УДК 514.17

С. А. Пичугов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

K-интерполяция в задачах равномерного приближения функций

Для произвольных метрических компактов Q вычислен K-функционал пары $(C(Q), C^{\omega}(Q))$ и установлены двусторонние оценки для $(C_{[-\pi,\pi]}, C^2_{[-\pi,\pi]})$. Доказаны интерполяционные теоремы, рассмотрены приложения к задачам теории приближения.

Для довільних метричних компактів Q обчислений K-функціонал пари $(C(Q), C^{\omega}(Q))$ і встановлені двосторонні оцінки для $(C_{[-\pi,\pi]}, C^2_{[-\pi,\pi]})$. Доведені інтерполяційні теореми, розглянуті застосування до задач теорії наближення.

При решении экстремальных задач приближения периодических функций действительной переменной в равномерной метрике важную роль сыграла идея промежуточного приближения данной функции функциями из «хорошего» класса, позволившая решить некоторые трудные экстремальные задачи [1, 2]. В дальнейшем [3, 4] с помощью понятия K-функционала оказалось возможным эти результаты интерпретировать в терминах теории интерполяции.

Настоящая статья основана на идеях работ [1, 3].

1. Некоторые свойства модулей непрерывности.

1. Пусть функция $\omega(t)$, $t \in R^+$, есть модуль непрерывности (м. н.) [2], т. е. $\lim\limits_{t\to 0} \omega(t) = \omega(0) = 0$, $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$, ω — функция неубывающая. В теории приближения часто приходится рассматривать функцию $\bar{\omega}$ — наименьшую выпуклую вверх мажоранту функции ω. Связь между этими функциями выражается следующей леммой, доказанной С. Б. Стечкиным в случае $k = 1$ и Н. П. Корнейчуком [5] для любого $k > 0$.

Лемма 1. *Для любого м. н. справедливо неравенство*

$$\bar{\omega}(kt) \leqslant (k+1)\,\omega(t), \tag{1}$$

причем для целых k на классе всех м. н. (1) *неулучшаемо.*

Нам понадобятся аналогичные свойства следующих преобразований м. н., введенных в [3]:

$$\omega^{\#}(t) = \sup_s \{\omega(s)(1 + st^{-1})^{-1}\}; \qquad \omega^*(t) = \inf_s \{\omega(s)(1 + ts^{-1})\}. \tag{2}$$

Утверждение 1. *Для любого м. н. ω и любого $t > 0$ выполняются следующие соотношения*:

а) $(\omega^{\#})^*(t) = \bar{\omega}(t)$; (3)

б) для любого $k > 0$ $\omega(t) \leqslant (1 + k^{-1})\,\omega^{\#}(kt)$, (4)

для любого $k \geqslant 1$ $\omega^{\#}(kt) \leqslant k\omega(t)$; (5)

в) функция ω^* является выпуклой вверх и

$$\omega(kt) \leqslant \bar{\omega}(kt) \leqslant \omega^*(kt) \leqslant (k+1)\,\omega(t); \tag{6}$$

г) для любого $t > 0$ на классе всех м. н. (5) *неулучшаемо для всех $k \geqslant 1$, а* (6) — *для всех целых $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Свойство а) содержится в [3]. Из определения (2) следует $\omega^{\#}(kt) \geqslant \omega(s)(1 + s(kt)^{-1})$ при любом s. Полагая $s = t$, получаем (4). Далее, так как $\omega(ks) \leqslant \omega(t)(1 + kst^{-1})$, то

$$\omega^{\#}(kt) = \sup_s \{\omega(ks)\,(1 + st^{-1})^{-1}\} \leqslant \omega(t) \sup_s \{(t + ks)\,(t + s)^{-1}\},$$

откуда следует (5). Если $\omega(t) = t$ $(t \geqslant 0)$, то $\omega^{\#}(t) = \omega(t)$, поэтому (5) неулучшаемо.

Из определения ω^* вытекает соотношение

$$\omega^*(kt) = \inf_s \{\omega(s)(1 + kts^{-1})\} \leqslant \omega(t)(1 + k).$$

С другой стороны, ввиду полуаддитивности м. н. $\omega(kt) = \omega((kts^{-1})s) \leqslant \leqslant \omega(s)(1 + kts^{-1})$ при любом s $\omega(kt) \leqslant \omega^*(kt)$. Но функция ω^* как нижняя огибающая линейных функций является выпуклой вверх, поэтому $\bar{\omega}(kt) \leqslant \omega^*(kt)$ и (6) доказано. Неулучшаемость следует из такого же факта для (1).

2. Пусть Q — компакт с метрикой $\rho(x, y)$; $C \equiv C(Q)$ — пространство вещественнозначных непрерывных функций, заданных на Q, с нормой $\|f\|_C = \max\{|f(x)|\ ;\ x \in Q\}$;

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ \rho(x, y) \leqslant h\}, \quad h \in [0, \operatorname{diam} Q],$$

— модуль непрерывности функции f.

