УДК 517.984.22

О. В. Лопушанський, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Операторне числення на ультрагладких векторах

Излагается один общий способ построения функций от неограниченных операторов, действующих в банаховых пространствах. Он базируется на оснащении исходного пространства инвариантными подпространствами ультрагладких векторов заданного оператора и описании его спектральных свойств в топологических алгебрах, которые при этом возникают.

Викладається один загальний спосіб побудови функцій від необмежених операторів, які діють в банахових просторах. Він базується на оснащенні вихідного простору інваріантними підпросторами ультрагладких векторів заданого оператора і опису його спектральних властивостей у топологічних алгебрах, що при цьому виникають.

1. Нехай $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $A : \mathcal{D}(A) \subset \subset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ — необмежений лінійний замкнений оператор із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Нехай $M = \{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ — послідовність додатніх чисел. Кожному числу $\nu > 0$ поставимо у відповідність підпростір

$$\mathcal{D}_s^\nu(A) = \{x \in \mathfrak{B} : \|x\|_\nu < \infty\}, \text{ де } \|x\|_\nu = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A^k x\|}{\nu^k \mu_k}\right)^s\right]^{1/s}$$

— норма в $\mathcal{D}_s^\nu(A)$ і $s (1 \leqslant s < \infty)$ — фіксоване число. Зрозуміло, що

$\mathcal{D}_s^\nu(A) \subset C^\infty(A)$ — простору гладких векторів оператора A, на якому визначені всі степені $\{A^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ ([1], гл. 2, § 2, п. 2).

Теорема 1. *Простори $\mathcal{D}_s^\nu(A)$ банахові (гільбертові, якщо $\mathfrak{B}$ гільбертів і $s=2$) і наявні наступні неперервні вкладення*:

$$\mathcal{D}_s^\nu(A) \subset \mathcal{D}_s^\gamma(A) \subset \mathfrak{B} \qquad (0<\nu<\gamma<\infty).$$

Доведення. Неперервність вкладень забезпечується нерівностями $\|x\| \leqslant \mu_0 \|x\|_\nu$ і $\|x\|_\gamma \leqslant \|x\|_\nu$ при $x\in\mathcal{D}_s^\nu(A)$. Якщо $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність Коші в $\mathcal{D}_s^\nu(A)$, то $(\forall k\in\mathbb{Z}_+)$: $\{A^k x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — така ж послідовність в $\mathfrak{B}$. В силу замкненості степенів A^k і повноти $\mathfrak{B}$ існує вектор $x\in C^\infty(A)$ такий, що $\lim\limits_{n\to\infty} A^k x_n = A^k x\, (\forall k\in\mathbb{Z}_+)$. Отже, $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists n_0\in\mathbb{N})$: $\|x_n - x_m\|_\nu < \varepsilon$ $(\forall n, m\geqslant n_0)$. Звідси $\|x_n\|_\nu \leqslant \|x_n - x_{n_0}\|_\nu + \|x_{n_0}\|_\nu \leqslant \varepsilon + \|x_{n_0}\|_\nu$ при $n\geqslant n_0$. Переходячи до границі в $\mathfrak{B}$ при $n\to\infty$, одержуємо $\|x\|_\nu \leqslant \|x_{n_0}\|_\nu + \varepsilon$, тобто $x\in\mathcal{D}_s^\nu(A)$, оскільки $x_{n_0}\in\mathcal{D}_s^\nu(A)$. Нарешті з нерівності $\|x_n - x_m\|_\nu < \varepsilon$ при $m\to\infty$ і $n\geqslant n_0$ одержуємо $\|x_n - x\|_\nu \leqslant \varepsilon$, і теорема доведена.

Наявність установлених вище неперервних вкладень дозволяє визначити локально опуклу індуктивну границю

$$\mathcal{D}_s^M(A) \equiv \bigcup_{\nu>0} \mathcal{D}_s^\nu(A) = \liminf_{\nu\to+\infty} \mathcal{D}_s^\nu(A).$$

Бачимо, що вкладення $\mathcal{D}_s^M(A) \subset \mathfrak{B}$ неперервне.

Теорема 2. *Кожна обмежена підмножина S простору $\mathcal{D}_s^M(A)$ міститься і обмежена в деякому просторі $\mathcal{D}_s^\nu(A)$.*

Доведення. Від супротивного, нехай є обмежена в $\mathcal{D}_s^M(A)$ множина S, перетин якої з кожним із підпросторів $\mathcal{D}_s^\nu(A)$ необмежений. Тоді для кожного $\nu>0$ і кожної послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ знайдуться послідовності чисел $0\leqslant\alpha_n\to\infty$ та $k_n\in\mathbb{Z}_+$ такі, що $\sum\limits_{k=0}^{k_n}\left(\frac{\|A^k x_n\|}{\nu^k\mu_k}\right)^s \geqslant \alpha_n^{2s}$.

З іншого боку, для будь-якого опуклого околу U в $\mathcal{D}_s^M(A)$ існує число $\delta>0$ таке, що $\delta S\subset U$. Окіл U визначається послідовністю куль з центром в нулі радіусу ε_j з відповідного простору $\mathcal{D}_s^j(A)$, тобто

$$U = \left\{ x = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j:\ y_j\in\mathcal{D}_s^j(A),\ \|y_j\|_j \leqslant \varepsilon_j,\ \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1,\ \lambda_j\geqslant 0,\ m\in\mathbb{N}\right\}.$$

Оскільки $\{x_n\}\subset S$, то $\delta\{x_n\}\subset U$. Тому $x_n = \sum\limits_j \lambda_{jn} y_{jn}$, де

$$y_{jn}\in\mathcal{D}_s^j(A),\quad \sum_j \lambda_{jn} = 1,\quad \lambda_{jn}\geqslant 0 \text{ і } \delta\|y_{jn}\|_j \leqslant \varepsilon_j \qquad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Звідси одержуємо

$$\alpha_n^2 \leqslant \sum_j \lambda_{jn}\left[\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{\|A^k y_{jn}\|}{\nu^k\mu_k}\right)^s\right]^{1/s} \leqslant \sum \lambda_{jn}\left[\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{\|A^k y_{jn}\|}{j^k\mu_k}\left(\frac{j}{\nu}\right)^k\right)^s\right]^{1/s} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \lambda_{jn}\cdot\max_{k\leqslant k_n}\left(\frac{j}{\nu}\right)^k \left[\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{\|A^k y_{jn}\|}{j^k\mu_k}\right)^s\right]^{1/s} \leqslant \frac{1}{\delta}\sum_j \lambda_{jn}\cdot\max_{k\leqslant k_n}\left(\frac{j}{\nu}\right)^k \varepsilon_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\sup_{j\geqslant 1, k\leqslant k_n}\left[\left(\frac{j}{\nu}\right)^k\varepsilon_j\right], \text{ або } \delta\alpha_n^2 \leqslant \sup_{j\geqslant 1, k\leqslant k_n}\left[\left(\frac{j}{\nu}\right)^k\varepsilon_j\right].$$

Вибираючи ε_j так, щоб $0 \leqslant \varepsilon_j \leqslant \inf_n \left[\alpha_n \left(\frac{\nu}{j}\right)^{k_n}\right]$, маємо $\delta\alpha_n^2 \leqslant$ $\leqslant \sup_{j\geqslant 1, k\leqslant k_n} \left[\left(\frac{j}{\nu}\right)^k \varepsilon_j\right] \leqslant \alpha_n$, або $\delta\alpha_n \leqslant 1$, що неможливо. Теорема доведена.

