УДК 519.21

О. М. Кузнецова, канд. физ.-мат. наук (Ин-т химии поверхности АН Украины, Киев)

О продолжении положительно определенных функций на шаре в бесконечномерной сфере

Показано, что у каждой положительно определенной функции на шаре в бесконечномерной сфере существует, причем единственное, положительно определенное продолжение на всю сферу.

Показано, що у кожної додатно визначеної функції на кулі в нескінченновимірній сфері існує, причому єдине, додатно визначене продовження на всю сферу.

М. Г. Крейн в 1940 году [1] доказал существование продолжения положительно определенного ядра, зависящего от разности аргументов, с отрезка действительной прямой на всю прямую. Этот результат способствовал интенсивному развитию теории продолжения положительно определенных ядер в векторных пространствах, зависящих от разностей аргументов. Для конечномерных пространств соответствующие факты о продолжении изложены в [2], где приведена и подробная библиография. Ю. М. Березанский [3] доказал существование продолжения положительно определенного ядра, зависящего от разности аргументов, со слоя в гильбертовом пространстве на все гильбертово пространство.

Вместе с тем интерес представляют задачи продолжения положительно определенных функций на метрических (не обязательно векторных) пространствах. Непрерывная действительная функция $F(r)$ действительной переменной называется положительно определенной функцией на метрическом (семиметрическом, квазиметрическом) пространстве (T, ρ), если функция $F(\rho(t, s))$, $t, s \in T$, является положительно определенным ядром на $T \times T$.

Классическими результатами теории положительно определенных функций являются полученные Шенбергом [4] представления положительно определенных функций на n-мерном евклидовом пространстве R^n и на сепарабельном гильбертовом пространстве H, а также полученные им же [5] представления положительно определенных функций на единичной сфере S_n в R^n и на единичной сфере S_∞ в H с угловым расстоянием в качестве метрики. Позже М. Г. Крейн [6] получил представления положительно определенных функций на конечномерном пространстве Лобачевского L_n и сепарабельном пространстве Лобачевского L_∞ (доказательство последнего результата приведено в [7]).

Проблемам продолжения положительно определенной функции с шара в метрическом пространстве на все пространство посвящены работы Рудина [8] и Насбаума [9]. Рудин показал, что положительно определенная функция на шаре в R^n допускает продолжение на все R^n. Позже Насбаум получил тот же результат для L_n. Отсюда следует, что положительно определенная функция на шаре в H (L_∞) также допускает продолжение на H (L_∞).

В настоящей работе получен результат о существовании и единственности продолжения положительно определенной функции на шаре в S_∞ до положительно определенной функции на S_∞. Метод, которым этот результат получен, основан на представлении положительно определенных ядер на $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — декартово произведение произвольного множества M на S_∞ $(\mathfrak{F} = M \times S_\infty)$, инвариантных относительно вращений S_∞ (теорема 1). Доказательство теоремы 1 опирается на предложенное и исследованное С. Берманом [10] ортогональное разложение изотропного случайного поля на S_∞.

Указанный метод позволяет также получать представления положительно определенных функций на H и L_∞ (а также на шарах в этих пространствах), сводя эту задачу к известной: получению представлений положительно определенных функций на отрезке действительной прямой с семиметрикой $\mu(x, y) = x + y$. Такие представления описываются теоремой С. Н. Бернштейна [2]: непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такая, что $f(x + y)$ — положительно определенное ядро на $[a/2, b/2] \times [a/2, b/2]$, допускает представление

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} d\Phi(\lambda),$$

где $\Phi(\lambda)$ — неубывающая функция на $(-\infty, \infty)$. Особо выделим следствие этой теоремы: если $[a, b] = [0, \infty)$ и $f(x)$ ограничена, то $f(x)$ допускает представление

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0, \infty)$.

Назовем системой сфер $\mathfrak{F}$ декартово произведение $\mathfrak{F} = M \times S_\infty$, где M — произвольное множество, а S_∞ — единичная сфера в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\mathfrak{F} = \{t = (r_t;\ \alpha_t) : r_t \in M,\ \alpha_t \in S_\infty\}.$$

Приведем примеры множеств, являющихся системами сфер.

