очевидно, в данном определении содержится основное требование устойчивости по Ляпунову, при котором малые возмущения вызывают и малые отклонения от невозмущенного (в данном случае тривиального) решения на всем временном интервале $[t_0, \infty)$.

Перепишем задачу (1), (2) в интегральной форме

$$u(t, x) = \psi(x) + \int_{t_0}^{t} \left\{ Au + \sum_{k=1}^{l} C_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + f(\tau, x) \right\} d\tau. \tag{3}$$

---

* Ivo Vrkoch. Интегральная устойчивость // Чехословацкий мат. журнал.— 1959.— 9 (84), № 1.— С. 71—129.

Формальное решение уравнения (3) можно представить в виде [6]

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t, x),$$

$$u_0(t, x) = \psi(x) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\, d\tau, \quad u_{i+1}(t, x) = \int_{t_0}^{t} \left\{ Au_i + \sum_{k=1}^{l} C_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\} d\tau. \qquad (4)$$

В силу сделанных выше предположений для всех элементов матриц $A(t, x)$, $C_k(t, x)$ стандартным образом [9, 10] можно построить аналитические по x мажоранты

$$a_{ij}(t, x) \ll \frac{\alpha_{ij}(t)}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)},$$

$$c_{ij}^{(k)}(t, x) \ll \frac{c_{ij}^{(k)}(t)}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)} \ll$$

$$\ll \frac{c_{ij}^{(k)}(t)}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{x_k}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)^2}, \qquad (5)$$

$$\| x \| \leqslant Q_0 < Q; \ i, \ j = \overline{1, n},$$

где $\alpha_{ij}(t)$, $c_{ij}^{(k)}(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0, \infty)$, неотрицательные функции. Отличие от классических мажорант заключается в том, что числители правых частей формул (5) являются функциями от t, а не постоянными.

Основное свойство аналитических мажорант выражается неравенством

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} a_{ij}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}} \right| \leqslant \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{|\beta|}} \left[\frac{\alpha_{ij}(t)}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)} \right],$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{|\beta|}} \equiv \frac{\partial^{\beta_1 + \cdots + \beta_l}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_l^{\beta_l}}, \quad |\beta| = 0, 1, 2, \ldots; \quad t \geqslant 0, \quad \| x \| \leqslant Q_0.$$

Заменяя в правых частях равенств (4) компоненты векторов $\psi(x)$, $f(\tau, x)$ и элементы матриц $A(\tau, x)$, $C_k(\tau, x)$ построенными мажорантами и обозначая полученные вектор-функции через $z_0(t, x)$ и $z_{i+1}(t, x)$ соответственно, находим с учетом основного свойства мажорант, что

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} u_0^{(s)}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}} \right| \leqslant \frac{\partial^{|\beta|} z_0^{(s)}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}}, \quad \left| \frac{\partial^{|\beta|} u_{i+1}^{(s)}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}} \right| \leqslant \frac{\partial^{|\beta|} z_{i+1}^{(s)}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}}$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} u^{(s)}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}} \right| \leqslant \frac{\partial^{|\beta|} z^{(s)}(t, x)}{\partial x^{|\beta|}}, \quad |\beta| = 0, 1, 2, \ldots; \quad s = \overline{1, n}.$$

Таким образом, можно построить вектор $z(t, x)$, который покомпонентно мажорирует решение задачи (1), (2).

О п р е д е л е н и е. *Система дифференциальных уравнений вида*

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{k=1}^{l} M_k(t, x) \frac{\partial z}{\partial x_k} = N(t, x) z + H(t, x), \quad z \in R^n, \qquad (6)$$

$$z|_{t=t_0} = \Gamma(x) \qquad (7)$$

называется мажорантной для задачи (1), (2), *если элементы матриц* $M_k(t, x)$, $N(t, x)$ *и компоненты векторов* $H(t, x)$, $\Gamma(x)$ *являются аналитическими по* x *и непрерывными по* t *мажорантами соответствующих элементов матриц* $C_k(t, x)$, $A(t, x)$ *и соответствующих компонент векторов* $f(t, x)$, $\psi(x)$.