Нехай $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ і $\mathcal{D}_s^{-\nu}(A)$ — топологічно спряжені векторні простори відповідно до $\mathcal{D}_s^M(A)$ і $\mathcal{D}_s^\nu(A)$. Користуючись відомими співвідношеннями двоїстості і теоремою 2, можна сформулювати такий наслідок

Наслідок 1. *Якщо на спряжених просторах $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ і $\mathcal{D}_s^{-\nu}(A)$ задані їх сильні топології, або топології Маккі, то має місце топологічний ізоморфізм*

$$\mathcal{D}_s^{-M}(A) \simeq \lim_{\nu\to+\infty} \mathrm{pr}\, \mathcal{D}_s^{-\nu}(A),$$

де справа приведена локально опукла проективна границя. Зокрема, в сильній топології $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ — простір Фреше.

Якщо $\|\psi\|_{-\nu} = \sup_{\|x\|_\nu\leqslant 1} |\langle x, \psi\rangle| \; (x \in \mathcal{D}_s^\nu(A))$ — норма на $\mathcal{D}_s^{-\nu}(A)$, $\Phi_{-\nu}$: $: \mathcal{D}_s^{-M}(A) \ni \varphi \to \psi \in \mathcal{D}_s^{-\nu}(A)$ — проекція, то сильна топологія на $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ може бути задана набором півнорм $\widetilde{Q} = \{\widetilde{q}_{-\nu}\}$ вигляду $\widetilde{q}_{-\nu}(\varphi) = \|\Phi_{-\nu}\varphi\|_{-\nu}$.

Зауважимо, що подібні простори у випадку логарифмічно опуклих неквазіаналітичних послідовностей M наведені в [2], гл. 9. п.7, у випадку $M = \{1\}$ — в [3], а для довільних M — в [1, 4].

2. Якщо існує число $d\,(0 < d < \infty)$ таке, що $\mu_{k+1} \leqslant d^k\mu_k$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)$, то по аналогії з операторами диференціювання індуктивна границя $\mathcal{D}_s^M(A)$ називається *простором ультрагладких векторів оператора A*.

Теорема 3. *Будь-який простір ультрагладких векторів $\mathcal{D}_s^M(A)$ інваріантний відносно оператора A і відповідне звуження $A_M \equiv A|_{\mathcal{D}_s^M(A)}$ є елементом алгебри $\mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^M(A)]$ — лінійних неперервних відображень над $\mathcal{D}_s^M(A)$.*

Доведення. При $d\gamma = \nu$ маємо

$$\|Ax\|_\nu \leqslant \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{d^k\|A^{k+1}x\|}{\nu^k\mu_{k+1}}\right)^s\right]^{1/s} = \gamma\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A^{k+1}x\|}{\gamma^{k+1}\mu_{k+1}}\right)^s\right]^{1/s} \leqslant \gamma\|x\|_\gamma$$

$(\forall x \in \mathcal{D}_s^\gamma(A))$, тобто відображення $A: \mathcal{D}_s^\gamma(A) \to \mathcal{D}_s^\nu(A)$ неперервне. Оскільки наявний топологічний ізоморфізм $\mathcal{D}_s^M(A) \simeq \lim_{\nu\to+\infty} \mathrm{ind}\, \mathcal{D}_s^{\nu/d}(A)$, то з основної властивості індуктивних границь випливає, що $A_M \in \mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^M(A)]$ і теорема доведена.

Нехай $\mathcal{F}$ — простір Фреше, $Q = \{q\}$ — спрямований набір півнорм, що визначає топологію $\mathcal{F}$. Скажемо, що *оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{F})$ (рівномірно) півобмежений*, якщо для будь-якої півнорми $q \in Q$ існує число $\alpha = \alpha(q, T) > 0$ (відповідно число $\alpha = \alpha(T) > 0$, не залежне від q) таке, що

$$q(Tx) \leqslant \alpha q(x) \qquad (\forall x \in \mathcal{F}).$$

Підалгебру (рівномірно) півобмежених **операторів алгебри** $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ — всіх неперервних лінійних операторів над $\mathcal{F}$, позначимо через $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$ (відповідно через $\mathfrak{G}(\mathcal{F})$). Алгебру $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах із $\mathcal{F}$ позначимо через $\mathfrak{L}_b(\mathcal{F})$.

Лема 1. *Набір півнорм $\overline{Q} = \{\overline{q}\}$, де*

$$\overline{q}(T) = \sup_{q(x)\leqslant 1} q(Tx) \qquad (T \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}),\ x \in \mathcal{F})$$

визначає на $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$ топологію τ, сильнішу від топології з $\mathfrak{L}_b(\mathcal{F})$, і $\mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F})$ — алгебра Фреше. Півнорми з $\overline{Q}$ задовольняють субмультипліка-

тивній нерівності

$$\bar{q}(TB) \leqslant \bar{q}(T)\,\bar{q}(B) \qquad (\forall T, B \in \mathfrak{U}(\mathcal{F})).$$

Функція

$$\| T \|_{\mathfrak{G}} = \sup_{q \in Q} \bar{q}(T) \qquad (T \in \mathfrak{G}(\mathcal{F}))$$

визначає на $\mathfrak{G}(\mathcal{F})$ *субмультиплікативну норму таку, що вкладення* $\mathfrak{G}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F})$ *неперервне і* $(\mathfrak{G}(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathfrak{G}})$ *— банахова алгебра.*

Доведення. Топологія $\mathfrak{L}_b(\mathcal{F})$ визначається півнормами $q_S(T) = \sup_{x \in S} q(Tx)$, де S — довільна обмежена множина $\mathcal{F}$ і $q \in Q$. Оскільки $q(S) \leqslant \delta < \infty$, то $q_S(T) \leqslant \delta \bar{q}(T)$ для деякого δ і вкладення $\mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{L}_b(\mathcal{F})$ неперервне. Нарешті $\bar{q}(T) = \sup_{x \neq 0} \frac{q(Tx)}{q(x)}$, тому $\bar{q}(TB) \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{q(TBx)}{q(Bx)} \times \sup_{x \neq 0} \frac{q(Bx)}{q(x)} \leqslant \bar{q}(T)\,\bar{q}(B)$. Якщо $\{T_n\}$ — послідовність Коші в $\mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F})$ і $\lim_{n \to \infty} T_n = T_0 \in \mathfrak{L}(\mathcal{F})$, то $\lim_{n \to \infty} \bar{q}(T_n) = \alpha < \infty$ і $q(T_0 x) \leqslant \alpha q(x)$ $(\forall x \in \mathcal{F})$. Отже, $T_0 \in \mathfrak{U}(\mathcal{F})$ і алгебра $\mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F})$ повна. Далі аналогічно.

Позначимо через $\mathrm{sp}(T)$ (алгебраїчний) спектр оператора T в алгебрі $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$, через $\sigma(T) = \overline{\mathrm{sp}(T)}$ — його замикання в $\mathbb{C}$.

Лема 2. *Спектри будь-якого півобмеженого оператора T над $\mathcal{F}$ в алгебрах $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ та $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$ співпадають і його резольвента $R_\lambda(T)$ в $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(T)$ належить $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}'$ — топологічно спряжений простір до $\mathcal{F}$, T' — спряжений оператор до T відносно дуальної пари $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle$ і $S_q \equiv \{\varphi \in \mathcal{F}' : |\langle x, \varphi \rangle| \leqslant 1,\ q(x) \leqslant 1\}$. За теоремою Банаха — Алаоглу, множина S_q слабо компактна і абсолютно опукла в $\mathcal{F}'$. Підпростір $\mathcal{F}'_q \equiv \{\rho S_q : \rho \in \mathbb{C}\}$ нормуємо функціоналом $\|\varphi\|_q = \inf\{\rho > 0 : \varphi \in \rho S_q\}$. Тоді $\|T'\varphi\|_q = \sup_{q(x) \leqslant 1} |\langle Tx, \varphi \rangle| \leqslant \alpha \sup_{q(Tx) \leqslant 1} |\langle Tx, \varphi \rangle| \leqslant \alpha \|\varphi\|_q$ при $\varphi \in \mathcal{F}'_q \subset \mathcal{F}'$ і підпростір $\mathcal{F}'_q$ інваріантний відносно T'. Якщо $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(T')$, де $\mathrm{sp}(T')$ — спектр T' в алгебрі $\mathfrak{L}(\mathcal{F}')$ — слабко неперервних лінійних відображень, то простір $\mathcal{F}'_q$ інваріантний відносно резольвенти $R_\lambda(T')$ оператора T' в алгебрі $\mathfrak{L}(\mathcal{F}')$. Оскільки множина S слабко компактна, то простір $\mathcal{F}'_q$ банахів. Звуження резольвенти $R_\lambda(T')_{|\mathcal{F}'_q}$ замкнене над $\mathcal{F}'_q$, тому що вкладення $\mathcal{F}'_q \subset \mathcal{F}'$ слабко неперервне і $R_\lambda(T') \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}')$. Згідно з теоремою про замкнений графік $R_\lambda(T')_{|\mathcal{F}'_q} \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}')$, тобто $\exists \delta > 0 : \|R_\lambda(T')\varphi\|_q \leqslant \delta \|\varphi\|_q$ $(\forall \varphi \in \mathcal{F}'_q)$. Звідси