1. Гильбертово пространство с удаленным центром O: $\widetilde{H} = H/\{O\}$. Введем на $\widetilde{H}$ полярные координаты, записывая $t \in H$ в виде $t = (r_t; \alpha_t)$, где

$r_t = \|t\|$, $\alpha_t = t/r_t$. При этом $H = (0, \infty) \times S_\infty$. Расстояние $r(t, s)$ между точками t и s из S_∞, записанными в полярных координатах, выражается формулой

$$r(t, s) = (r_t^2 + r_s^2 - 2r_t r_s (\alpha_t, \alpha_s))^{1/2}. \tag{1}$$

Для $r > 0$ множество $G(r) = \{t \in \widetilde{H} : r_t = r\}$ является сферой в H с центром в точке O и радиусом r, что позволяет рассматривать $\widetilde{H}$ как объединение сфер $\widetilde{H} = \bigcup_{r \in (0, \infty)} G(r)$.

Подобным образом $\mathfrak{F}$ можно представить в виде $\mathfrak{F} = \bigcup_{r \in M} G(r)$, где $G(r) = \{t = (r; \alpha), \alpha \in S_\infty\}$, что объясняет в некоторой мере выбор названия «система сфер».

2. Шар в H радиуса R с удаленным центром 0, т. е. множество $V_R = \{t \in \widetilde{H}: r_t \leqslant R\}$. Введение в $\widetilde{H}$ полярных координат позволяет записать V_R в виде $V_R = (0, R] \times S_\infty$. Расстояние между точками V_R также определяется формулой (1).

3. Сепарабельное пространство Лобачевского с удаленным полюсом. Сепарабельным пространством Лобачевского называется [6] множество бесконечномерных векторов $t = \{t_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ таких, что $t_0 > 0$, $-t_0^2 + \Sigma_{k \geq 1} t_k^2 = -1$, с расстоянием $r(t, s)$ между точками t и s из L_∞, определяемым формулой

$$\operatorname{ch} r(t, s) = t_0 s_0 - \sum_{k \geqslant 1} t_k s_k. \tag{2}$$

Точка $P = (1, 0, 0, \ldots)$ называется полюсом L_∞. В $\widetilde{L}_\infty = L_\infty / \{P\}$ введем полярные координаты: $t \in \widetilde{L}_\infty$ запишем в виде $t = (r_t; \alpha_i)$, где r_t — полярный радиус t, т. е. расстояние от t до P: $\operatorname{ch} r_t = \operatorname{ch} r(t, P) = t_0$, а $\alpha_t = (t_1, t_2, \ldots)/\left(\sum_{k \geqslant 1} t_k^2\right)^{1/2}$. Расстояние (2) между точками t и s из $\widetilde{L}_\infty$, записанными в полярных координатах, определяется формулой

$$\operatorname{ch} r(t, s) = \operatorname{ch} r_t \operatorname{ch} r_s - \operatorname{sh} r_t \operatorname{sh} r_s (\alpha_t, \alpha_s). \tag{3}$$

Для $r > 0$ множество $G(r) = \{t \in \widetilde{L}_\infty : r_t = r\}$ является сферой в L_∞ радиуса r с центром P.

4. Шар в L_∞ радиуса R с удаленным центром P: $U_R = \{t \in \widetilde{L}_\infty : r_t \leqslant R\}$. В полярных координатах $U_R = (0, R] \times S_\infty$ с расстоянием, определяемым формулой (3).

5. Бесконечномерная единичная гильбертова сфера с удаленными «северным» и «южным» полюсами $\widetilde{S}_\infty = S_\infty / \{N, -N\}$, где N — некоторый элемент S_∞. Запишем $t \in \widetilde{S}_\infty$ в цилиндрических координтах: t представим в виде $t = r_t N + \sqrt{1 - r_t^2}\alpha_t$, где $r_t = (t, N)$, а $\alpha_t = (t - r_t N)/(1 - r_t^2)^{1/2}$ — элемент единичной сферы S_∞^1 в ортогональном дополнении H^1 множества $\{N\}$ ($H^1 = \{t \in H : (t, N) = 0\}$). Сопоставив элементу $t \in \widetilde{S}_\infty$ пару цилиндрических координат $t = (r_t; \alpha_t)$, получим представление $\widetilde{S}_\infty$ в виде системы сфер: $\widetilde{S}_\infty = (-1, 1) \times S_\infty^1$.

