УДК 517.923

А. З. Мохонько, канд. физ.-мат. наук (Львов. политехн. ин-т)

О мероморфных решениях алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях

Получены асимптотические оценки мероморфных в угловой области $P=\{z\colon \alpha\leqslant \leqslant \arg z\leqslant\beta\}$ решений дифференциального уравнения

$$P_n(z,\ w,\ w')=P_{n-1}(z,\ w,\ w',\ \dots,\ w^{(m)}),$$

$P_n(z,\ w,\ w')$ — многочлен по всем переменным степени n относительно w и w'; $P_{n-1}(z,\ w,\ w',\ \dots,\ w^{(m)})$ — многочлен по всем переменным степени $\leqslant n-1$ относительно $w,\ w',\ \dots,\ w^{(m)}$. В частном случае целых решений эти оценки уточняют известные, получаемые методом Вимана—Валирона, который не применим к мероморфным в области P решениям.

Одержані асимптотичні оцінки мероморфних у кутовій області $P=\{z\colon\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta\}$ розв'язків диференціального рівняння

$$P_n(z,\ w,\ w')=P_{n-1}(z,\ w,\ w',\ \dots,\ w^{(m)}),$$

$P_n(z,\ w,\ w')$ — многочлен по всіх змінних степеня n відносно w та w'; $P_{n-1}(z,\ w,\ w',\ \dots,\ w^{(m)})$ — многочлен по всіх змінних степеня $\leqslant n-1$ відносно $w,\ w',\ \dots,\ w^{(m)}$. В окремому випадку цілих розв'язків ці оцінки уточнюють відомі, що одержуються методом Вімана — Валірона, який не можна застосувати до мероморфних в області P розв'язків.

Используем обозначения теории мероморфных функций [1]. Далее всюду символы $o\,(1)$, $O\,(1)$ рассматриваются при $z\to\infty$. Пусть дано дифференциальное уравнение (д. у.) ($w^{(j)}=w_j,\ 1\leqslant j\leqslant m$)

$$\sum_{i+k=n} a_{ik}(z)\,w^i w_1^k=\sum_{|K|<n}(b_K+o\,(1))\,z^{d(K)}w^{k_0}w_1^{k_1}\dots w_m^{k_m}, \tag{1}$$

$$a_{ik}(z)=\sum_{s=-\infty}^{\alpha(i,k)} c_{sik}z^{s/\mu},\quad z\in D=\{z\colon\ \alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta,\quad |z|\geqslant a\}, \tag{2}$$

$$K=(k_0,k_1,\dots,k_m),\quad |K|=k_0+k_1+\dots+k_m,\quad \mu\in\mathbb{N},\quad d\,(K)\in\mathbb{R},$$

$\alpha\,(i,\ k)\in\mathbb{Z}$; $c_{sik},\ b_K\in\mathbb{C}$, все коэффициенты д. у. (1) — аналитические в D функции. Частным случаем (1) является д. у. ($a_{ik}(z)$ определены в (2))

$$\sum_{0\leqslant i+k\leqslant n} a_{ik}(z)\,w^i w_1^k=0. \tag{3}$$

Пусть Λ_1 — множество кругов с конечной суммой радиусов. Напомним, что мероморфная функция $w\,(z)$, $z\in D$, имеет тот же порядок, что и ее неванлинновская характеристика $S\,(r,\ w)$ [1, с. 39].

Т е о р е м а. *Если $w\,(z)$, $z\in D$,— произвольное мероморфное решение (3) или мероморфная функция конечного порядка ρ, являющаяся решением д. у. (1), то: а) существуют $l\geqslant 0$ областей $\{z:\gamma_t<\arg z<\eta_t\}$, где ($r\geqslant \geqslant r\,(\varphi)$, $z=r\exp\,(i\varphi)$)*

$$\ln w\,(z)=\sum_{j=1}^{n(t)} c_{jt}z^{j/d}+c_{0t}\ln z+O\,(1),\quad z\,\bar{\in}\,\Lambda_1; \tag{4}$$

б) существуют $q\geqslant 0$ лучей $\{z:\arg z=\varphi\,(s)\}$, на которых

$$\ln|w\,(re^{i\varphi(s)})|=o\,(r^{\rho}),\quad r\,\bar{\in}\,\Delta,\quad \operatorname{mes}\Delta<\infty,\quad r\to\infty; \tag{5}$$

в) на дополнении к указанным углам и лучам

$$|w\,(re^{i\varphi})|<r^{\nu+\varepsilon},\quad r>r\,(\varphi),\quad r\,\bar{\in}\,\Delta,\quad \operatorname{mes}\Delta<\infty,\quad \varepsilon>0. \tag{6}$$

Числа ν, ρ, η_t, γ_t, C_{jt}, $n\,(t)$, $\varphi\,(s)$ определяются по виду д. у. Если в характеристическом уравнении (см. ниже (14)) отсутствует переменная L или пе-

ременная z входит только с неположительными степенями, то в области $\{z : \alpha < \arg z < \beta\} \setminus \Lambda_1$ *выполняется* (6).

Пенлеве и Гамбье [2, с. 426] установили необходимые и достаточные условия отсутствия перемещающихся критических точек в интегралах д. у. $w'' = P(z, w, w')$, P — полином от w и w' и аналитическая функция от z. Они выделили пятьдесят уравнений этого вида, большинство из них имеют только мероморфные в $\mathbb{C}$ решения. Полученная теорема применима к уравнениям Пенлеве, так уравнения Пенлеве $w'' = 6w^2 + z$ и $w'' = 2w^3 + zw + a$ имеют только мероморфные трансцендентные решения [3, с. 197], и все они конечного порядка [4]. Эти уравнения имеют вид (1) и для них выполнены условия теоремы. Из доказательства последнего утверждения теоремы следует, что для трансцендентных Пенлеве справедлива оценка $|w(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_1$. Функция Вейерштрасса $\wp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, является решением д. у. $(w')^2 = 4w^3 + b_1 w + b_2$, $b_i \in \mathbb{C}$, [5, с. 363]. Для нее на множестве $\mathbb{C} \setminus \Lambda_1$ выполняется (6). Целая функция $\cos\sqrt{z}$ является решение д. у. $w^2 + 4z(w')^2 = 1$, причем $\ln w(z) = -i\sqrt{z} + O(1)$, $0 < \arg z = \mathrm{const} < 2\pi$, т. е. справедливо (4); а на луче $\{z : \arg z = 0\}$ выполняется (5). Ранее в [6, с. 217; 7, с. 92] была показано, что если $w(z)$, $z \in \mathbb{C}$,— целое решение (1) либо мероморфное решение д. у. (3), имеющее «мало» полюсов (т. е. если дефект $\delta(\infty, w) > 0$), то $\ln M(r, w) \sim (c + o(1))\, r^\rho$, $r \notin \Delta$, $\mathrm{mes}\, \Delta < \infty$; $c, \rho = \mathrm{const}$. В данной теореме известные оценки, получаемые методом Вимана — Валирона, уточняются и переносятся на более широкий класс решений. Метод Вимана — Валирона использует возможность представления функции в $\mathbb{C}$ рядом Тейлора и поэтому неприменим к мероморфным в угловой области решениям. Если ограничиться решениями д у. (3), то утверждения (4), (6) удается улучшить, в частности, изменяя доказательство, можно показать, что оценка (4) справедлива без исключительного множества Λ_1.