$$q[R_\lambda(T)x] = \sup_{\|\varphi\|_q \leqslant 1} |\langle R_\lambda(T)x, \varphi \rangle| \leqslant \delta \sup_{\|R_\lambda(T')\varphi\|_q \leqslant 1} |\langle x, R_\lambda(T')\varphi \rangle| \leqslant \delta q(x)$$

$$(\forall x \in \mathcal{F}).$$

Отже, $R_\lambda(T) \in \mathfrak{U}(\mathcal{F})$ і точка λ належить резольвентній множині оператора T в алгебрі $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$. Враховуючи, що спектр $\mathrm{sp}(T')$ співпадає із спектром $\mathrm{sp}(T)$, одержуємо включення $\mathrm{sp}_{\mathfrak{U}}(T) \subset \mathrm{sp}(T)$, де $\mathrm{sp}_{\mathfrak{U}}(T)$ — спектр T в $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$. Обернене включення очевидне і доведення закінчене.

Лема 3. *Алгебра Фреше $\mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F})$ і банахова алгебра $(\mathfrak{G}(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathfrak{G}})$ не залежать від вибору півнорм Q (з точністю до ізоморфізму).*

Доведення. Нехай $q \in Q$, $V_q \equiv \{x \in \mathcal{F} : q(x) \leqslant 1\}$ і $V_{\bar{q}} \equiv \{T \in \mathfrak{U}(\mathcal{F}) : TV_q \subset V_q\}$, тоді $V_{\bar{q}} V_{\bar{q}} \subset V_{\bar{q}}$ і $\bar{q}(T) = \sup_{q(x) \leqslant 1} q(Tx) = \inf\{\rho > 0 : T \in \rho V_{\bar{q}}\}$. Кожній із підмножин $V_{\bar{q}}$ відповідає в алгебрі $\mathfrak{L}_b(\mathcal{F})$ замкнена підалгебра $\mathfrak{U}_{\bar{q}} \equiv \{\rho V_{\bar{q}} : \rho \in \mathbb{C}\}$. Нехай $\hat{\mathfrak{U}}_{\bar{q}} \equiv \mathfrak{U}_{\bar{q}}/\ker \bar{q}$ — фактор-алгебра з нормою $\|T_{\bar{q}}\|_{\bar{q}} = \bar{q}(T)$, де $T_{\bar{q}} = T + \operatorname{Ker} \bar{q}$. Якщо $q'(x) \leqslant q(x)$ при $x \in \mathcal{F}$, то $\sup_{q'(x) \leqslant 1} q'(Tx) \leqslant$

$\leqslant \alpha_{qq'} \sup\limits_{q(x)\leqslant 1} q(Tx)$, $\alpha_{qq'} = \sup\limits_{x\in\mathcal{F}} q(x)/q'(x)$, тобто $\bar{q'}(T_{\bar{q}}) \leqslant \alpha_{qq'}\bar{q}(T_{\bar{q}})$ $(\forall T_{\bar{q}} \in \mathfrak{U}_{\bar{q}})$. Отже, можна визначити локально опуклу проективну границю $\mathfrak{U}_Q \equiv \bigcap\limits_{q\in Q} \mathfrak{U}_{\bar{q}} = \lim\limits_{q\in Q} \mathrm{pr}\, \widehat{\mathfrak{U}}_{\bar{q}}$.

На сукупності $\{Q\}$ спрямованих наборів півнорм Q, які визначають топологію $\mathcal{F}$, задамо часткове упорядкування: $Q \prec Q'$, якщо набір Q кофінальний в Q'. Сукупність $\{Q\}$ спрямована заданим упорядкуванням і містить найбільший елемент, яким є набір $\widehat{Q}$ — всіх неперервних півнорм на $\mathcal{F}$. Покажемо, що коли $Q \prec Q'$, то $\mathfrak{U}_Q \simeq \mathfrak{U}_{Q'}$ — топологічний ізоморфізм. Звідси буде випливати, що $\mathfrak{U}_Q \simeq \mathfrak{U}_{\widehat{Q}}$ $(\forall Q)$.

Якщо $Q \prec Q'$, то $Q \subset Q'$, отже, $\mathfrak{U}_{Q'} \subset \mathfrak{U}_Q$. З іншого боку, оскільки $\forall q' \in Q'\ \exists q \in Q : q'(x) \leqslant q(x)$ $(\forall x \in \mathcal{F})$, тобто $\mathfrak{U}_{\bar{q}} \subset \mathfrak{U}_{\bar{q}'}$, то $\mathfrak{U}_Q \subset \mathfrak{U}_{Q'}$. Таким чином, $\mathfrak{U}_Q = \mathfrak{U}_{Q'}$. Наявність топологічного ізоморфізму випливає з еквівалентності проективних систем $\{\widehat{\mathfrak{U}}_{\bar{q}}\}_{q\in Q}$ і $\{\widehat{\mathfrak{U}}_{\bar{q}'}\}_{q'\in Q'}$. Отже, $\mathfrak{U}_Q \simeq \mathfrak{U}_\tau(\mathcal{F})$ $(\forall Q)$.

Покладемо $V_{\bar{Q}} \equiv \bigcap\limits_{q\in Q} V_{\bar{q}}$, тоді $\mathfrak{G}(\mathcal{F}) = \{\rho V_{\bar{Q}} : \rho \in \mathbb{C}\}$ і $\| T \|_{\mathfrak{G}} = \inf \{\rho > 0 : \rho T \in V_{\bar{Q}}\}$. Якщо $Q \prec Q'$, то $\| T \|_{\mathfrak{G}} \leqslant \| T \|_{Q'}$ $(T \in \mathfrak{U}_{\bar{Q}'} \equiv \{\rho V_{\bar{Q}'} : \rho \in \mathbb{C}\})$, де $\| T \|_{Q'} = \sup\limits_{q'\in Q'} \bar{q'}(T)$, і включення $\mathfrak{G}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{G}_{\bar{Q}'}$ неперервне. З іншого боку, як і вище, $\forall q' \in Q'\ \exists q \in Q : q'(x) \leqslant q(x)$ $(\forall x \in \mathcal{F})$. Тоді $q'(\bar{T}) \leqslant \alpha_{qq'}\, \bar{q}(T)$ $(\forall T \in \mathfrak{U}_{\bar{q}})$ і $\mathfrak{U}_{\bar{q}} \subset \mathfrak{U}_{\bar{q}'}$. Таким чином, $\mathfrak{G}_{\bar{Q}'} = \mathfrak{G}(\mathcal{F})$ — ізоморфізм за теоремою про відкрите відображення.