Пусть $r(t, s)$ — метрика на S_∞, индуцированная гильбертовой метрикой в H. Расстояние $r(t, s)$ между точками t и s из $\widetilde{S}_\infty$ в полярных координатах определяется формулой

$$r(t, s) = (2 - 2r_t r_s - 2\sqrt{1 - r_t^2}\sqrt{1 - r_s^2}(\alpha_t, \alpha_s))^{1/2}. \tag{4}$$

6. Шар W_R в $\widetilde{S}_\infty$ радиуса $R<2$ с удаленным центром N, т. е. множество $W_R\{t\in\widetilde{S}_\infty : r(t, N)\leqslant R\}$. В полярных координатах $W_R=\{t\in\in\widetilde{S}_\infty: 1-R^2/2\leqslant r_t<1\}$, следовательно, $W_R=[1-R^2/2, 1]\times S^1_\infty$ с расстоянием (4).

Не останавливаясь более на примерах подробно, укажем, что в виде системы сфер можно представить такие множества в H, как конечная или бесконечная последовательность концентрических сфер, конечная последовательность неконцентрических сфер, поверхности вращения вокруг оси и т. д.

Назовем непрерывную по совокупности переменных α_t, α_s действительнозначную функцию $B(t, s)$ на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ изотропной, если она зависит от r_t, r_s и $(\alpha_t, \alpha_s): B(t, s)=\widetilde{B}(r_t, r_s, (\alpha_t, \alpha_s))$.

Если изотропная функция $B(t, s)$ на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ является положительно определенным ядром на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$, то для всякого фиксированного $r\in M$ $B((r;\alpha), (r;\beta))$ является непрерывным положительно определенным ядром на $S_\infty\times S_\infty$, зависящим от углового расстояния между α и β: $B((r;\alpha), (r;\beta))=\tilde{B}(r, r, (\alpha, \beta))$.

Согласно теореме Шенберга [5] функция $g(\alpha, \beta)$ на $S_\infty\times S_\infty$ является непрерывным положительно определенным ядром, зависящим от углового расстояния между α и β, тогда и только тогда, когда $g(\alpha, \beta)$ допускает представление

$$g(\alpha, \beta)=\sum_{m\geqslant 0} c_m(\alpha, \beta)^m, \tag{5}$$

где

$$c_m\geqslant 0, \sum_{m\geqslant 0} c_m<\infty. \tag{6}$$

Поэтому при $r_t=r_s=r$

$$B((r;\alpha_t), (r;\alpha_s))=\sum_{m\geqslant 0} c_m(r)(\alpha_t, \alpha_s)^m,$$

где $c_m(r)$ — некоторые коэффициенты, зависящие от r, такие, что $c_m(r)\geqslant\geqslant 0$, $\sum\limits_{m\geqslant 0} c_m(r)<\infty$.

Этот результат можно усилить.

Теорема 1. *Изотропная функция $B(t, s)$ на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ является положительно определенным ядром на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда она представима в виде поточечно сходящегося ряда*

$$B(t, s)=\sum_{m\geqslant 0} d_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m, \tag{7}$$

где $d_m(x, y)$, $m\geqslant 0$,— положительно определенные ядра на $M\times M$.

Доказательство. Достаточность условия (7) очевидна, так как для всех $m\geqslant 0$ функции на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ $f_m(t, s)=d_m(r_t, r_s)$ и $f(t, s)=(\alpha_t, \alpha_s)$ являются положительно определенными ядрами на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$.

Докажем необходимость. Поскольку для всякого множества T класс положительно определенных ядер на $T\times T$ совпадает с классом ковариационных функций случайных полей на T [11], положительно определенное ядро $B(t, s)$ на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ является ковариационной функцией некоторого случайного поля $\xi(t)$ на $\mathfrak{F}$ с нулевым математическим ожиданием: $E\xi(t)=0$, $E\xi(t)\xi(s)=B(t, s)$.