Очевидно, для задачи (1), (2) нетрудно построить множество мажорантных систем. Поэтому проблема состоит в том, чтобы указать такую мажорантную систему, которую можно было бы проинтегрировать в замкнутом виде.

Для этого рассмотрим $n \times n$-матрицы вида

$$Z = \{z_{kl}\} \doteq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_j, \tag{8}$$

где λ_j — собственные значения $Z(\lambda_j, z_{kl} \in R;\ k,\ l = \overline{1, n})$; матрицы $\rho_j = \{\rho_{jkl}\}$ с элементами

$$\rho_{jkl} = \frac{2}{n+1} \sin\frac{jk\pi}{n+1} \sin\frac{jl\pi}{n+1} \tag{9}$$

обладают в силу равенства (см. [11, с. 641], 4.4.4.1,2).

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{ik\pi}{n+1} \sin\frac{jk\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2}\delta_{ij} \quad (j,\ i = \overline{1, n})$$

проективными свойствами

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j = I, \quad \rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i = \delta_{ij}\rho_i. \tag{10}$$

Здесь I — единичная $n \times n$-матрица; δ_{ij} — символ Кронекера.

Введенные матрицы (8) можно трактовать и как n-мерные гиперкомплексные числа

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i, \tag{11}$$

у которых компоненты z_i и базисные единицы $e_i = \{e_{ikl}\}$ $(e_1 = I)$ связаны с λ_j и ρ_i формулами

$$z_i = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin\frac{j\pi}{n+1} \sin\frac{ij\pi}{n+1},$$

$$\lambda_j = \frac{1}{\sin\frac{j\pi}{n+1}} \sum_{i=1}^{n} z_i \sin\frac{ij\pi}{n+1}, \tag{12}$$

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j \sin\frac{ij\pi}{n+1}}{\sin\frac{j\pi}{n+1}},$$

$$\rho_j = \frac{2}{n+1} \sin\frac{j\pi}{n+1} \sum_{i=1}^{n} e_i \sin\frac{ij\pi}{n+1}.$$

Отсюда и из (8) — (11) находим, что

$$e_{ikl} = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin\frac{ij\pi}{n+1} \sin\frac{kj\pi}{n+1} \sin\frac{lj\pi}{n+1}}{\sin\frac{j\pi}{n+1}}, \tag{13}$$

$$e_k e_l = e_l e_k = \sum_{i=1}^{n} e_i e_{ikl}, \tag{14}$$

$$z_{kl} = z_{lk} = z_{(n-l+1)(n-k+1)} = \sum_{i=1}^{n} z_i e_{ikl} = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{jl\pi}{n+1}. \tag{15}$$

Согласно (9), (13), (15) матрицы ρ_j, e_i, Z симметричны относительно обеих своих больших диагоналей.

Из (8) и (10) вытекает также равенство

$$Z^p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p \rho_j,$$

где $p = 1, 2, \ldots$ или $p = 0, -1, -2, \ldots$, если* все $\lambda_j \neq 0$. В итоге оказывается справедливым соотношение (вариант формулы Сильвестра)

$$f(Z) = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)\, \rho_j. \tag{16}$$

для произвольной аналитической функции $f(Z)$ аргумента Z вида (11)—(15).

При фиксированном n совокупность рассматриваемых Z образует коммутативное кольцо без нильпотентных элементов, которое мы обозначим через $\mathbf{S}_n$. При этом $\mathbf{S}_1 = R$, а S_2 изоморфно алгебре двойных чисел [13]. В случае же $n = 3$ имеем

$$Z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \lambda_3 \rho_3 = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_1 + z_3 & z_2 \\ z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}; \tag{17}$$

$$\lambda_1 = z_1 + \sqrt{2} z_2 + z_3, \quad z_1 = \frac{1}{4}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3),$$

$$\lambda_2 = z_1 - z_3, \quad z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1 - \lambda_3),$$

$$\lambda_3 = z_1 - \sqrt{2} z_2 + z_3; \quad z_3 = \frac{1}{4}(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3);$$

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(e_1 + \sqrt{2} e_2 + e_3), \ e_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = I,$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3), \quad e_2 = \sqrt{2}(\rho_1 - \rho_3),$$

$$\rho_3 = \frac{1}{4}(e_1 - \sqrt{2} e_2 + e_3), \quad e_3 = \rho_1 - \rho_2 + \rho_3;$$