В теореме предполагается, что мероморфное решение д. у. (1) имеет порядок $\rho < \infty$. Для решений д. у. (3) это требование излищне, так как в [8] показано, что любое мероморфное решение $w(z)$, $z \in D$, д. у. (3) имеет конечный порядок. Для мероморфных решений д. у. (1) это утверждение не доказано, однако известно [6], что любое целое решение (1) имеет конечный порядок.

Не умаляя общности, можно считать, что $w(z)$ определена в области $D = \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi,\ |z| \geqslant a\}$ (т. е. $\alpha = 0$, $\beta = \pi$). Действительно, введем функцию $f(\zeta) = w(\zeta^{1/k} e^{i\alpha})$, $k = \pi/(\beta - a)$. Она мероморфна в $\{\zeta : 0 \leqslant \arg \zeta \leqslant \pi,\ |\zeta| \geqslant a_1\}$ и является решением д. у., подобного (1) (соответственно (3)).

Пусть $w(z)$, $z \in D = \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi,\ |z| \geqslant a\}$, — произвольная мероморфная функция порядка $\rho < \infty$, $\{c_q\}$ — множество нулей и полюсов w в D. Для каждого $c_q = |c_q| \exp(i\theta_q) \in \{c_q\}$ построим круг с центром c_q и радиусом $\delta_q = |c_q|^{-\rho-1-(\delta/4)} \sin\theta_q$, $0 < \sigma < 1$. Пусть Λ — множество точек, лежащих в этих кругах. Тогда [9]

$$\Sigma |c_q|^{-\rho-1-(\sigma/4)} \sin\theta_q < M = \mathrm{const}, \quad c_q \in D, \tag{7}$$

$$|w^{(j)}(z)/w(z)| < M |z|^{(2\rho+2+(\sigma/2))j} / \sin^{2j}(\arg z), \quad z \in D \setminus \Lambda. \tag{8}$$

Для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим интервал $[|c_q| - \delta_q, |c_q| + \delta_q]$. Пусть Δ— множество точек, принадлежащих этим интервалам. Учитывая (7), находим, что Λ — множество кругов с конечной суммой радиусов, $\mathrm{mes}\, \Delta < \infty$.

Разделим обе части (1) на w^n, получаем равенство

$$\sum_{i+k=n} z^{-k} a_{ik}(z) (z w_1(z)/w(z))^k = \sum_{|K| \leqslant n-1} (1 + o(1))\, b_K z^{d(K)} (w_1/w)^{k_1} \ldots$$
$$\ldots (w_m/w)^{k_m} / w^{n-|K|}. \tag{9}$$

Переобозначая коэффициенты и показатели степеней, записываем (2) следующим образом:

$$a_{ik}(z) = c_{ik} (1 + o(1))\, z^{\alpha(i,k)}, \quad c_{ik} \in \mathbb{C}, \quad \alpha(i, k) \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Обозначим в (9)

$$zw_1(z)/w(z) = zw'(z)/w(z) = L(z), \tag{11}$$

$$\omega(z) = \sum_{|K| \leqslant n-1} (b_K + o(1))\, z^{d(K)} (w_1/w)^{k_1} \dots (w_m/w)^{k_m}/w^{n-|K|}. \tag{12}$$

Из (9) — (12) следует

$$\sum_{k=0}^{t} c_{ik} (1 + o(1))\, z^{\alpha(i,k)-k} L^k(z) = \omega(z),$$

$t = \max k,\ i + k = n$, или

$$\sum_{k=0}^{t} (c_{ik} + o(1))\, z^{\alpha(i,k)-k-\alpha(n-t,t)+t} L^k(z) = \omega(z)\, z^{t-\alpha(n-t,t)}. \tag{13}$$

Учитывая (13), построим характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{t} c_{ik} z^{\alpha(i,k)-k-\alpha(n-t,t)+t} L_1^k = 0. \tag{14}$$

Оно имеет [7, с. 69] конечное число решений

$$L_1(z) = (1 + o(1))\, \beta_s z^{\rho(s)}, \quad 1 \leqslant s \leqslant t, \quad \rho(s) \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Числа β_s, $\rho(s)$ можно найти с помощью ломаной Ньютона. Пусть

$$h = \max|\beta_s|; \qquad \tau = \max\{k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m): |K| < n\}, \tag{16}$$

$$\nu = \max[h, \max\{d(K) - \alpha(n-t, t) + t + (2\rho + 2)\tau : |K| < n\}]. \tag{17}$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим множество

$$F = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \quad |z| > (\sin(\arg z))^{-4/\sigma}\}. \tag{18}$$

Для любого δ, $0 < \delta < \pi/2$, $\exists d = d(\delta)$:

$$Q = \{z : |z| \geqslant d, \quad \delta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \delta\} \subset F. \tag{19}$$

Если $z \in F \setminus \Lambda$, то, учитывая (8), (16), (18) ($c = \text{const}$) получаем соотношения

$$\left(\frac{w_1}{w}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{w_m}{w}\right)^{k_m} < c\,|z|^{(2\rho+2+\sigma/2)\tau} \sin^{-2\tau}(\arg z) < c\,|z|^{(2\rho+2+\sigma)\tau}. \tag{20}$$

Рассмотрим множества

$$E_1 = \{z : z \in F \setminus \Lambda, \quad |w(z)| \geqslant |z|^{\nu+\varepsilon}\}, \quad E_2 = F \setminus (E_1 \cup \Lambda), \tag{21}$$