Для фиксированных r_1, $r_2\in M$ рассмотрим случайные поля на S_∞

$$\eta_1(\alpha)=\xi((r_1;\alpha))+\xi((r_2;\alpha)),$$

$$\eta_2(\alpha)=\xi((r_1;\alpha))-\xi((r_2;\alpha)).$$

Ковариационные функции этих полей непрерывны и зависят от (α, β):

$$B_1(\alpha, \beta) = E\eta_1(\alpha)\eta_2(\beta) = \widetilde{B}(r_1, r_1, 1) + \widetilde{B}(r_2, r_2, 1) + 2\widetilde{B}(r_1, r_2, (\alpha, \beta)); \tag{8}$$

$$B_2(\alpha, \beta) = E\eta_2(\alpha)\eta_2(\beta) = \widetilde{B}(r_1, r_1, 1) + \widetilde{B}(r_2, r_2, 1) - 2\widetilde{B}(r_1, r_2, (\alpha, \beta)). \tag{9}$$

Поэтому в силу приведенной выше теоремы Шенберга [5] они допускают представления (5):

$$B_1(\alpha, \beta) = \sum_{m\geqslant 0} c_m^1 (\alpha, \beta)^m, \tag{10}$$

$$B_2(\alpha, \beta) = \sum_{m\geqslant 0} c_m^2 (\alpha, \beta)^m, \tag{11}$$

где

$$c_m^i \geqslant 0, \ \sum_{m\geqslant 0} c_m^i < \infty, \ i = 1, 2. \tag{12}$$

А так как в силу (8) и (9)

$$B((r_1; \alpha), (r_2; \beta)) = \frac{1}{4}(B_1(\alpha, \beta) - B_2(\alpha, \beta)),$$

то из (10)—(12) следует

$$B((r_1; \alpha), (r_2; \beta)) = \sum_{m\geqslant 0} d_m(r_1, r_2)(\alpha, \beta)^m,$$

где $d_m(r_1, r_2) = \frac{1}{4}(c_m^1 - c_m^2)$ и $\sum_{m\geqslant 0} d_m(r_1, r_2) < \infty$.

Это означает справедливость представления (7) для некоторых функций $d_m(x, y)$ на $M \times M$. Докажем теперь, что функции $d_m(x, y)$ являются положительно определенными ядрами на $M \times M$.

При фиксированном $r_t = r$ случайное поле $\xi(t) = \xi((r; \alpha_t))$ зависит только от α_t и может рассматриваться как изотропное случайное поле на S_∞ с ковариационной функцией $B_r(\alpha_t, \alpha_s) = E\xi((r; \alpha_t), (r; \alpha_s)) = B((r; \alpha_t), (r; \alpha_s))$. Как показано в [10], такое поле представимо в виде ряда, сходящегося в среднем квадратичном

$$\xi(t) = \sum_{m\geqslant 0} \xi_m(t),$$

где $\xi_m(t)$, $m \geqslant 0$, — случайные поля с нулевым средним на $\mathfrak{F}$ такие, что при $r_t = r_s = r$

$$E\xi_m(t)\xi_k(s) = \delta_m^k d_m(r, r)(\alpha_t, \alpha_s)^m.$$

Для $t \in \mathfrak{F}$, $u \in [-1, 1]$ введем

$$\overline{\xi}(u, t) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \xi((r_t; u\alpha_t + (1-u^2)^{1/2} e_j)), \tag{13}$$

где $\{e_j, j \geqslant 1\}$ — произвольная последовательность ортогональных элементов сферы S_∞ таких, что $(\alpha_t, e_j) = 0$, $j \geqslant 1$. Согласно [10] такой предел существует, не зависит от выбора последовательности $\{e_j, j \geqslant 1\}$ и удовлетворяет равенству

$$\overline{\xi}(u, t) = \sum_{m\geqslant 0} u^m \xi_m(t). \tag{14}$$

Для $t, s \in \mathfrak{F}$ и $u, v \in [-1, 1]$ в силу (14)

$$E\overline{\xi}(u, t)\overline{\xi}(v, s) = \sum_{m\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} u^m v^k E\xi_m(t)\xi_k(s) \tag{15}$$

С другой стороны, выбрав последовательность $\{e_j,\ j \geqslant 1\}$ так, чтобы $(\alpha_t, e_j) = (\alpha_s, e_j) = 0$, $j \geqslant 1$, получим из (13) и (7) для $u, v \in [-1, 1]$

$$E\bar{\xi}(u, t)\,\bar{\xi}(v, s) = \lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\xi((r_t, u\alpha_t + (1-u^2)^{1/2} e_i))\,\xi((r_s, v\alpha_s + (1-v^2)^{1/2} e_j)) = \sum_{m\geqslant 0} d_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m (uv)^m. \quad (16)$$

Приравнивая правые части (15) и (16), получаем

$$E\xi_m(t)\,\xi_k(s) = \delta_m^k d_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m.$$

Отсюда следует, что для произвольного фиксированного $\alpha \in S_\infty$ случайное поле $\xi_m((x, \alpha))$ на M имеет ковариационную функцию $d_m(x, y)$:

$$E\xi_m((x, \alpha))\,\xi_m((y, \alpha)) = d_m(x, y).$$

Это означает, что $d_m(x, y)$, $m \geqslant 0$,— положительно определенные ядра на $M \times M$.