где базисные единицы e_i подчиняются таблице умножения

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$e_1 + e_3$	e_2
e_3	e_3	e_2	e_1

,

* Это ограничение можно снять, положив [12]

$$\lambda^0 = \begin{cases} 1, & \lambda \neq 0; \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases} \quad \lambda^{-1} = \begin{cases} 1/\lambda, & \lambda \neq 0; \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases} \quad (\lambda \in C).$$

сходной по виду с матрицей (17). В силу (14), (15) подобное сходство имеет место и для произвольного n.

Для наглядности применения n-мерных чисел к изучению устойчивости задачи Коши построим пример интегрируемой мажорантной системы 3-го порядка ($n = 3$), используя 3-мерные гиперкомплексные числа. Отметим, что изложение подхода для произвольного, но не конкретно заданного n, не может быть проведено из-за того, что коэффициенты при λ_j в формуле (15) будут параметрами, а не числами, и поэтому структура матрицы Z будет неизвестна.

Промажорируем элементы матриц $A(t, x)$, $C_k(t, x)$ и векторов $f(t, x)$, $\psi(x)$ следующим образом:

$$A(t, x) \ll \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)} \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \alpha_2(t) & \alpha_1(t) + \alpha_3(t) & \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) & \alpha_2(t) & \alpha_1(t) \end{bmatrix} \equiv N(t, x),$$

$$C_k(t, x) \ll \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{x_k}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ c_2(t) & c_1(t) + c_3(t) & c_2(t) \\ c_3(t) & c_2(t) & c_1(t) \end{bmatrix} \equiv M_k(t, x),$$

$$(t, x) \ll \operatorname{colon} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)} [\rho_1(t), \ \rho_2(t), \ \rho_3(t)] \right\} \equiv H(t, x),$$

$$\psi(x) \ll \operatorname{colon} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)} [\gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3] \right\} \equiv \Gamma(x),$$

где $\alpha_i(t)$, $c_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$) непрерывны и ограничены на $[0, \infty)$; $\rho_i(t)$, γ_i определены выше. В силу сделанных предположений такое мажорирование всегда выполнимо. Поэтому искомая мажорантная система принимает вид

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial t} - \sum_{k=1} M_k(t, x) \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_k} = N(t, x) \vec{z} + \vec{H}(t, x), \quad \vec{z} \in R^3, \tag{18}$$

$$\vec{z}\,|_{t=t_0} = \vec{\Gamma}(x), \quad (\vec{z} \equiv \operatorname{colon}[z_1, \ z_2, \ z_3]). \tag{19}$$

Ее можно также получить, подставив 3-мерные гиперкомплексные числа

$$\begin{gathered} \vec{z}(t, x) = z_1(t, x) e_1 + z_2(t, x) e_2 + z_3(t, x) e_3, \\ \vec{\alpha}(t) = \alpha_1(t) e_1 + \alpha_2(t) e_2 + \alpha_3(t) e_3, \\ \vec{c}(t) = c_1(t) e_1 + c_2(t) e_2 + c_3(t) e_3, \\ \vec{\rho}(t) = \rho_1(t) e_1 + \rho_2(t) e_2 + \rho_3(t) e_3, \\ \vec{\gamma} = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3. \end{gathered} \tag{20}$$

вместо функций $z(t, x)$, $\alpha(t)$, $c(t)$, $\rho(t)$, γ в скалярное уравнение и начальное условие:

$$\frac{\partial z}{\partial t}-\sum_{k=1}^{l}\frac{c(t)}{\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x_k}{Q}\right)\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2}\frac{\partial z}{\partial x_k}=$$

$$=\frac{\alpha(t)\,z}{\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)}+\frac{\rho(t)}{\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)}, \qquad (21)$$

$$z|_{t=t_0}=\frac{\gamma}{\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)} \qquad (22)$$