где ν определено в (17), а $\varepsilon = (\tau + 1)\sigma > 0$. Из (12), (13), (17), (20), (21) следует

$$\sum_{k=0}^{t} c_{ik} (1 + o(1))\, z^{\alpha(i,k)-k-\alpha(n-t,t)+t} L^k(z) = o(1), \quad z \in E_1. \tag{22}$$

Если (22), (14) не зависят от L, то в левой части (1) только одно слагаемое $a_{n0}(z)\, w^n$ имеет по w и w' степень n и $\exists d$ такое, что $E_1 \cap \cap \{z : |z| > d\} = \varnothing$. Действительно, в противном случае (22) имеет вид $c_{n0}(1 + o(1)) = o(1)$, $z \in E_1$, т. е. $c_{n0} = 0$, получено противоречие. Поэтому из (21) следует $|w(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in F \setminus \Lambda$, $|z| > d$. Тем самым соответствующее утверждение теоремы доказано. Если уравнение (22) зависит от L, то оно имеет конечное число решений [7, с. 69]

$$L(z) = (1 + o(1))\, \beta_s z^{\rho(s)}, \quad z \in E_1, \quad z - \infty, \quad 1 \leqslant s \leqslant t. \tag{23}$$

Выберем достаточно большое r_0 так, чтобы $w(r_0e^{i\varphi}) \neq 0, \infty$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$,

$$0 < c < |w(r_0e^{i\varphi})| < C, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi; \qquad c, C = \mathrm{const}. \tag{24}$$

Пусть $z_* \in E_1, |z| \geqslant r_0$. Рассмотрим связную компоненту E_0 множества E_1, содержащую точку z_*. В каждой точке $z \in E_0$ выполняется одно из соотношений (23). Если r_0 достаточно велико, то ни в одной точке $z \in E_0$ не могут быть равными правые части двух соотношений из (23) с индексами s и j таких, что $|\beta_s - \beta_j| + |\rho(s) - \rho(j)| > 0$. В точке $z_* \in E_0$ справедливо (23) с некоторым фиксированным s. Учитывая непрерывность функции $L(z)$, получаем, что то же соотношение верно $\forall z \in E_0$. Из (23), (11) следует, что $A\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$, $\exists r_0 > 0$:

$$w'(z)/w(z) = (\beta + u(z)) z^{\rho-1}, \quad z \in E_0, \quad |u(z)| < \delta, \tag{25}$$

$z| > r_0$, $u(z)$ — некоторая функция, β, ρ зависят от E_0; β, ρ — одно из чисел β_s, $\rho(s)$.

Пусть точка $z_0 = r_0 \exp(i\varphi) \bar{\in} \Lambda$. Через $S = S(\varphi)$ обозначим кривую, которая получается при движении от точки z_0 по лучу $\{z : \arg z = \varphi\}$ с обходом кругов из Λ (см. (8)) по дугам окружностей $\{z : |z - c_q| = \delta_q\}$. Если $E_1 \cap S = \varnothing$, то из (21) следует

$$|w(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in S. \tag{26}$$

Пусть $E_1 \cap S \neq \varnothing$. Множество $E_1 \cap S$ можно представить в виде объединения связных компонент ω_t таких, что

$$|w(z)| \geqslant |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in \omega_t, \tag{27}$$

причем, если z_{1t} — начало, z_{2t} — конец ω_t, и $|z_{1t}| > r_0$, $|z_{2t}| < \infty$, то

$$|w(z_{1t})| = |z_{1t}|^{\nu+\varepsilon}, \quad |w(z_{2t})| = |z_{2t}|^{\nu+\varepsilon}. \tag{28}$$

Для $z \in \omega_t$ выполняется (25), $\rho = \rho(t)$, $\beta = \beta(t)$. Через $\{\omega_t\}$ обозначим множество всех ω_t на $S(\varphi)$. Пусть ω_t^+ (соответственно ω_t^-) — те из кривых $\omega_t \in \{\omega_t\}$, для которых в (25) $\rho > 0$ $(\rho \leqslant 0)$. Кривая ω_t состоит из отрезков прямой (обозначим их через γ) и дуг окружностей (обозначим их через Γ). В силу (7) общая длина Γ меньше $2\pi M$. Согласно (25) для $s \in \omega_t^-$, $|w'(s)/w(s)| < (|\beta| + \delta)/|s|$. Поэтому, интегрируя (25) на ω_t^-, получаем (далее используем формулы (25) — (28), индекс t будем опускать, $c_1 = \mathrm{const}$, $|z| = r$, $|z_1| = r_1 > 1$) соотношения

$$\ln|w(z)/w(z_1)| \leqslant \left| \int_\gamma w'(s)/w(s)\,ds + \int_\Gamma w'(s)/w(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant (|\beta| + \delta)\left(\int_{r_1}^{r} dx/x + 2\pi M/r_1\right) = (|\beta| + \delta)\ln(r/r_1) + c_1 \tag{29}$$

$(\delta < \varepsilon)$. Если $r_1 > r_0$, то, учитывая (28), (29), (17), $\ln|w(z_1)| = (\nu + \varepsilon) \times \ln r_1$, и $\ln|w(z)| < (|\beta| + \delta)\ln(r/r_1) + (\nu + \varepsilon)\ln r_1 + c_1 < (\nu + \varepsilon)\ln r$. Если $r_1 = r_0$, то из (24), (17), (29) следует $\ln|w(z_1)| < \ln C$, и $\ln|w(z)| < (|\beta| + \delta)\ln r + \ln C + c_1 < (\nu + \varepsilon)\ln r$, $|z| = r > r(\varphi)$. Окончательно получаем $|w(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in \omega_t^-$, $|z| > r(\varphi)$, что противоречит (27). Итак,

$$\omega_t^- \cap \{z : |z| \geqslant r(\varphi)\} = \varnothing. \tag{30}$$

Если в равенство (15) переменная z входит только с неположительными степенями, то [7, с. 41] для всех решений (23) $\rho(s) \leqslant 0$. Следовательно, на кривой $S(\varphi)$ частей ω_t^+ нет. Поэтому, принимая во внимание (30), (27) (21), получаем $S(\varphi) \cap \{z : |z| \geqslant r(\varphi)\} \subset E_2$. Так как $0 < \varphi < \pi$, φ произвольное, то в рассматриваемом случае на множестве $\{z : 0 < \arg z < \pi\} \setminus \Lambda$ выполняется (6) и теорема доказана.