Следствие 1. *Пусть $B(t, s)$ — положительно определенное изотропное ядро на $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$. Тогда для всех $a \in [0, 1]$ функция $\tilde{B}(x, y, a)$ положительно определена на $M \times M$.*

Следствие 2. *Пусть $B(t, s)$ — положительно определенное изотропное ядро на $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$. Тогда для всякой пары $(x, y) \in M \times M$*

$$\tilde{B}(x, y, u) = \sum_{m\geqslant 0} d_m(x, y)\, u^m, \quad (17)$$

и

$$d_m(x, y) = (m!)^{-1} \left.\frac{\partial^m \tilde{B}(x, y, u)}{\partial u^m}\right|_{u=0}. \quad (18)$$

Покажем, как из теоремы 1 получить представление Шенберга [4] положительно определенной функции на H.

Пусть $F(r)$ — положительно определенная функция на H. В силу (1) $F(r(t, s))$ является изотропной функцией на системе сфер $\tilde{H} = (0, \infty) \times S_\infty$, поэтому по теореме 1 положительно определенное ядро $F(r(t, s))$ допускает представление (7):

$$F(r(t, s)) = \sum_{m\geqslant 0} d_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m. \quad (19)$$

Пусть $\alpha, \beta \in S_\infty$ таковы, что $(\alpha, \beta) = 0$. Тогда для всех $x, y \in (0, \infty)$ $r((x; \alpha), (y; \beta)) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Из (19) следует

$$F(r((x; \alpha), (y; \beta))) = d_0(x, y),$$

т. е. $F(\sqrt{x^2 + y^2}) = d_0(x, y)$ — положительно определенное ядро на $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Так как функция $F(r)$ ограничена $(F^2(r(t, s)) \leqslant F(r(t, t))\,F(r(s, s)) = F^2(0))$, то в силу следствия из теоремы С. Н. Бернштейна

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}) = \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0, \infty)$, откуда и следует представление Шенберга

$$F(r) = \int_0^\infty e^{-\lambda r^2} d\sigma(\lambda).$$

Замечание. Такое доказательство идейно близко доказательству теоремы Шенберга, предложенному Расселом [12]. Доказательство Рессела заключается в доказательстве того, что $F(\sqrt{r})$ является положительно определенной функцией на семиметрическом пространстве (R_+, μ) (множестве неотрицательных чисел с семиметрикой $\mu(x, y) = x + y$); в нашем случае этот факт следует из теоремы 1.

Аналогичным образом можно получить представление М. Г. Крейна положительно определенной функции $F(r)$ на L_∞

$$F(r) = \int_0^\infty (\operatorname{ch} r)^{-\lambda} d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0, \infty)$. Более того, тем же методом можно показать, что положительно определенные функции на шарах V_R, U_R и W_R в пространствах H, L_∞ и S_∞ допускают те же представления, что и положительно определенные функции на самих пространствах (разумеется, для значений аргумента, не превышающих диаметр шара). Поскольку для H и L_∞ эти результаты известны [8, 9], получим соответствующий результат для случая S_∞, где он, по-видимому, является новым.

Заметим, что хоть мы и рассматриваем на сфере S_∞ гильбертову метрику $r(t, s)$, результат, разумеется, сохраняется и для S_∞, снабженной сферической метрикой $\rho(t, s)$. Выбор гильбертовой метрики обусловлен лишь тем, что мы рассматриваем задачу о возможности продолжения положительно определенной функции на шаре в S_∞ до положительно определенной функции на S_∞ в рамках исследования вопроса о возможности продолжения положительно определенной функции, заданной на подмножестве некоторой поверхности $\mathscr{I}$ в H до положительно определенной функции на всей $\mathscr{I}$.