Теорема 4. *Якщо $\mathcal{D}_s^M(A)$ — простір ультрагладких векторів оператора A, то спряжений оператор A_{-M} до оператора A_M відносно дуальної пари $\langle \mathcal{D}_s^M(A), \mathcal{D}_s^{-M}(A)\rangle$ є півобмеженим над простором $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ із сильною топологією.*

Доведення. Нехай $x \in \mathcal{D}_s^\nu(A)$, $\mu_{k+1} < d^k \mu_k$ і $d\nu < \rho$, де $d, \nu > 0$. Тоді

$$\frac{\| A^n x \|_{\rho/d}}{\rho^n} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{d^k \| A^{n+k} x \|}{\rho^{n+k}\mu_k}\right)^s\right\}^{1/s} \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{d^{n+k} \| A^{n+k} x \|}{\rho^{n+k}\mu_{n+k}}\right)^s\right\}^{1/s} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d\nu}{\rho}\right)^{n+k} \frac{\| A^{n+k} x\|}{\nu^{n+k}\mu_{n+k}}\right]^s\right\}^{1/s} \leqslant \left(\frac{d\nu}{\rho}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{d\nu}{\rho}\right)^{ks} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\| A^m x \|}{\nu^m \mu_m}\right)^s\right]^{1/s} =$$

$$= \left(\frac{d\nu}{\rho}\right)^n \left[1 - \left(\frac{d\nu}{\rho}\right)^s\right]^{-1/s} \| x \|_\nu,$$

звідки $\| A^n x \|_{\rho/d} \leqslant \rho^n \| x \|_\nu$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)$.

Набір півнорм $\widetilde{Q} = \{\widetilde{q}_{-\nu}\}$, де $\widetilde{q}_{-\nu}(\varphi) = \sup\limits_{\|x\|_\nu \leqslant 1} |\langle x, \varphi\rangle|$, $\varphi \in \mathcal{D}_s^{-M}(A)$, $x \in \mathcal{D}_s^\nu(A)$, визначає сильну топологію простору $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$. Мають місце нерівності

$$\widetilde{q}_{-\nu}(A_{-M}^n \varphi) = \rho^n \sup_{\rho^n\|x\|_\nu \leqslant 1} |\langle A^n x, \varphi\rangle| \leqslant \rho^n \sup_{\|y\|_{\rho/d} \leqslant 1} |\langle y, \varphi\rangle| = \rho^n \widetilde{q}_{-\rho/d}(\varphi)$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+).$$

Поклавши $q_{-\nu}(\varphi) \equiv \left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\rho)^n}\, \widetilde{q}_{-\nu}(A_{-M}^n \varphi)\right]^s\right\}^{1/s}$, одержуємо $q_{-\nu}(\varphi) \leqslant 2\widetilde{q}_{-\rho/d}(\varphi)$ в силу попередньої нерівності. З іншого боку, виконується нерівність $\widetilde{q}_{-\nu}(\varphi) \leqslant q_{-\nu}(\varphi)$. Отже, набір півнорм $Q = \{q_{-\nu}\}$ також визначає сильну топологію на $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$. Як легко перевірити, $q_{-\nu}(A_{-M}\varphi) \leqslant 2\rho q_{-\nu}(\varphi)$, тому A_{-M} — півобмежений оператор над $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ відносно набору Q. Згідно з лемою 3 властивість півобмеженості A_{-M} не залежить від набору Q, і теорема доведена.

Таким чином до спряженого оператора A_{-M} над простором Фреше $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ можна застосувати загальні властивості півобмежених операторів.

Сукупність (рівномірно) півобмежених операторів над простором Фреше $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ із сильною топологією позначимо далі через $\mathfrak{U}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$ (відповідно через $\mathfrak{G}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$).

Наслідок 2. *Кожен підпростір $\mathcal{D}_s^{\nu}(A)$ є інваріантним відносно оператора A і відповідне звуження $A_\nu \equiv A|_{\mathcal{D}_s^{\nu}(A)}$ є обмеженим оператором над $\mathcal{D}_s^{\nu}(A)$.*

Для доведення досить скористатись двоїстістю між $\widetilde{q}_{-\nu}$ і $\|\cdot\|_\nu$ та нерівністю $\widetilde{q}_{-\nu}(A_{-M}\varphi) \leqslant \alpha\widetilde{q}_{-\nu}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{D}_s^{-M}(A))$ для деякого числа $\alpha > 0$. Тоді одержимо

$$\|A_M x\|_\nu = \sup_{\widetilde{q}_{-\nu}(\varphi)\leqslant 1} |\langle A_M x, \varphi\rangle| \leqslant \alpha \sup_{\widetilde{q}_{-\nu}(A_{-M}\varphi)\leqslant 1} |\langle x, A_{-M}\varphi\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \|x\|_\nu \quad (x \in \mathcal{D}_s^{\nu}(A)).$$

Сформулюємо умову, при якій спектр оператора A і замикання спектру його звуження A_M співпадають.

Теорема 5. *Якщо $\mathcal{D}_s^M(A)$ — простір ультрагладких векторів оператора A, то $\sigma(A_M) \subset \sigma(A)$, де $\sigma(A_M)$ — замикання спектру $\operatorname{sp}(A_M)$ елементу A_M в алгебрі $\mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^M(A)]$. Якщо до того ж $\overline{\mathcal{D}_s^M(A)} = \mathfrak{B}$, то $\sigma(A_M) = \sigma(A)$.*

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A)$, тоді резольвента $R_\lambda(A)$ оператора A над простором $\mathfrak{B}$ належить алгебрі $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$. Оскільки $A^k R_\lambda(A)x = R_\lambda(A)A^k x$ для всіх $x \in C^\infty(A)$ і $k \in \mathbb{Z}_+$, то $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A^k R_\lambda(A)x\|}{\nu^k\mu_k}\right)^s \leqslant \|R_\lambda(A)\|^s \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A^k x\|}{\nu^k\mu_k}\right)^s$. Звідси $\|R_\lambda(A)x\|_\nu \leqslant \|R_\lambda(A)\|\,\|x\|_\nu$ і оператор $R_\lambda(A)$ діє над простором $\mathcal{D}_s^{\nu}(A)$. Тому $R_\lambda(A)|_{\mathcal{D}_s^M(A)} \in \mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^M(A)]$. Згідно з теоремою 3 підпростір $\mathcal{D}_s^M(A)$ інваріантний відносно оператора A і $R_\lambda(A)|_{\mathcal{D}_s^M(A)} = R_\lambda(A_M)$ — резольвента елемента A_M в алгебрі $\mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^M(A)]$. Отже, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{\operatorname{sp}(A)}$, тобто $\operatorname{sp}(A_M) \subset \sigma(A)$. Оскільки спектр $\sigma(A)$ замкнений в $\mathbb{C}$, то $\overline{\operatorname{sp}(A_M)} = \sigma(A_M) \subset \sigma(A)$.