Покажем, что $\forall\theta_1, \theta_2, 0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi, \exists\varphi, \theta_1 < \varphi < \theta_2$:

$$\{z : \arg z = \varphi = \text{const}, \quad |z| > d\} \cap \Lambda = \varnothing, \quad d = 2\pi M/(\theta_2 - \theta_1), \qquad (31)$$

т. е. если через Φ обозначить множество тех значений φ, $0 < \varphi < \pi$, для которых луч $\{z : \arg z = \varphi, \ |z| > d(\varphi)\} \cap \Lambda = \varnothing$, то множество Φ всюду плотно в $]0, \pi[$. Действительно, если это не так, то $\exists\theta_1, \theta_2, 0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi, \forall\varphi \in]\theta_1, \theta_2[$:

$$\{z : \arg z = \varphi = \text{const}, \quad |z| > d = 2\pi M/(\theta_2 - \theta_1)\} \cap \Lambda \neq \varnothing. \qquad (32)$$

Пусть δ_q — радиусы кругов b_q, составляющих множество Λ. Сумма длин окружностей — границ кругов b_q — меньше $2\pi M$ (см. (7)). Спроектируем круг b_q на окружность $\{z : |z| = d\}$ так, чтобы точке $r \exp(i\varphi) \in b_q$, $r > d$, ставилась в соответствие точка $d \exp(i\varphi)$. При этом круг b_q проектируется на дугу $l_q \subset \{z : |z| = d\}$. Если $|l_q|$ — длина дуги l_q, то $|l_q| < 2\pi\delta_q$, $\Sigma |l_q| < \Sigma 2\pi\delta_q < 2\pi M$ (см. (7)), Из (32) следует, что дуги l_q, являющиеся проекциями кругов b_q, полностью накрывают дугу $l = \{z : |z| = d, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$. Поэтому, учитывая, что $d = 2\pi M/(\theta_2 - \theta_1)$ (см. (31)), имеем $2\pi M = (\theta_2 - \theta_1) d =$ длина $l < \Sigma |l_q| < 2\pi M$. Получено противоречие, утверждение (31) доказано.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Тогда можно выбрать r_0 так, чтобы выполнялось

$$\{z : \arg z = \varphi, \quad |z| \geqslant r_0\} \cap \Lambda = \varnothing. \qquad (33)$$

Отсюда следует, что определенная выше кривая $S(\varphi) = S$ является лучом $S = \{z : \arg z = \varphi, |z| \geqslant r_0\}$, а определенная в (27), (28) часть $\omega_l \subset S$ — отрезком прямой.

Пусть существует отрезок $\omega_l^+ \subset S$. Интегрируя (25) на ω_l^+, выделяя действительные части, получаем ($q(z)$, $v(z)$ — некоторые функции, $\beta = |\beta| \exp(i\alpha)$, $\rho > 0$, $\zeta = |\beta|/\rho > 0$, $|z_1| = r_1$) равенства

$$\ln(w(z)/w(z_1)) = (z^\rho - z_1^\rho)(\beta\rho^{-1} + v(z)), \quad z = re^{i\varphi}, \qquad (34)$$

$$\ln|w(z)/w(z_1)| = (r^\rho - r_1^\rho)(\zeta\cos(\rho\varphi + \alpha) + q(z)), \qquad (35)$$

$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$; $|v(z)|$, $|q(z)| < \delta/\rho$, $\delta > 0$ как угодно малое (см. (25)). Есть два случая: а) один из отрезков ω_l^+ имеет бесконечную длину; б) все $\omega_l^+ \subset S$ имеют конечную длину.

Рассмотрим случай а). Если в (35) $\cos(\rho\varphi + \alpha) = 0$, то $\varphi = \varphi_j$,

$$\varphi_j = (\pi + 2\pi j)/2\rho - \alpha/\rho, \quad 0 < \varphi_j < \pi, \qquad (36)$$

j — некоторые целые числа, ρ, α, j принимают конечное число значений ($0 < \varphi_j < \pi$) и

$$\ln|w(r\exp(i\varphi_j))| = o(r^\rho), \quad r \to \infty. \qquad (37)$$

Если на отрезке ω_l^+ бесконечной длины $\cos(\rho\varphi + \alpha) < 0$, то из (35) следует (считаем δ настолько малым, что $\zeta\cos(\rho\varphi + \alpha) + \delta\rho^{-1} < 0$), $|w(z)| < |w(z_1)|$, $\forall z \in \omega_l^+$, что противоречит (27). Если в (35) $\cos(\rho\varphi + \alpha) > 0$, то

$$\ln|w(z)| = (\zeta\cos(\rho\varphi + \alpha) + o(1))\, r^\rho, \quad z = re^{i\varphi}, \quad r \to \infty. \qquad (38)$$

Существует такое целое k, что $|\rho\varphi + \alpha - 2\pi k| < \pi/2$. Выберем φ_1, удовлетворяющее условиям $\varphi < \varphi_1$ и $\pi/2\rho > |\varphi_1 - (2\pi k - \alpha)/\rho| > |\varphi - (2\pi k - \alpha)/\rho|$. Тогда

$$\cos(\rho\theta_* + \alpha) \geqslant \cos(\rho\varphi_1 + \alpha) > 0, \quad \varphi < \theta_* \leqslant \varphi_1. \qquad (39)$$

Отрезок $\omega_l^+ \subset E_0$ — связной компоненте E_1. Покажем, что $\exists d$:

$$\{z : \varphi \leqslant \arg z \leqslant \varphi_1, \quad |z| \geqslant d\} \setminus \Lambda_1 \subset E_0, \qquad (40)$$

Λ_1 — множество кругов с конечной суммой радиусов. Через $H(r)$ обозначим кривую, получаемую при движении от точки $z = re^{i\varphi} \in S(\varphi)$ по дуге $\{z : r\exp(i\theta), \varphi \leqslant \theta \leqslant \pi\}$, с обходом кругов с центрами в c_q (см. (7)) по дугам окружностей $\{z: |z - c_q| = \delta_q\}$ (обозначим эти последние дуги через $\varkappa$). Пусть θ_* — наибольшее значение такое, что кривая $h(r) = \{z : z \in H(r), z = r(\theta) \exp(i\theta), \varphi \leqslant \theta \leqslant \theta_*\} \subset E_0$. Предположим, то $\theta_* < \varphi_1$. Из определения связной компоненты E_0 следует равенство

$$|w(r(\theta_*) e^{i\theta_*})| = (r(\theta_*))^{\nu+\varepsilon}. \tag{41}$$

Кривая $h(r)$ состоит из дуг окружности $\{z : |z| = r\}$ и дуг $\varkappa$. Общая длина дуг $\varkappa$ меньше $2\pi M$ (см. (7)), поэтому $|r(\theta) - r| < 2\pi M$,

$$r(\theta) = r + O(1), \quad r(\theta) \exp(i\theta) \in h(r), \quad r \to \infty. \tag{42}$$