Т е о р е м а 2. *Положительно определенная функция на шаре в S_∞ допускает, причем единственное, продолжение до положительно определенной функции на S_∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметив, что для $\alpha, \beta \in S_\infty$ $(\alpha, \beta) = 1 - r^2(\alpha, \beta)/2$, перепишем представление (5) положительно определенной функции $F(r)$ на S_∞ в виде

$$F(r(\alpha, \beta)) = \sum_{m \geqslant 0} c_m (1 - r^2(\alpha, \beta)/2)^m,$$

или, что то же самое,

$$F(r) = \sum_{m \geqslant 0} c_m (1 - r^2/2)^m, \tag{20}$$

где c_m, $m \geqslant 0$, удовлетворяют (6).

Пусть $f(r)$ — положительно определенная функция на шаре с центром N и радиусом R на S_∞, а следовательно, и на шаре с удаленным центром $N - W_R$. Будем, как в примере 6, рассматривать W_R как систему сфер $W_R = [1 - R^2/2, 1) \times S_\infty$ с расстоянием $r(t, s)$, определяемым формулой (4). В силу изотропности функции $r(t, s)$ (что видно из (4)), положительно определенное ядро $f(r(t, s))$ является изотропной функцией на W_k^2 и поэтому по теореме 1 допускает представление (7):

$$f(r(t, s)) = B(r_t, r_s, (\alpha_t, \alpha_s)) = \sum_{m \geqslant 0} d_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m, \tag{21}$$

где $d_m(x, y)$, $m \geqslant 0$, — положительно определенные ядра на $[1 - R^2/2, 1) \times [1 - R^2/2, 1)$.

Пусть $\alpha, \beta \in S_\infty^1$ таковы, что $(\alpha, \beta) = 0$. Тогда для всех $x, y \in [1 - R^2/2, 1) \times [1 - R^2/2, 1)$

$$r((x; \alpha), (y; \beta)) = (2 - 2xy)^{1/2} \tag{22}$$

и $r((x; \alpha), (y; \beta)) \in [0, R\sqrt{1 - R^2/4}]$. В силу (21)

$$f(r((x; \alpha), (y; \beta))) = d_0(x, y), \tag{23}$$

откуда с учетом (22) получаем

$$f((2 - 2xy)^{1/2}) = d_0(x, y).$$

Таким образом, $d_0(x, y)$ — положительно определенное ядро на $[1 - R^2/2, 1) \times [1 - R^2/2, 1)$, зависящее от xy (т. е. от $\ln x + \ln y$), следовательно, по теореме С. Н. Бернштейна $d_0(x, y)$ допускает представление

$$d_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(\ln x + \ln y)} d\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (xy)^\lambda d\Phi(\lambda), \tag{24}$$

где $\Phi(\lambda)$ — неубывающая функция на $(-\infty, \infty)$.

Так как из (22) $xy = 1 - r^2((x; \alpha), (y; \beta))/2$, то, подставляя в (23) правую часть (24), получаем

$$f(r((x; \alpha), (y; \beta))) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - r^2((x; \alpha), (y, \beta))/2)^\lambda d\Phi(\lambda).$$

Это означает, что для $r \in [0, R\sqrt{1 - R^2/4}]$

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - r^2/2)^\lambda d\Phi(\lambda). \tag{25}$$

Для $t, s \in W_R$ таких, что $(\alpha_t, \alpha_s) \geqslant 0$, $r(t, s) \leqslant R\sqrt{1 - R^2/4}$, поэтому для $u \in [0, 1]$ можно, подставив (4) в (25), записать

$$\widetilde{B}(x, y, u) = \int_{-\infty}^{\infty} (xy + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}\, u)^\lambda d\Phi(\lambda). \tag{26}$$

Отсюда в силу (18) получаем для $x, y \in [1 - R^2/2, 1)$, $m \geqslant 0$

$$d_m(x, y) = (m!)^{-1}(\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}/xy)^m \int_{-\infty}^{\infty} (xy)^\lambda \lambda(\lambda - 1) \ldots$$
$$\ldots (\lambda - m + 1)\, d\Phi(\lambda). \tag{27}$$

Подставив (27) в (17), заключаем, что (26) справедливо для всех $u \in [-1, 1]$, а значит, и (25) справедливо для всех $r \in [0, \operatorname{diam} W_R]$ ($\operatorname{diam} W_R = 2 - R^2$).