Тепер навпаки, нехай $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A_M)$. Тоді $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A_{-M})$, бо $\sigma(A_M) = \sigma(A_{-M})$, де спряжений оператор A_{-M} розглядається в алгебрі $\mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$ — сильно неперервних відображень. Використаємо тотожність $R_\alpha(A_{-M}) = R_\lambda(A_{-M})[I - (\lambda - \alpha)R_\lambda(A_{-M})]^{-1}$, де $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A_{-M})$. Покладемо $\zeta = (\lambda - \alpha)^{-1}$, тоді $[I - (\lambda - \alpha)R_\lambda(A_{-M})]^{-1} = \zeta[I\zeta - R_\lambda(A_{-M})]^{-1}$. В силу лем 1, 2 і теореми 4 резольвента $\zeta \to [I\zeta - R_\lambda(A_{-M})]^{-1}$ голоморфна в околі точки $\{\infty\}$ в алгебрі $\mathfrak{U}_\tau[\mathcal{D}_s^M(A)]$ півобмежених операторів. Алгебра $\mathfrak{L}_b[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$ повна і знайдеться (не залежне від набору півнорм $\widetilde{q}_{-\nu}$) число δ $(0 < \delta < \infty)$ таке, що збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} R_\lambda^k(A_{-M})\zeta^{-k-1}$ при

$|\zeta| \geqslant \delta$. Зокрема, обмежена послідовність його частинних сум $\{s_k(\delta)\}$, а отже і послідовність $\{\delta^{-1}s_k(\delta) - \delta^{-1}s_k(\delta)\} = \{\delta^{-k}R_\lambda^k(A_{-M})\}$. Зважаючи на теорему Банаха — Штейнгауза, послідовність $\{\delta^{-k}R_\lambda^k(A_{-M})\}$ одностайно неперервна над $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$, тобто для будь-якого $\nu > 0$ знайдеться неперервна на $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ півнорма q така, що $\tilde{q}_{-\nu}[\delta^{-k}R_\lambda^k(A_{-M})\varphi] \leqslant q(\varphi)$ $(\forall\varphi \in \mathcal{D}_s^{-M}(A),\ k \in \mathbb{Z}_+)$. Покладаючи $q'_{-\nu}(\varphi) \equiv \sup_{k\geqslant 0} \tilde{q}_{-\nu}[\delta^{-k}R_\lambda^k(A_{-M})]$, маємо $q'_\nu(\varphi) \leqslant q(\varphi)$ і півнорма $q'_{-\nu}$ неперервна на $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$. З іншого боку, $\tilde{q}_{-\nu}(\varphi) \leqslant q'_{-\nu}(\varphi)$ і набір $\{q'_{-\nu}\}$ визначає топологію $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$. Як видно, $q'_{-\nu}[R_\lambda(A_{-M})\varphi] \leqslant \delta \sup_{k\geqslant 0} q'_{-\nu}[\delta^{-k-1}R_\lambda^{k+1}(A_{-M})\varphi] \leqslant \delta q'_{-\nu}(\varphi)$ $(\forall\varphi \in \mathcal{D}_s^{-M}(A))$. В силу леми 3 $R_\lambda(A_{-M}) \in \mathfrak{G}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$ і $\tilde{q}_{-\nu}[R_\lambda(A_{-M})\varphi] \leqslant \|R_\lambda(A_{-M})\|_{\mathfrak{G}} \times \tilde{q}_{-\nu}(\varphi)$ $(\forall\varphi \in \mathcal{D}_s^{-M}(A))$, де $\|R_\lambda(A_{-M})\|_{\mathfrak{G}} = \sup_{\nu>0} \sup_{\tilde{q}_{-\nu}(\varphi)\leqslant 1} \tilde{q}_{-\nu}[R_\lambda(A_{-M})\varphi]$.

Звідси, користуючись двоїстістю між півнормами $\tilde{q}_{-\nu}$ і нормами $\|\cdot\|_\nu$ і очевидним співвідношенням $\lim_{\nu\to+\infty} \|x\|_\nu = \|x\|$ при $x \in \mathcal{D}_s^M(A)$, одержуємо нерівність $\|R_\lambda(A_M)x\| \leqslant \|R_\lambda(A_{-M})\|_{\mathfrak{G}}\|x\|$. Враховуючи умову щільності $\overline{\mathcal{D}_s^M(A)} = \mathfrak{B}$, маємо $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, і теорема доведена.

3. Розглянемо послідовність банахових просторів

$$\{(\mathfrak{B}_n, \|\cdot\|_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}, \quad \|x\|_{n+1} \leqslant \|x\|_n \quad (\forall x \in \mathfrak{B}_n)$$

таких, що $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$ і $\|x\| \leqslant \|x\|_n$ $(\forall x \in \mathfrak{B}_n)$. На об'єднанні $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$ функція $\|x\|_{-\infty} = \lim_{n\to\infty}\|x\|_n$ задає, як видно, норму. Нехай $\mathfrak{B}_{-\infty}$ — поповнення простору $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$ по нормі $\|\cdot\|_{-\infty}$. Наведемо конструкцію цього поповнення, яка поширює на випадок довільного числа p $(1 \leqslant p < \infty)$ відому побудову із [5]. Для цього введемо простір

$$l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}) \equiv \left\{x \in \mathfrak{B} : x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in \mathfrak{B}_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p < \infty\right\}$$

з нормою

$$|||x|||_p = \inf\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p\Big)^{1/p},$$

де inf береться по всіх зображеннях Σx_n елемента x.

Лема 4. *Простори $\mathfrak{B}_{-\infty}$ і $l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B})$ ізометричні.*

Доведення. Спочатку покладемо $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{-\infty}$. Оскільки

$$\|x\|_{-\infty} \leqslant \inf\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n\Big) \leqslant |||x|||_p \quad (x \in l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B})),$$

то $l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_{-\infty}$. З іншого боку, $\bigcup_n \mathfrak{B}_n \subset l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_{-\infty})$ і $|||x|||_p \leqslant \|x\|_n$ $(\forall x \in \mathfrak{B}_n)$. Звідси $|||x||| \leqslant \|x\|_{-\infty}$ $\big(\forall x \in \bigcup_n \mathfrak{B}_n\big)$ і $\bigcup_n \mathfrak{B}_n \subset l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_{-\infty})$. Отже, $l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_{-\infty}) \simeq \mathfrak{B}_{-\infty}$ — ізометричний ізоморфізм. В [6] відзначено, що простір $\mathfrak{B}_{-\infty}$ вкладений в $\mathfrak{B}$. Тому $l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_{-\infty}) \subset l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B})$. Навпаки, нехай $x \in l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B})$ і $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{-\infty} \leqslant$

$\leqslant |||x|||_p$ і простір $\mathfrak{B}_{-\infty}$ повний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається в $\mathfrak{B}_{-\infty}$ і $x \in l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_{-\infty})$. Таким чином, $l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_{-\infty}) = l_p(\mathfrak{B}_n; \mathfrak{B})$ і, як видно, норми співпадають.

Теорема 6. *Для будь-якої послідовності* $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *такої, що* $0 \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \nu_n \to +\infty$, *вірний ізометричний ізоморфізм*

$$l_p[\mathcal{D}_s^{\nu_n}(A)] \cong \overline{\mathcal{D}_s^M(A)},$$

де замикання в $\mathfrak{B}$.

Справді, покладаючи в лемі $\mathfrak{B}_n = \mathcal{D}_s^{\nu_n}(A)$, маємо $\|x\|_{-\infty} = \lim_{n\to\infty} \|x\|_{\nu_n} = \|x\|$ $(\forall x \in \mathcal{D}_s^M(A))$, тому досить скористатися її результатом.

Якщо $\mathcal{F}$ і $\mathcal{D}$ — (хаусдорфові) локально опуклі простори, $\mathcal{F}'$ і $\mathcal{D}'$ — їх топологічно спряжені, і простір $\mathcal{D}$ неперервно та щільно вкладений в $\mathcal{F}$, то дуальна пара $\langle \mathcal{D}, \mathcal{D}' \rangle$ називається *оснащенням* дуальної пари $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle$. Наступне твердження є наслідком теореми Хана — Банаха і відомих співвідношень двоїстості [7], гл. 4, п. 7. 2.

Лема 5. *Якщо* $\langle \mathcal{D}, \mathcal{D}' \rangle$ — *оснащення пари* $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle$, *то виконується вкладення* $\mathcal{F}' \subset \mathcal{D}'$, *неперервне у сильних топологіях і неперервне та щільне у топологіях Маккі.*

Наслідок 3. *Якщо* $\overline{\mathcal{D}_s^M(A)} = \mathfrak{B}$, *то вкладення* $\mathfrak{B}' \subset \mathcal{D}_s^{-M}(A)$ *неперервне у сильних топологіях і неперервне та щільне у топологіях Маккі. Якщо простір* $\mathfrak{B}$ *до того ж гільбертів, то вкладення* $\mathfrak{B}' \subset \mathcal{D}_2^{-M}(A)$ *неперервне та щільне у сильних топологіях.*

Базуючись на попередніх викладках, можна будувати функції від оператора A наступним чином.