Интегрируя (25) по $h(r)$, выделяя действительные части, учитывая (42), получаем $\ln|w(r(\theta_*) e^{i\theta_*})/w(z)| = \zeta r^\rho [\cos(\rho\theta_* + \alpha) - \cos(\rho\varphi + \alpha) + o(1)]$, $\zeta = |\beta|/\rho$. Отсюда и из (38), (41), (42) следует $\ln r^{\nu+\varepsilon} = \zeta r^\rho [\cos(\rho\theta_* + \alpha) - \cos(\rho\varphi + \alpha) + o(1)] + (\zeta \cos(\rho\varphi + \alpha) + o(1)) r^\rho = \zeta r^\rho (\cos(\rho\theta_* + \alpha) + o(1))$. Учитывая (39), видим, что это равенство при достаточно больших r невозможно. Поэтому $\theta_* \geqslant \varphi_1$ и (40) доказано. Обозначим

$$\eta = (2\pi k - \alpha)/\rho - \pi/2\rho, \quad \gamma = (2\pi k - \alpha)/\rho + \pi/2\rho, \tag{43}$$

k — целое число, определенное выше. Подобно (40) доказывается, что $\forall \varphi_1, \varphi_2, \max(0, \eta) < \varphi_1 < \varphi_2 < \min(\pi, \gamma), \exists d$:

$$P = \{z : \varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2, \quad |z| \geqslant d\} \setminus \Lambda_1 \subset E_0 \tag{44}$$

— связной компоненте E_1, $w(d \exp(i\theta)) \neq 0, \infty$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Через Γ обозначим кривую, получаемую при движении точки z последовательно по отрезку $\{z : \arg z = \varphi, d \leqslant |z| \leqslant r\} \subset P$ и по дуге $\{z : |z| = r, \varphi \leqslant \arg z \leqslant \theta\} \subset P$ с обходом кружков из Λ по дугам окружностей, ограничивающих их; $z_1 = d \exp(i\varphi)$ — начало, $z = r \exp(i\theta)$ — конец Γ. Интегрируя (25) по $\Gamma \subset E_0$, получаем соотношения

$$\begin{gathered} \ln(w(z)/w(z_1)) = \beta\rho^{-1}(z^\rho - z_1^\rho) + \int_\Gamma u(s) s^{\rho-1} ds, \\ \Big|\int_\Gamma u(s) s^{\rho-1} ds\Big| < \delta(\rho^{-1}(r^\rho - d^\rho) + r^\rho|\theta - \varphi| + (r + 2\pi M)^{\rho-1} 2\pi M). \end{gathered} \tag{45}$$

Оценка (45) равномерна в области P (44). Так как φ_1, φ_2 выбирались произвольно, $\eta < \varphi_1 < \varphi_2 < \gamma$, то из (45) следует ($z = r \exp(i\theta) \bar{\in} \Lambda_1$)

$$\ln w(re^{i\theta}) = (\beta\rho^{-1} + o(1))(re^{i\theta})^\rho, \quad \eta < \theta < \gamma, \quad r > r(\theta). \tag{46}$$

Выделяя в (46) действительные части, получаем ($\zeta = |\beta|/\rho$) равенство

$$\ln|w(re^{i\theta})| = (\zeta \cos(\rho\theta + \alpha) + o(1)) r^\rho, \quad \eta < \theta < \gamma, \quad \rho > 0, \tag{47}$$

$r > r(\theta)$, $r \exp(i\theta) \bar{\in} \Lambda_1$. Оценки (46), (47) равномерные по θ на любом интервале $[\varphi_1, \varphi_2] \subset]\eta, \gamma[$; $\cos(\rho\theta + \alpha) > \varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) > 0$, $\varphi_1 \leqslant \theta \leqslant \varphi_2$.

Рассмотрим случай б). Для $z \in \omega_t^+$ выполняются (28), (35), $\arg z = \varphi$, $\rho > 0$. Существует такое $r(\varphi)$, что если для отрезка ω_t^+ выполняется $r_{1t} = r_1 > r(\varphi)$, то $\cos(\rho\omega + \alpha) = 0$. Действительно, пусть $\cos(\rho\varphi + \alpha) \neq 0$. Подставляя (28) в (35), получаем

$$(\nu + \varepsilon) \ln(r_2/r_1) = (\zeta + o(1))(r_2^\rho - r_1^\rho) \cos(\rho\varphi + \alpha); \qquad \rho, \zeta > 0. \tag{48}$$

Если $\cos(\rho\varphi + \alpha) < 0$, то левая и правая части (48) имеют разные знаки, что невозможно. Если $\cos(\rho\varphi + \alpha) > 0$, то из (48) следует $(\nu + \varepsilon)\rho^{-1} \times \ln(r_2^\rho/r_1^\rho) > \zeta 2^{-1}(r_2^\rho - r_1^\rho) \cos(\rho\varphi + \alpha)$ или

$$C(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1, \quad x_1 = r_1^\rho < x_2 = r_2^\rho, \tag{49}$$

$C = 2(\nu + \varepsilon)/\zeta\rho \cos(\rho\varphi + \alpha)$. Функция $x - C \ln x$ возрастает на $]C, +\infty[$. Поэтому (49) не выполняется, если r_1 (следовательно, x_1) достаточно большое, т. е. $r_1 > r(\varphi)$, а значит,

$$\omega_t^+ \cap \{z : \arg z = \varphi = \text{const},\ \cos(\rho\varphi + \alpha) \neq 0,\ |z| \geqslant r(\varphi)\} = \varnothing. \quad (50)$$

Если на ω_t^+ выполняется $\cos(\rho\varphi + \alpha) = 0$ (таких $\varphi, 0 < \varphi < \pi$, существует конечное число), то из (35), (28) следует неравенство

$$\ln |w(re^{i\varphi})/r_1^{\nu+\varepsilon}| < \delta(r^\rho - r_1^\rho)/\rho, \quad re^{i\varphi} \in \omega_t^+, \quad \varphi = \varphi_j \quad (51)$$

(см. (36)) $r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < +\infty$, $\delta > 0$ как угодно малое. Поэтому если $\varphi = \varphi_j$, то, учитывая (30), (50), (51) и то, что $|w(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in E_2$, получаем

$$\ln |w(re^{i\varphi})| < \delta r^\rho/\rho, \quad r > r(\varphi), \quad \varphi = \varphi_j, \quad \varphi \in \Phi, \quad (52)$$

$\delta > 0$ как угодно малое, $\rho = \max \rho(t)$, максимум берется по $\rho(t)$, которые соответствуют отрезкам $\omega_t^+ \subset \{z : \arg z = \varphi = \text{const},\ |z| \geqslant r(\varphi)\}$.