Рассмотрим для $m \geqslant 0$ функции

$$a_m(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (xy)^\lambda \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - m + 1)\, d\Phi(\lambda). \tag{28}$$

Из равенства

$$a_m(x, y) = m!\,(xy/\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)})^m d_m(x, y)$$

следует, что ядро $a_m(x, y)$ положительно определено на $(1 - R^2/2, 1) \times (1 - R^2/2, 1)$, а в силу (28) $a_m(x, y)$ является функцией от xy. Вновь применяя теорему С. Н. Бернштейна, получаем, что ядро $a_m(x, y)$ представимо в виде

$$a_m(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (xy)^\lambda d\Phi_m(\lambda), \tag{29}$$

где $\Phi_m(\lambda)$ — неубывающая функция на $(-\infty, \infty)$. Приравнивая правые части (28) и (29) и принимая во внимание, что из равенства на конечном интервале двусторонних интегралов Лапласа двух функций ограниченной на каждом конечном отрезке вариации (в рассматриваемом случае это $\int_0^\lambda \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - m + 1)\, d\Phi(\lambda)$ и $\int_0^\lambda d\Phi_m(\lambda)$) следует равенство самих функций при условии, что функция в точке принимается равной среднему своих пределов справа и слева [13], заключаем, что для

$$\lambda \in \Lambda_m = \{\lambda : \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - m + 1) < 0\} \qquad d\Phi(\lambda) = 0.$$

Отсюда следует, что мера $d\Phi(\lambda)$ сосредоточена на множестве $\Lambda = \bigcap_{m \geqslant 0} \overline{\Lambda}_m$.

Так как Λ есть множество целых неотрицательных чисел, то (32) будет иметь вид

$$f(r) = \sum_{m \geqslant 0} c_m (1 - r^2/2)^m, \quad r \in [0, \operatorname{diam} W_R],$$

где c_m — скачок функции $\Phi(\lambda)$ в точке $\lambda = m$; $c_m \geqslant 0$, $\sum\limits_{m \geqslant 0} c_m = f(0) < \infty$.

Это означает, что функция $F(r)$, определяемая (20) для $r = [0, 2]$, является продолжением $f(r)$ до положительно определенной функции на S_∞. Это продолжение единственно, так как всякая положительно определенная функция на S_∞, как видно из (20), является аналитической функцией переменной $(1 - r^2/2)$ и, следовательно, однозначно продолжается по своим значениям на интервале $(1 - r^2/2) \in (1 - R^2/2,\ 1)$.

1. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1940.— **26**, № 1.— С. 17—21.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
3. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев : Наук. думка, 1988.— 680 с.
4. *Schoenberg J.* Metric spaces and completely monotonous functions // Ann. of Math.— 1938.— **39**, N 4.— P. 811—841.
5. *Schoenberg J.* Positive definite functions on sphere // Duke Math. J.— 1942.— **2**, N 1.— P. 96—108.
6. *Крейн М. Г.* Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах // Укр. мат. журн.— 1949.— **41**, № 4.— С. 64—98.
7. *Faraut J., Harzallah K.* Distances hilbertiènnes invariantes sur un éspace homogène // Ann. Inst. Fourier. — 1974.— **24**, N 3.— P. 171—217.
8. *Rudin W.* An extension theorem for positive definite functions // Duke Math. J. — 1970.— **37**, N 1.— P. 49—53.
9. *Nussbaum A. E.* Extension of positive definite functions and representation of functions in terms of spherical functions in symmetric spaces of noncompact type of rank 1 // Math. Ann.— 1975.— **215**, N 1.— P. 97—116.
10. *Berman S. M.* Isotropic Gaussian processes on the Hilbert sphere // Ann. of Probab.— 1980.— **9**, N 6.— P. 1093—1106.
11. *Яглом А. М.* Спектральные представления для различных классов случайных функций // Труды 4-го Всесоюзного математического съезда.— М. : Изд-во АН СССР, 1963.— Т. 1.— С. 250—273.
12. *Ressel P.* A short proof of Schoenberg's theorem // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— **57**, N 1.— P. 66—68.
13. *Widder D.* The Laplace transform.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.— 406 p.

Получено 22.05.90