В припущенні ультрагладкості $\mathcal{D}_s^M(A)$ кожний оператор A_ν є обмеженим над $\mathcal{D}_s^\nu(A)$. Нехай F — клас функцій $f: \mathbb{C} \ni z \to f(z) \in \mathbb{C}$ таких, що для деякої послідовності чисел, яка задовольняє умові

$$\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad 0 \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \nu_n \to +\infty,$$

визначені оператори $f(A_{\nu_n}) \in \mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^{\nu_n}(A)]$. Тоді визначений лінійний оператор $f(A_M): \mathcal{D}_s^M(A) \to \mathcal{D}_s^M(A)$, звуження якого на кожний із підпросторів $\mathcal{D}_s^{\nu_n}(A)$ співпадає із $f(A_{\nu_n})$. Замикання оператора $f(A_M)$ над вихідним простором (якщо воно існує) позначимо через $f(A)$.

Теорема 7. *Нехай* $\mathcal{D}_s^M(A)$ — *простір ультрагладких векторів оператора* A *і виконується умова щільності* $\overline{\mathcal{D}_s^M(A)} = \mathfrak{B}$. *Тоді для будь-якої функції* f *із* F *оператор* $\mathcal{D}_s^M(A)$ *припускає замикання над* $\mathfrak{B}$ *і визначене лінійне відображення*

$$F \ni f \to f(A)$$

таке, що $f(A) = A$, *якщо* $f(A_{\nu_n}) = A_{\nu_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Доведення. Нехай $f(A_{-M})$ — спряжений оператор до $f(A_M)$ відносно дуальної пари $\langle \mathcal{D}_s^M(A), \mathcal{D}_s^{-M}(A) \rangle$. Зрозуміло, що $f(A_{-M}) \in \mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$. Оскільки $\overline{\mathcal{D}_s^M(A)} = \mathfrak{B}$, то виконується ізометрія $\mathfrak{B} \simeq l_p[\mathcal{D}_s^{\nu_n}(A); \mathfrak{B}]$. Не обмежуючи загальності, покладемо $p > 1$. Сильно спряжений простір $\mathfrak{B}'$ до $\mathfrak{B}$ ізометричний підпростору в $\mathcal{D}_s^{-M}(A)$ таких форм χ, для яких норма $|||\chi|||_{p/(p-1)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_{-\nu_n}(\chi)^{p/(p-1)}\right]^{(p-1)/p}$ обмежена. Користуючись цим, звузимо оператор $f(A_{-M})$ на підпростір вигляду $\mathcal{D}[f(A')] = \{\chi \in \mathfrak{B}' : |||f(A_{-M})\chi|||_{p/(p-1)} < \infty\}$. Фактор-простір $\mathcal{D}_s^{-\nu_n}(A) \equiv \mathcal{D}_s^{-M}(A)/\mathrm{Ker}\, \tilde{q}_{-\nu_n}$ з нормою $\|\chi_n\|_{-\nu_n} = \tilde{q}_{-\nu_n}(\chi)$, де $\chi_n \equiv \chi + \mathrm{Ker}\, \tilde{q}_{-\nu_n}$, ізометричний сильно спряженому до $\mathcal{D}_s^{\nu_n}(A)$ і довільній формі $\chi \in \in \mathfrak{B}'$ відповідає послідовність $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ така, що $\|\|\chi\|\|_{p/(p-1)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|\chi_n\|_{-\nu_n}^{p/(p-1)}\right]^{(p-1)/p}$. Покажемо, що $\overline{\mathcal{D}[f(A')]} = \mathfrak{B}'$ в сильній топології. Задамо $\varepsilon > 0$ і виберемо n так, щоб $\sum_{n=k+1}^{\infty} \|\chi_n\|_{-\nu_n}^{p/(p-1)} < \varepsilon^{p/(p-1)}$. Позначимо $\chi^{(k)} = \{\chi_n\}_{n=1}^{k}$, тоді $\|\|\chi - \chi^{(m)}\|\|_{p/(p-1)} < \varepsilon$ при $m \geqslant n$ і щільність доведена.

Нехай тепер $\chi^{(k)} = \{\chi_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ — довільна послідовність із $\mathcal{D}[f(A')]$ така, що $\lim\limits_{k\to\infty} \chi^{(k)} = \chi$ і $\lim\limits_{k\to\infty} f(A_{-M})\chi^{(k)} = \psi$ в $\mathfrak{B}'$. Оскільки проекції $\mathfrak{B}' \to \mathcal{D}_s^{-\nu_n}(A)$ неперервні, то $\psi_n = \lim\limits_{k\to\infty} f(A_{-M})\chi_n^{(k)}$ в $\mathcal{D}_s^{-\nu_n}(A)$. Отже $\chi \in \mathcal{D}[f(A')]$ і $f(A_{-M})\chi = \psi$, тобто звуження оператора $f(A_{-M})$ на $\mathcal{D}[f(A')]$ є сильно замкненим. Позначимо таке звуження через $f(A')$ і побудуємо до нього спряжений оператор $f(A')'$ відносно дуальної пари $\langle \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}' \rangle$, де $\mathfrak{B}''$ — другий сильно спряжений простір до $\mathfrak{B}$. Оператор $f(A')'$, як відомо [7], гл. 4, п. 7, є слабко замкненим і тому таким же є його звуження на простір $\mathfrak{B}$. Позначимо це звуження через $f(A)$. Графік оператора $f(A)$ як підпростір $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, є також замкненим у вихідній топології, і перше твердження теореми доведене.

Нехай $f(A_\nu) = A_\nu$ при $\nu > 0$. Покажемо, що тоді $\mathcal{D}[f(A)] = \mathcal{D}(A)$. Для цього побудуємо спряжений оператор A'_M до A_M відносно пари $\langle \mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \rangle$. Форма φ належить області визначення $\mathcal{D}(A'_M)$ тоді і тільки тоді, коли форма вигляду $\psi_M : \mathfrak{B} \ni x \to \langle A_M x, \varphi \rangle$ неперервна. Аналогічно, $\varphi \in \mathcal{D}(A')$ тоді і тільки тоді, коли неперервною є форма $\psi : \mathfrak{B} \ni x \to \langle Ax, \varphi \rangle$. Оскільки $\tilde{q}_{-\nu}(\psi) = \tilde{q}_{-\nu}(\psi_M)$ $(\forall \nu > 0)$, то $\mathcal{D}(A'_M) = \mathcal{D}(A')$. Отже, найменше слабко замкнене розширення A''_M оператора A_M над $\mathfrak{B}''$ співпадає з A''. Але $A''_M|_{\mathcal{D}(A)} = f(A)$, тому $A = f(A)$ і теорема доведена.

Вкажемо один конкретний клас функцій F, які визначаються від оператора A. Нехай $\mathcal{A}(\Omega)$ — рівномірна алгебра комплексних функцій, голоморфних в області $\Omega \subset \mathbb{C}$ і неперервних у замиканні $\overline{\Omega}$. Для довільного компакту $K \subset \Omega$ можна визначити індуктивну границю $\mathcal{O}_K = \lim\limits_{\Omega \supset K} \operatorname{ind} \mathcal{A}(\Omega)$ по будь-якому фільтру відкритих околів Ω компакту K. Алгебра $\mathcal{O}_K$ складається з паростків (класів еквівалентності) голоморфних функцій на K. Нехай

$$\mathcal{H}_{\sigma(A)} = \lim_{K \subset \sigma(A)} \operatorname{pr} \mathcal{O}_K$$

— проективна границя по будь-якій базі компактних підмножин $\{K\}$ із $\sigma(A)$. Кожен елемент із $\mathcal{H}_{\sigma(A)}$ припускає голоморфне продовження в деякий окіл довільного компакту із $\sigma(A)$.