и приравняв коэффициенты при e_1, e_2, e_3. Поэтому решение задачи (18), (19) можно найти подстановкой величин $\vec{z}(t, x)$, $\vec{\alpha}(t)$, $\vec{c}(t)$, $\vec{\rho}(t)$, $\vec{\gamma}$ из (20) в решение скалярной задачи (21), (22), имеющее вид

$$z(t,x)=\frac{\gamma\exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\alpha(\tau)\,d\tau}{\left[\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2-\frac{2l}{Q}\int\limits_{\tau}^{t}c(s)\,ds\right]^{1/2}}\right\}}{\left[\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2-\frac{2l}{Q}\int\limits_{t_0}^{t}c(s)\,ds\right]^{1/2}}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left\{\int\limits_{s}^{t}\frac{\alpha(\tau)\,d\tau}{\left[\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2-\frac{2l}{Q}\int\limits_{\tau}^{t}c(\theta)\,d\theta\right]^{1/2}}\right\}\times$$

$$\times\frac{\rho(s)\,ds}{\left[\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2-\frac{2l}{Q}\int\limits_{s}^{t}c(\theta)\,d\theta\right]^{1/2}},$$

и последующим применением формулы (16). Для примера рассмотрим вычисление квадратного корня из выражения

$$\frac{1}{\left[\left(1-\frac{x_1}{Q}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x_l}{Q}\right)^2-\frac{2l}{Q}\int\limits_{t_0}^{t}\vec{c}(s)\,ds\right]^{1/2}}\equiv\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(t,\ t_0,\ x)\,e_i,$$

которое определяет условие существования глобального по t решения. Согласно формуле (16) имеем

$$\varphi_1(t,\ t_0,\ x)\equiv\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{2}{\sqrt{\lambda_2}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right),$$

$$\varphi_2(t,\ t_0,\ x)\equiv\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right),$$

$$\varphi_3(t,\ t_0,\ x)\equiv\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{2}{\sqrt{\lambda_2}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right),$$

где

$$\lambda_1(t,\ t_0,\ x)=R(x)-\frac{2l}{Q}\int\limits_{t_0}^{t}\{c_1(s)+\sqrt{2}c_2(s)+c_3(s)\}\,ds,$$

$$\lambda_2(t,\ t_0,\ x)=R(x)-\frac{2l}{Q}\int\limits_{t_0}^{t}\{c_1(s)-c_3(s)\}\,ds,$$

$$\lambda_3(t, t_0, x) = R(x) - \frac{2l}{Q}\int_{t_0}^{t}\{c_1(s) - \sqrt{2}c_2(s) + c_3(s)\}\,ds,$$

$$R(x) \equiv \left(1 - \frac{x_1}{Q}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)^2.$$

Очевидно, при выполнении условия

$$\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2l} - \frac{2l}{Q}\int_{0}^{\infty}\{c_1(s) + \sqrt{2}c_2(s) + c_3(s)\}\,ds \geqslant \delta > 0, \qquad (23)$$

где δ — малое фиксированное число, функции $\varphi_i(t, t_0, x)$ будут определены в области $t \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant Q_0 < Q$. Вычисление экспонент, например,

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\tau)\,e_i\cdot\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(t, \tau, x)\,e_i d\tau\right\},$$

производится аналогичным образом и не приводит к дополнительным ограничениям на коэффициенты мажорантной системы.

Таким образом, окончательное выражение для решения задачи (18), (19) имеет вид

$$z_1(t, x) = \varphi_1(t, t_0, x)\,\Pi_1(t, t_0, x) + \varphi_2(t, t_0, x)\,\Pi_2(t, t_0, x) +$$
$$+ \varphi_3(t, t_0, x)\,\Pi_3(t, t_0, x) + \int_{t_0}^{t}\{L_1(t, s, x)\,H_1(t, s, x) +$$
$$+ L_2(t, s, x)\,H_2(t, s, x) + L_3(t, s, x)\,H_3(t, s, x)\}\,ds,$$

$$z_2(t, x) = \varphi_1(t, t_0, x)\,\Pi_2(t, t_0, x) + \varphi_2(t, t_0, x)\,(\Pi_1(t, t_0, x) + \Pi_3(t, t_0, x)) +$$
$$+ \varphi_3(t, t_0, x)\,\Pi_2(t, t_0, x) + \int_{t_0}^{t}\{L_1(t, s, x)\,H_2(t, s, x) +$$
$$+ L_2(t, s, x)\,(H_1(t, s, x) + H_3(t, s, x)) + L_3(t, s, x)\,H_2(t, s, x)\}\,ds,$$