Итак, если на луче $S(\varphi) = \{z : \arg z = \varphi = \text{const}\}$, $\varphi \in \Phi$, один из отрезков ω_t^+ имеет бесконечную длину и $\cos(\rho\varphi + \alpha) \neq 0$, то существует угловая область $P_j = \{z : \eta_j < \arg z < \gamma_i\} \supset S(\varphi)$, на которой выполняется (46). В (43) величины α, ρ, k, а следовательно, η, γ принимают конечное число возможных значений η_j, γ_j. Поэтому и угловых областей P_j тоже конечное число. Если отрезок бесконечной длины $\omega_t^+ \subset S(\varphi)$ и $\cos(\rho\varphi + \alpha) = 0$, то $\varphi = \varphi_j$, (36). Существует конечное число возможных значений φ_j и соответственно конечное число лучей $S(\varphi_j) = \{z : \arg z = \varphi_j\}$, на которых справедливы (37), (52). Пусть $\bar{P}_j = \{z : \eta_j \leqslant \arg z \leqslant \gamma_j\}$. Рассмотрим множество $(\cup \bar{P}_j) \cup (\cup S(\varphi_j))$ (суммы берутся по всем указанным углам и лучам). Множество

$$R = \{z : 0 < \arg z < \pi\} \diagdown \{(\cup \bar{P}_j) \cup (\cup S(\varphi_j))\} \quad (53)$$

состоит из конечного числа открытых угловых областей. Если луч $S(\varphi) \subset R$ и $\varphi \in \Phi$, то $S(\varphi)$ не содержит отрезка ω_t^+ бесконечной длины и $\varphi \neq \varphi_j$ (см. (36)) (иначе $S(\varphi) \subset (\cup P_j) \cup (\cup S(\varphi))$. Тогда согласно (30), (50), (21) для некоторого $r(\varphi)$ выполняется $S(\varphi) \cap \{z : |z| \geqslant r(\varphi)\} \subset E_2$ и

$$|w(re^{i\varphi})| < r^{\nu+\varepsilon}, \quad r > r(\varphi), \quad \varphi \in \Phi, \quad re^{i\varphi} \in R. \quad (54)$$

Рассмотрим произвольный луч $\{z : \arg z = \varphi\} \subset R$. Тогда $S = \{z : \arg z = \varphi,\ |z| \bar{\in} \Delta,\ \text{mes}\,\Delta < \infty\}$ — луч, из которого удалено множество отрезков Δ с конечной суммой длин (см. (7)). Если $E_1 \cap S = \varnothing$, то выполняется (26). Пусть $E_1 \cap S \neq \varnothing$. Как и ранее, множество $E_1 \cap S$ можно представить в виде суммы «максимальных» отрезков $\omega_t = \{z : \arg z = \varphi,\ r_{1t} \leqslant |z| \leqslant r_{2t}\} \subset E_1 \cap S$ таких, что

$$|w(z)| \geqslant |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in \omega_t \subset E_1; \qquad z_{1t} = z_1, \quad z_{2t} = z_2 \in \omega_t, \quad (55)$$

$r_1 = |z_1| < r_2 = |z_2|$. Множество Φ значений φ, для которых выполняется (31), всюду плотно на $]0, \pi[$. Поэтому, учитывая (54), видим, что $\exists \psi(1), \psi(2)$:

$$\psi(1) \leqslant \varphi \leqslant \psi(2), \quad \psi(2) - \psi(1) < \delta < \pi/\rho, \quad |w(re^{i\psi(j)})| < r^{\nu+\varepsilon}, \quad (56)$$

$j = 1, 2$. Пусть $z \in \omega_t \subset E_0$ — связной компоненте E_1 (см. (21)), $|z| = r$. Рассмотрим «минимальную» дугу $\Gamma = \{z : |z| = r,\ \theta(1) \leqslant \arg z = \theta \leqslant \theta(2)\} \subset E_0 \subset E_1$, где $\theta(1) = \max\{\theta : 0 \leqslant \theta \leqslant \varphi,\ |w(re^{i\theta})| = r^{\nu+\varepsilon};\ \theta(2) = \min\{\theta, \varphi \leqslant \theta \leqslant \pi,\ |w(re^{i\theta})| = r^{\nu+\varepsilon}\}$. Принимая во внимание (56), находим, что $\psi(1) \leqslant \theta(1) \leqslant \varphi \leqslant \theta(2) \leqslant \psi(2)$,

$$\theta(2) - \theta(1) < \delta < \pi/\rho, \quad |w(re^{i\theta(j)})| = r^{\nu+\varepsilon}, \quad j = 1, 2. \quad (57)$$

На ω_t выполняется (35).