Теорема 8. *Нехай $\mathcal{D}_s^M(A)$ — простір ультрагладких векторів оператора A і виконується умова щільності $\overline{\mathcal{D}_s^M(A)} = \mathfrak{B}$. Тоді існує лінійне відображення*

$$\mathcal{H}_{\sigma(A)} \ni f \to f(A),$$

де $f(A)$ — замкнений оператор із щільною областю визначення над $\mathfrak{B}$, при якому комплексна змінна відповідає оператору A і виконується наступне співвідношення для спектрів

$$\sigma[f(A)] = f[\sigma(A)].$$

Доведення. Згідно лемам 1 та 2 набір півнорм $\bar{q}_{-\nu}(T) = \sup\limits_{\tilde{q}_{-\nu}(\varphi) \leqslant 1} \tilde{q}_{-\nu}(T\varphi)$, де $T \in \mathfrak{U} \equiv \mathfrak{U}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$ і $\varphi \in \mathcal{D}_s^{-M}(A)$, визначає на $\mathfrak{U}$

топологію τ таку, що вірний топологічний ізоморфізм $\mathfrak{U}_\tau \simeq \lim\limits_{\nu\to+\infty} \mathrm{pr}\, \mathfrak{U}_{-\nu}$, де $\mathfrak{U}_{-\nu}$ — поповнення фактор-алгебри $\mathfrak{U}/\mathrm{Ker}\, \bar{q}_{-\nu}$ з нормою $\| T_{-\nu} \|_{-\nu} = \bar{q}_{-\nu}(T)$, $T_{-\nu} \equiv T + \mathrm{Ker}\, \bar{q}_{-\nu}$, є банаховою і ізометричною підалгебрі алгебри $\mathfrak{L}_b[\mathcal{D}_s^{-\nu}(A)]$. Тоді $\mathrm{sp}(T) = \bigcup\limits_{\nu>0} \mathrm{sp}(T_{-\nu})$, де спектри визначаються у алгебрах $\mathfrak{U}$ і $\mathfrak{U}_{-\nu}$. Згідно з лемою 2 $\mathrm{sp}(T)$ — спектр T в $\mathfrak{L}[\mathcal{D}_s^{-M}(A)]$. Отже, $\sigma(T) = \overline{\bigcup\limits_{\nu>0} \mathrm{sp}(T_{-\nu})}$, де $\mathrm{sp}(T_{-\nu}) = \sigma(T_{-\nu})$ як спектри елементів банахових алгебр $\mathfrak{U}_{-\nu}$, будуть компактами в $\mathbb{C}$.

За теоремою 4 можна покласти $T = A_{-M}$ і $T_{-\nu} = A_{-\nu}$. Згідно з теоремою 5 $\sigma(A) = \sigma(A_M)$. Оскільки $\sigma(A_M) = \sigma(A_{-M})$, то $\sigma(A) = \sigma(A_{-M})$. Тому довільному елементу $f \in \mathcal{H}_{\sigma(A)}$ і компакту $\sigma(A_{-\nu})$ відповідає функція $f_\nu(z) \in \mathcal{A}(\Omega)$, де область Ω містить $\sigma(A_{-\nu})$. Отже, можна визначити оператор

$$f_\nu(A_{-\nu}) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_{-\nu}} R_z(A_{-\nu}) f_\nu(z)\, dz \in \mathfrak{U}_{-\nu},$$

де $\Gamma_{-\nu}$ — контур в Ω, який охоплює компакт $\sigma(A_{-\nu})$ і $R_z(A_{-\nu})$ — резольвента $A_{-\nu}$ в $\mathfrak{U}_{-\nu}$. Оператор $f_\nu(A_{-\nu})$ не залежить від вибору представника $f_\nu(z)$ відповідного паростка f_ν з алгебри $\mathcal{O}_{\sigma(A_{-\nu})}$ елемента $f \in \mathcal{H}_{\sigma(A)}$, тому визначений класичний неперервний гомоморфізм $\mathcal{O}_{\sigma(A_{-\nu})} \ni f_\nu \to f_\nu(A_{-\nu}) \in \mathfrak{U}_{-\nu}$. Тоді визначений неперервний гомоморфізм вигляду

$$\mathcal{H}_{\sigma(A)} \ni f \to f(A_{-M}) \equiv \{f_\nu(A_{-\nu})\} \in \lim_{\nu\to+\infty} \mathrm{pr}\, \mathfrak{U}_{-\nu} \simeq \mathfrak{U}_\tau.$$

Як відомо [7, 8], в алгебрі $\mathfrak{U}_\tau$ вірна наступна властивість відображення спектрів: $\mathrm{sp}[f(A_{-M})] = f[\mathrm{sp}(A_{-M})]$. Звідси в силу неперервності f на $\sigma(A)$ випливає включення $\overline{f[\sigma(A)]} \subset \sigma[f(A_{-M})]$. Отже, $f[\sigma(A)] \subset \overline{f[\sigma(A)]} \subset \sigma[f(A_{-M})]$. З іншого боку, в $\mathbb{C}$ існує відкритий окіл $U \supset \sigma(A)$, в який голоморфно продовжується елемент f. Тоді є відкритими множини $f(U)$ і $f[U \setminus \sigma(A)]$. Оскільки $f(U) \setminus f[U \setminus \sigma(A)] = f[\sigma(A)]$, то $\overline{f[\sigma(A)]} = f[\sigma(A)]$ і $f[\sigma(A)] = \sigma[f(A_{-M})]$.

Як і в доведенні попередньої теореми, розглянемо звуження $f(A')$ оператора $f(A_{-M})$ на підпростір $\mathcal{D}[f(A')]$ і побудуємо за ним замкнений оператор $f(A)$ над $\mathfrak{B}$. Зрозуміло, що $f(A_M) = f(A)|_{\mathcal{D}_s^M(A)}$ — спряжений до $f(A_{-M})$ відносно пари $\langle \mathcal{D}_s^M(A), \mathcal{D}_s^{-M}(A)\rangle$, тому $\sigma[f(A_M)] = \sigma[f(A_{-M})]$. Повторюючи міркування з доведення теореми 5 з заміною операторів A на $f(A)$ і A_M на $f(A_M)$, одержуємо рівність $\sigma[f(A_M)] = \sigma[f(A)]$. Таким чином, $\sigma[f(A)] = f[\sigma(A)]$.

4. Нехай $\{\lambda_n : \lambda_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \mu_k^{1/k}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — найбільша неспадна міноранта послідовності $\{\mu_k^{1/k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $M_* = \{\mu_n^* : \mu_n^* = \inf\limits_{k<n<m} (\mu_n, \mu_k^{\frac{m-n}{m-k}} \cdot \mu_m^{\frac{n-k}{m-k}}),\ \mu_0 = \mu_0^*\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — найбільша логарифмічно опукла міноранта послідовності M. Для будь-яких $k<n<m$ маємо $\log \mu_n^* \leqslant \dfrac{m-n}{m-k} \log \mu_k^* + \dfrac{n-k}{m-k} \log \mu_m^*$ і $\log \mu_n^*$ — опукла функція індексу n, зокрема, $\mu_n^{*2} \leqslant \mu_{n-1}^* \mu_{n+1}^*$. Покладаємо $a_n = \dfrac{\mu_{n-1}^*}{\mu_{n+1}^*}$ при $n \in \mathbb{N}$. З доведення теореми Данжуа — Карлемана, наведеного в [9], т. 1, гл. 1, п. 1. 2, випливає така лема.

Лема 6. *Кожна з умов*:

$$а)\ a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty; \qquad б)\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_k^*}\right)^{1/k} < \infty; \qquad в)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$$

забезпечує виконання двох інших.