$$z_3(t, x) = \varphi_1(t, t_0, x)\,\Pi_3(t, t_0, x) + \varphi_2(t, t_0, x)\,\Pi_2(t, t_0, x) +$$
$$+ \varphi_3(t, t_0, x)\,\Pi_1(t, t_0, x) + \int_{t_0}^{t}\{L_1(t, s, x)\,H_3(t, s, x) +$$
$$+ L_2(t, s, x)\,H_2(t, s, x) + L_3(t, s, x)\,H_1(t, s, x)\}\,ds,$$

где

$$L_1(t, t_0, x) = \frac{1}{4}\Big[\exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) + \sqrt{2}\Gamma_2(t, t_0, x) + \Gamma_3(t, t_0, x)\} +$$
$$+ 2\exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) - \Gamma_3(t, t_0, x)\} +$$
$$+ \exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) - \sqrt{2}\Gamma_2(t, t_0, x) + \Gamma_3(t, t_0, x)\}\Big],$$

$$L_2(t, t_0, x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,[\exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) + \sqrt{2}\Gamma_2(t, t_0, x) + \Gamma_3(t, t_0, x)\} -$$
$$- \exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) - \sqrt{2}\Gamma_2(t, t_0, x) + \Gamma_3(t, t_0, x)\}],$$

$$L_3(t, t_0, x) = \frac{1}{4}\,[\exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) + \sqrt{2}\Gamma_2(t, t_0, x) + \Gamma_3(t, t_0, x)\} -$$
$$- 2\exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) - \Gamma_3(t, t_0, x)\} + \exp\{\Gamma_1(t, t_0, x) -$$
$$- \sqrt{2}\Gamma_2(t, t_0, x) + \Gamma_3(t, t_0, x)\}],$$

$$\Gamma_1(t, t_0, x) = \int_{t_0}^{t} \{\varphi_1(t, \tau, x)\alpha_1(\tau) + \varphi_2(t, \tau, x)\alpha_2(\tau) + \varphi_3(t, \tau, x)\alpha_3(\tau)\} d\tau,$$

$$\Gamma_2(t, t_0, x) = \int_{t_0}^{t} \{\varphi_1(t, \tau, x)\alpha_2(\tau) + \varphi_2(t, \tau, x)(\alpha_1(\tau) + \alpha_3(\tau)) + \\ + \varphi_3(t, \tau, x)\alpha_2(\tau)\} d\tau,$$

$$\Gamma_3(t, t_0, x) = \int_{t_0}^{t} \{\varphi_1(t, \tau, x)\alpha_3(\tau) + \varphi_2(t, \tau, x)\alpha_2(\tau) + \varphi_3(t, \tau, x)\alpha_1(\tau)\} d\tau,$$

$$\Pi_1(t, t_0, x) = \gamma_1 L_1(t, t_0, x) + \gamma_2 L_2(t, t_0, x) + \gamma_3 L_3(t, t_0, x),$$

$$\Pi_2(t, t_0, x) = \gamma_1 L_2(t, t_0, x) + \gamma_2(L_1(t, t_0, x) + L_3(t, t_0, x)) + \gamma_3 L_2(t, t_0, x),$$

$$\Pi_3(t, t_0, x) = \gamma_1 L_3(t, t_0, x) + \gamma_2 L_2(t, t_0, x) + \gamma_3 L_1(t, t_0, x),$$

$$H_1(t, s, x) = \rho_1(s)\varphi_1(t, s, x) + \rho_2(s)\varphi_2(t, s, x) + \rho_3(s)\varphi_3(t, s, x),$$

$$H_2(t, s, x) = \rho_1(s)\varphi_2(t, s, x) + \rho_2(s)(\varphi_1(t, s, x) + \varphi_3(t, s, x)) + \\ + \rho_3(s)\varphi_2(t, s, x),$$

$$H_3(t, s, x) = \rho_1(s)\varphi_3(t, s, x) + \rho_2(s)\varphi_2(t, s, x) + \rho_3(s)\varphi_1(t, s, x).$$