А) Предположим, что в (35) $\cos(\rho\varphi + \alpha) \neq \pm 1$. В (56) $\psi(1), \psi(2)$ можно выбрать так, чтобы $\cos(\rho\theta + \alpha) \neq \pm 1$, $\psi(1) \leqslant \theta \leqslant \psi(2)$. Тогда

$$|\sin(\rho\theta + \alpha)| \geqslant \text{const} > 0, \quad \psi(1) \leqslant \theta \leqslant \psi(2). \quad (58)$$

Из (57), (58) следует $\psi(1) \leqslant (\theta(2) + \theta(1))/2 \leqslant \psi(2)$ и

$$|\sin(\rho(\theta(2) + \theta(1))/2 + \alpha)| > c = \text{const} > 0. \tag{59}$$

Так как ρ и α имеют конечное число возможных значений, $\psi(1)$, $\psi(2)$ фиксированные, то в (59) c можно выбрать одно и то же для всех ω_t. Отметим, что $2\theta/\pi \leqslant \sin\theta$, если $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, поэтому

$$\rho(\theta(2) - \theta(1))/\pi \leqslant \sin[\rho(\theta(2) - \theta(1))/2]. \tag{60}$$

Интегрируя (25) по дуге $\Gamma \subset E_0$, выделяя действительные части и учитывая (57), (59), (60), получаем ($u(r)$ — некоторая функция, $|u(r)| < \delta$, $\zeta = |\beta|/\rho$)

$$0 = \ln|w(re^{i\theta(2)})/w(re^{i\theta(1)})| = r^\rho|\zeta(\cos(\rho\theta(2) + \alpha) - \cos(\rho\theta(1) + \alpha)) +$$
$$+ u(r)(\theta(2) - \theta(1))| \geqslant r^\rho(\zeta 2\sin[\rho(\theta(2) - \theta(1))/2]\,|\sin[\rho(\theta(2) + \theta(1))/2 + \alpha]| -$$
$$- \delta(\theta(2) - \theta(1))) \geqslant r^\rho(\zeta 2\rho c/\pi - \delta)(\theta(2) - \theta(1)) > 0, \tag{61}$$

если $\delta < \zeta 2\rho c/\pi$ и $\theta(2) - \theta(1) > 0$. Соотношение (61) противоречиво. Остается предположить, что $\theta(1) = \theta(2) = \varphi$, и из (57) следует $|w(z)| = |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z = re^{i\varphi} \in S \cap E_1$, $r \geqslant r(\varphi)$, а так как $|w(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in S \cap E_2$ (см. (21)), то в итоге получаем

$$|w(z)| \leqslant |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z = re^{i\varphi} \in S, \quad \cos(\rho\varphi + \alpha) \neq \pm 1, \quad r > r(\varphi), \tag{62}$$

т. е. выполняется (6).

Б). Предположим, что в (35) $\cos(\rho\varphi + \alpha) = \pm 1$. Тогда

$$\varphi = \varphi(k) = (k\pi - \alpha)/\rho, \tag{63}$$

k — некоторые целые числа; ρ, α, k принимают конечное число значений $(0 < \varphi(k) < \pi)$. Покажем, что для $\varphi = \varphi(k)$ выполняется (5). Рассмотрим отрезок $\omega_t \subset S \cap E_1$. Согласно (55), (56) $|w(r_1e^{i\psi(1)})| < r_1^{\nu+\varepsilon}$, $|w(r_1e^{i\varphi})| \geqslant r_1^{\nu+\varepsilon}$, $|w(r_2c^{i\psi(1)})| < r_2^{\nu+\varepsilon}$, $|w(r_2e^{i\varphi})| \geqslant r_2^{\nu+\varepsilon}$. Поэтому $\exists z', z''$:

$$|w(z')| = r_1^{\nu+\varepsilon}, \quad z' = r_1e^{i\nu(1)}, \quad \varphi - \delta < \nu(1) \leqslant \varphi, \quad \Gamma_1 = \{z : |z| = r_1,$$
$$\nu(1) \leqslant \arg z \leqslant \varphi\} \subset E_1; \tag{64}$$
$$|w(z'')| = r_2^{\nu+\varepsilon}, \quad z'' = r_2e^{i\nu(2)}, \quad \varphi - \delta < \nu(2) \leqslant \varphi, \quad \Gamma_2 = \{z : |z| = r_2,$$
$$\nu(2) \leqslant \arg z \leqslant \varphi\} \subset E_1.$$

Из (55), (64) следует, что связное множество $\lambda = \Gamma_1 \cup \omega_t \cup \Gamma_2 \subset E_0 \subset E_1$. Через $\lambda(z)$ обозначим часть λ от точки $z' \in \lambda$ до $z = re^{i\theta(r)} \in \lambda$, $\varphi - \delta < \theta(r) \leqslant \varphi$. Интегрируя (25) по $\lambda(z)$, выделяя действительные части, получаем

$$\ln|w(z)/w(z')| = \zeta(r^\rho\cos(\rho\theta(r) + \alpha) - r_1^\rho\cos(\rho\nu(1) + \alpha)) + v(z),$$
$$v(z) = \operatorname{Re}\int_{\lambda(z)} u(t)\, t^{\rho-1}dt, \quad |u(t)| < \delta. \tag{65}$$

Если $z \in \omega_t \subset \lambda$, $|z| = r$, то из (64), (65) следует ($c_1, c_2 = \text{const}$) $|v(z)| < \delta r_1^\rho(\varphi - \nu(1)) + \delta(r^\rho - r_1^\rho)/\rho < c_1\delta r^\rho$; если $z \in \Gamma_2$, $|z| = r_2$, то $|v(z)| < \delta(r_1^\rho(\varphi - \nu(1)) + (r_2^\rho - r_1^\rho)/\rho + r_2^\rho(\varphi - \nu(2))) < \delta c_2 r^\rho$. Поэтому

$$|v(z)| < \delta c_3 r^\rho, \quad z \in \lambda, \quad |z| = r, \quad c_3 = \text{const} \tag{66}$$

Так как $|\cos(\rho\varphi + \alpha) - \cos(\rho\theta + \alpha)| \leqslant \rho(\varphi - \theta) < \rho\delta$, если $\varphi - \delta < \theta \leqslant \varphi$, то согласно (65), (66) ($u_1(t)$ — некоторая функция такая, что $|u_1 \times (t)| < \delta\rho$, $t \in \lambda$)

$$\ln|w(z)/w(z')| = \zeta((r^\rho - r_1^\rho)\cos(\rho\varphi + \alpha) + u_1(r)\, r^\rho + u_1(r_1)\, r_1^\rho) + v(z). \tag{67}$$

Пусть в (67) $\cos(\rho\varphi + \alpha) \leqslant 0$, тогда, учитывая (64), (66), получаем

$$\ln|w(z)| \leqslant \ln r_1^{\nu+\varepsilon} + \delta a|z|^{\rho}, \quad a = \text{const}, \quad z \in \omega_t. \tag{68}$$

Если в (67) $\cos(\rho\varphi + \alpha) > 0$ и $z = z''$, $|z''| = r_2$, то, учитывая (64), (66) и обозначая $A = \zeta\cos(\rho\varphi + \alpha) > 0$, $B = 2\zeta\rho + a$, можем записать

$$(\nu + \varepsilon)\ln(r_2/r_1) \geqslant A(r_2^{\rho} - r_1^{\rho}) - B\delta r_2^{\rho}, \quad a = \text{const}. \tag{69}$$