Умови а) — в) називаються *умовами неквазіаналітичності послідовності M.*

Нехай задані відкрита область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і фіксовані числа $\nu > 0$ і $1 \leqslant p < \infty$. Через $L_p^\nu(\Omega)$ позначимо поповнення простору гладких функцій $\Omega \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^1$ відносно норми

$$\|\varphi\|_\nu = \left[\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\left(\frac{\|D^{(\alpha)}\varphi\|_{L_p(\Omega)}}{\nu^{|\alpha|}\mu_{|\alpha|}}\right)^p\right]^{1/p},$$

де $D^{(\alpha)}$ — оператор частинного диференціювання порядку $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Покладемо $L_p^M(\Omega) = \bigcup_{\nu > 0} L_p^\nu(\Omega)$ і через $\mathcal{D}_p^M(\Omega)$ позначимо підпростір із $L_p^M(\Omega)$ гладких функцій з компактними носіями.

Лема 7. *Якщо для послідовності M виконуються умови неквазіаналітичності, то $\mathcal{D}_p^M(\Omega) \neq \{0\}$.*

Доведення. Із згаданої теореми Данжуа — Карлемана [9] (теореми 1.3.5 і 1.3.8) випливає існування функції $\mathbb{R}^1 \ni t_1 \to \psi(t_1) \geqslant 0$, яка задовольняє умовам $|\operatorname{supp}\psi| \leqslant a$; $|D^k\psi(t_1)| \leqslant 2^k \frac{\mu_k^*}{\mu_0^*}$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+,\ t_1 \in \mathbb{R}^1)$; $\int \psi(t_1)\,dt_1 = 1$. Тоді виконуються нерівності $|D^{|\alpha|}\varphi(t)| \leqslant 2^{|\alpha|}\frac{\mu_{\alpha_1}^* \cdot \ldots \cdot \mu_{\alpha_n}^*}{\mu_0^{*n}}$, до того ж, $\operatorname{supp}\varphi \subset S_a$, де $\varphi(t) = \psi(t_1)\cdot \ldots \cdot \psi(t_n)$, $S_a = \{t \in \mathbb{R}^n : |t_k| \leqslant a;\ k = 1, \ldots, n\}$. Для послідовності M_* виконуються нерівності $\mu_{\alpha_1}^* \cdot \ldots \cdot \mu_{\alpha_n}^* \leqslant \leqslant \mu_0^{*(n-1)}\mu_{|\alpha|}^*$. Звідси одержуємо

$$\|D^{(\alpha)}\varphi\|_{L_p(\Omega)}^p \leqslant 2^{p|\alpha|}a^n\left(\frac{\mu_{|\alpha|}^*}{\mu_0^*}\right)^p \leqslant 2^{p|\alpha|}a^n\left(\frac{\mu_{|\alpha|}}{\mu_0}\right)^p,$$

тому

$$\sum_{|\alpha|}\left(\frac{\|D^{(\alpha)}\varphi\|_{L_p}}{4^{|\alpha|}\mu_{|\alpha|}}\right)^p \frac{a^n}{\mu_0^p}\sum_{|\alpha|}\frac{1}{2^{p|\alpha|}} < \infty$$

і $\varphi \in L_p^4(\Omega)$, якщо $S_a \subset \Omega$. Загальний випадок області Ω вичерпується шляхом розтягів і зсувів множини S_a.

За допомогою функції φ побудуємо функції вигляду

$$\varphi_\rho(t) = \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \varphi\left(\frac{a}{\rho}t\right),$$

де $\rho > 0$. Як видно, справедливе наступне твердження.

Наслідок 4. *В умовах твердження леми 7 для будь-якої точки $t_0 \in \Omega$ і числа $\rho > 0$ такого, що $t_0 + S_{a/\rho} \subset \Omega$ в просторі $\mathcal{D}_p^M(\Omega)$ знайдеться функція $\varphi_\rho(t) \geqslant 0$, яка задовольняє умовам*

$$\operatorname{supp}\varphi_\rho(t - t_0) \subset S_{a/\rho}\ \ i\ \int_\Omega \varphi_\rho(t)\,dt = 1.$$

Прикладами послідовностей M, для яких виконується умова ультрагладкості, а також умова $M = M_*$ логарифмічної опуклості є $\{n^{ns}\}$, $\{\Gamma(sn+1)\}$, $\{(n!)^s\}$ при $s > 0$, де Γ — функція Ейлера. Якщо $s > 1$, то вказані послідовності неквазіаналітичні.

Теорема 9. *Якщо оператор A є генератор обмеженої півгрупи класу C_0 над $\mathfrak{B}$, то для довільної неквазіаналітичної послідовності M маємо $\overline{\mathcal{D}_p^M(A)} = \mathfrak{B}$.*

Доведення. Нехай $[0, +\infty) \ni t \to T(t) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ — згадана півгрупа.

Для будь-якої функції $\varphi \in \mathcal{D}_p^M(0, +\infty)$ покладемо

$$T(\varphi)x = \int_0^\infty T(t)\varphi(t)\,xdt \quad (x \in \mathfrak{B}).$$

Тоді

$$\frac{d^k}{dt^k} T(t)\,T(\varphi)\,x = A^k T(\varphi)\,x = T(\varphi^{(k)})\,x \quad (\forall x \in \mathfrak{B}, \quad k \in \mathbb{Z}_+).$$

Звідси

$$\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\| A^k T(\varphi)\,x \|}{\nu^k \mu_k}\right)^p \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\nu^{kp}\mu_k^p} \int_0^\infty \| T(t)\,x \|^p \,|\,\varphi^{(k)}(t)\,|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^p \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\| \varphi^{(k)} \|_{L_p}}{\nu^k \mu_k}\right)^p,$$

або $\| T(\varphi)\,x \|_\nu \leqslant \gamma \| \varphi \|_\nu$, оскільки $\varphi \in \mathcal{D}_p^M(0, +\infty)$ і $\gamma = \max \| T(t)\,x \| <$ $< \infty$. Отже, $T(\varphi)\,x \in \mathcal{D}_p^M(A)$ $(\forall x \in \mathfrak{B})$. Згідно з наслідком 4 в просторі $\mathcal{D}_p^M(0, +\infty)$ існує регуляризуюча послідовність $\varphi_n(t) \geqslant 0$ така, що $\operatorname{supp} \varphi_n(t) \subset \left[0, \frac{1}{n}\right]$ і $\int_0^\infty \varphi_n(t)\,dt = 1$. Для кожного $x \in \mathfrak{B}$ покладемо $x_n =$ $= T(\varphi_n)\,x$. Маємо

$$\| x_n - x \| \leqslant \sup_{t \in [0, 1/n]} \| T(t)\,x - x \| \int_0^\infty \varphi_n(t)\,dt \to 0$$

при $n \to \infty$, в силу того, що $T(t)$ — класу C_0. Таким чином, $\overline{\mathcal{D}_p^M(A)} =$ $= \mathfrak{B}$.

При сильніших припущеннях відносно M і для дещо ширших інваріантних підпросторів подібна теорема наведена в [2].

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
2. *Lions J.-L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et application.— Paris: Dunod, 1970.— 328 p.
3. *Радыно Я. В.* Векторы экспериментального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 9.— С. 1559—1569.
4. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук.— 1989.— **44**, № 3.— С. 55—91.
5. *Радыно Я. В.* Дифференциальные уравнения в шкале банаховых пространств // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 8.— С. 1412—1422.
6. *Дубинский Ю. А.* Пределы монотонных последовательностей банаховых пространств. Приложения // Докл. АН СССР.— 1980.— **251**, № 3.— С. 537—540.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971. — 359 с.
8. *Zelazko W.* Selected topic in topological algebras // Lect. Notes.— 1971.— Ser. 31.— 176 p.
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.— М. : Мир, 1986.— 462 с.

Одержано 01.10.90