Т е о р е м а. *Пусть $n = 3$ и выполнены неравенства* (23),

$$\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2l} - \frac{2l}{Q}\int_0^{\infty} \{c_1(s) + \sqrt{2}\, c_2(s) + c_3(s)\} ds \geqslant \delta > 0$$

и

$$\int_0^{\infty} \alpha_i(\tau) d\tau < \infty, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Тогда нулевое решение однородной задачи (1), (2) *устойчиво в указанном смысле.*

З а м е ч а н и е. Аналогичным образом строится мажорантная система произвольного n-го порядка. При этом выражение

$$\frac{1}{\left[\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{x_l}{Q}\right)^2 - \frac{2l}{Q}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n} c_i(s) e_i ds\right]^{1/2}} \equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t, t_0 x) e_i$$

вычисляется по формуле (16). Требование положительности всех $\lambda_j(t, t_0, x)$ $(j = \overline{1, n})$ приводит к неравенству

$$\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2l} - \frac{2l}{Q}\int_0^{\infty}\left\{c_1(s) + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[c_2(s)\sin\frac{2\pi}{n+1} + c_3(s)\sin\frac{3\pi}{n+1} + \ldots + c_n(s)\cdot\sin\frac{\pi n}{n+1}\right]\right\} ds \geqslant \delta > 0, \tag{24}$$

где δ — малое фиксированное число. Выполнение (24) будет достаточным для положительности всех λ_j в силу справедливости неравенства

$$\frac{\sin\frac{\pi i j}{n+1}}{\sin\frac{\pi j}{n+1}} \leqslant \frac{\sin\frac{\pi i}{n+1}}{\sin\frac{\pi}{n+1}} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Вектор-функцию $z(t, x)$ и построенную мажорантную систему можно рассматривать как аналоги вектор-функции сравнения и системы сравнения, используемых в теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений [14].

1. *Wolfgang W*. An elementary proof of the Cauchy-Kowalevsky Theorem // Amer. Math. Mon. — 1985.— **92**, N 2.— P. 115—126.
2. *Tutschke W*. On an abstract nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem — a variant of L. Nirenberg's and T. Nishida's proof // Z. Anal. und Anwend.— 1986.— **5**, N 2.— P. 185—192.
3. *Begehr H*. Eine bemerkung zum nichtlinearen klassischen satz von Cauchy-Kowalewski // Math. Nachr.— 1987.— **131**.— P. 175—181.
4. *Забрейко П. П., Макаревич Т. А*. Об одном обобщении принципа Банаха— Каччиопполи на операторы в псевдометрических пространствах // Дифференц. уравнения.— 1987. — **23**, № 9.— С. 1497—1504.
5. *Asano K*. A note on the abstract Cauchy-Kowalewski theorem // Proc. Jap. Acad.— 1988.— **A64**, N 4.— P. 102—105.
6. *Жестков С. В., Лаптинский В. Н*. О некоторых оценках решения задачи Коши для общих нормальных систем в частных производных // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук.— 1988.— № 2.— С. 107—110.
7. *Сиразетдинов Т. К*. Устойчивость систем с распределенными параметрами.— Новосибирск : Наука, 1987.— 232 с.
8. *Пуанкаре А*. Избранные труды в трех томах. Т. 1. Новые методы небесной механики.— М. : Наука, 1971.— 772 с.
9. *Петровский И. Г*. Лекции об уравнениях с частными производными.— М. : Физматгиз, 1961.— 400 с.
10. *Демидов Г. В*. Некоторые приложения обобщенной теоремы Ковалевской // Численные методы механики сплошной среды. Информационный бюллетень.— 1970.— **1**, № 2.— С. 10—32.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И*. Интегралы и ряды.— М. : Наука, 1981.— 800 с.
12. *Ермолаев Е. А*. Коммутативное обращение и нулевая степень вырожденной матрицы.— Минск, 1989.— 14 с. (Препринт / АН БССР. Институт физики; № 552).
13. *Кантор И. Л., Солодовников А. С*. Гиперкомплексные числа.— М. : Наука, 1973.— 144 с.
14. *Метод* векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова.— М. : Наука, 1987.— 312 с.

Получено 15.01.90