Предположим, что в (69) $B\delta r_2^{\rho} < A(r_2^{\rho} - r_1^{\rho})/2$. Тогда

$$(\nu + \varepsilon)\rho^{-1}\ln(r_2^{\rho}/r_2^{\rho}) > A(r_2^{\rho} - r_1^{\rho})/2 \text{ или } (C = 2(\nu + \varepsilon)/A\rho)$$

$$C(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1, \quad x_2 = r_2^{\rho} > x_1 = r_1^{\rho}. \tag{70}$$

Функция $x - C\ln x$ при $x > C$ возрастающая, поэтому (70) невозможно, если x_1 (следовательно, r_1) достаточно большое. Предположим, что $B\delta r_2^{\rho} \geqslant A(r_2^{\rho} - r_1^{\rho})/2$, т. е. $Ar_1^{\rho}2^{-1} \geqslant (A2^{-1} - B\delta)r_2^{\rho}$. Тогда $Ar_1^{\rho}2^{-1} \geqslant (A2^{-1} - B\delta)r^{\rho}$, $r \leqslant r_2$, или

$$A(r^{\rho} - r_1^{\rho})/2 \leqslant B\delta r^{\rho}, \quad r \leqslant r_2. \tag{71}$$

Если учесть (64), (66), (71) и то, что $A = \zeta\cos(\rho\varphi + \alpha)$, $|u_1(t)| < \delta\rho$, $t \in \lambda$, то из (67) следует $\ln|w(z)| < (\nu + \varepsilon)\ln r_1 + \delta[2B + 2\rho\zeta + c_3]|z|^{\rho}$. Отсюда и из (68) следует равенство (5) ($\delta > 0$ как угодно мало).

Осталось рассмотреть поведение $w(z)$ на лучах $\{z : \arg z = \eta_j\}$, $\{z : \arg z = \gamma_j\}$, ограничивающих углы $P_j = \{z : \eta_j < \arg z < \gamma_j\}$ (см. (43)). Незначительно изменяя доказательство, использованное выше для луча $\{z : \arg z = \varphi(k)\}$ (см. (63)), можно показать, что на этих лучах также выполняется оценка (5). Ранее было показано, что в угловой области P_j выполняются (46), (47), т. е. получено первое слагаемое асимптотики (4). Завершим доказательство. Для этого, учитывая (11), (12), записываем (9):

$$L^q(z)\sum_{k=q}^{m+q} z^{-k}a_{ik}(z)\,L^{k-q}(z) = \omega(z), \quad q \geqslant 0. \tag{72}$$

Переобозначая коэффициенты и индексы (см. (2)), произведение $z^{-k}a_{ik}(z$ можно представить в виде ($j = k - q$, $i = n - k$)

$$z^{-k}a_{ik}(z) = \sum_{s=-\infty}^{\tau(j)} b_{sj}z^{s/\mu(j)} = R_j(z), \quad b_{sj} \in \mathbb{C}, \tag{73}$$

$\tau(j) \in \mathbb{Z}$, $\mu(j) \in \mathbb{N}$. Из (72), (73) следует равенство

$$F(z, L) = L^q\sum_{j=0}^{m} R_j(z)\,L^j = L^qF_1(z, L) = \omega(z), \quad R_0 \not\equiv 0. \tag{74}$$

Лемма. *Пусть $W \subset \mathbb{C}$, W — неограниченная область. Если непрерывная функция $L(z)$, $z \in W$, является решением уравнения* (74), (73), *где* $\omega(z)$, $z \in W$,— *непрерывная функция такая, что*

$$\forall s > 0: \qquad \omega(z) = o(z^{-s}), \quad z \in W, \quad z \to \infty, \tag{75}$$

то $\forall s > 0$:

$$L(z) = \sum_{j=-s}^{n} c_jz^{j/d} + o(z^{-s/d}), \quad z \in W, \quad z \to \infty, \tag{76}$$

$d \in \mathbb{N}$. *Ряд* $\sum_{j=-\infty}^{n} c_jz^{j/d}$ *является элементом алгебраической функции, определяемой уравнением* $F(z, L) = 0$.

Доказательство леммы аналогично известному, использованному для нахождения элементов алгебраической функции, являющейся решением уравнения $F(z, L) = 0$ [10, с. 24; 11, с. 234].

Покажем, что в угловой области P_j применима эта лемма. Определенные в (7) круги Λ лежат в кольцах, суммарная ширина которых $\mathrm{mes}\,\Delta < < \infty$. Кроме того, множество Φ значений φ, для которых справедливо (31), всюду плотно в $]0, \pi[$. Поэтому множество $\{z : \eta_j < \arg z < \gamma_j\} \setminus \Lambda$ содержит неограниченную область W, на которой выполняется (46), (47). Из (2), (20), (8), (47) следует, что определенные в (11), (12) функции $L(z)$, $\omega(z)$ удовлетворяют условиям леммы. Поэтому функция $L(z) = z\,w'(z)/w(z)$, являющаяся решением уравнения (74), (73) имеет вид (76), т. е. ($z \to \infty$)

$$w'(z)/w(z) = \sum_{j=-s}^{n} c_j z^{(j/d)-1} + o\left(z^{(-s/d)-1}\right), \quad s > 0.$$

Интегрируя обе части этого равенства по кривой Γ, соединяющей точки z_0, z, ($\Gamma \subset W$), получаем (4).

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков: ГОНТИ, 1939.— 719 с.
3. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М. : Гостехтеоретиздат, 1950.— 436 с.
4. *Boutroux P.* Sur quelques proprietés des fonctions entières // Acta math.— 1904.— **29.**— P. 97—204.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т.— М. : Наука, 1968.— Т. 2.— 624 с.
6. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М. : Физматгиз, 1957.— 235 с.
7. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 467 с.
8. *Гольдберг А. А., Мохонько А. З.* О скорости роста решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 9.— С. 1568—1574.
9. *Мохонько А. З.* Оценка модуля логарифмической производной функции, мероморфной в угловой области, и ее применение // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 6.— С. 839—843.
10. *Bliss G. A.* Algebraic Functions.— New York : Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1933.— 216 p.
11. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М. : Гостехтеоретиздат, 1948.— 396 с.

Получено 29.12.90