Выясним, при каких условиях на компакт для любой f из $C(Q)$ выполняется неравенство (1). Для этого надо ответить на два вопроса.

Вопрос 1: будет ли функция ω_f для любой f из $C(Q)$ являться модулем непрерывности в смысле п. 1?

Для произвольного компакта это, вообще говоря, не верно. Для этого достаточно, например, в качестве Q взять несколько изолированных точек в R^n. Однако известно [2], что если Q есть отрезок на числовой оси, то утверждение верно. Из доказательства этого факта видно, что ответ на поставленный вопрос будет положительным, если Q — такой компакт в линейном метрическом пространстве, что вместе с любыми своими двумя точками содержит отрезок, соединяющий эти точки.

Вопрос 2: при каких условиях на компакт для любого м. н. ω существует функция f из $C(Q)$ такая, что $\omega_f(h) = \omega(h)$?

Для ответа на этот вопрос докажем следующее утверждение, известное для функций, заданных на отрезке.

Утверждение 2. *Пусть Q — компакт в линейном метрическом пространстве (E, ρ), содержащий отрезок длины q; метрика инвариантна относительно сдвигов. Тогда для любого м. н. ω существует функция $f \in C(Q)$ такая, что для любого $h \in [0, q]$ выполняется равенство $\omega_f(h) = \omega(h)$.*

Доказательство. Пусть $x_0, y_0 \in Q$ выбраны так, что $\rho(x_0, y_0) = q$ и отрезок $(1-\lambda)x_0 + \lambda y_0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, содержится в Q. Так как метрика инвариантна относительно сдвигов, то $\rho(x-y, 0) = \rho(x, y)$, где 0 — нулевой элемент E. Ввиду непрерывности функции $\rho(\lambda x, 0)$ относительно λ для заданного h существует значение $\lambda_0 \in [0, 1]$ такое, что $\rho((1-\lambda_0)x_0 + \lambda_0 y_0, x_0) = \rho(\lambda(y_0 - x_0), 0) = h$. Следовательно, существует элемент $x_h = (1-\lambda_0)x_0 + \lambda_0 y_0$ из Q такой, что $\rho(x_h, x_0) = h$.

Пусть теперь $f(x) = \omega(\rho(x, x_0))$. Тогда $f \in C(Q)$ и $\omega_f(h) \leqslant \omega(h)$, так как

$$|f(x) - f(y)| = |\omega(\rho(x, x_0)) - \omega(\rho(y, x_0))| \leqslant \omega(|\rho(x, x_0) - \rho(y, x_0)|) \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\rho(x, y)).$$

С другой стороны, $\omega_f(h) \geqslant f(x_h) - f(x_0) = \omega(\rho(x_h, x_0)) = \omega(h)$. Значит, $\omega_f(h) = \omega(h)$.

Теперь можно сформулировать аналог леммы 1 в пространстве $C(Q)$.

Теорема 1. *Пусть Q — компакт в линейном метрическом пространстве, содержащий вместе с любыми своими двумя точками отрезок, соединяющий эти точки; метрика инвариантна относительно сдвигов. Тогда для любой f из $C(Q)$ и любых $k > 0$, $t \in (0, \operatorname{diam} Q]$ справедливы неравенства*

$$\bar{\omega}_f(kt) \leqslant \omega_f^*(kt) \leqslant (k+1)\,\omega_f(t), \tag{7}$$

которые в каждой точке t при $k = 1, 2, \ldots$ на классе $f \in C(Q)$ неулучшаемы.

2. Интерполяция операторов в пространствах C^ω. Для заданного м. н. $\omega(h)$, $h \in [0, \operatorname{diam} Q]$, определим нормированное пространство

$$C^\omega = \left\{ f \in C(Q); \qquad \|f\|_\omega = \sup_h \frac{\omega_f(h)}{\omega(h)} < \infty \right\},$$

единичным шаром которого является класс

$$H^\omega = \{f \in C(Q);\ \omega_f(\cdot) \leqslant \omega(\cdot)\}.$$

В частности, если $\omega(h) = h^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, то имеем $\|f\|_\alpha = \sup(\omega_f(h)\,h^{-\alpha})$, $C^\omega \equiv C^\alpha$ — соответственно липшицеву норму и пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α.

Будем изучать нормы невырожденных сублинейных (т. е. полуаддитивных и однородных) операторов $T: C^\omega \to C$. Ясно, что для конечности нормы

$$\|T\|_{\omega \to C} = \sup\{\|Tf\|_C;\ f \in H^\omega\}$$

необходимо, чтобы для любой функции $f \equiv \mathrm{const}$ выполнялось $Tf = 0$. Это свойство для операторов T предполагается в дальнейшем выполненным.

Для банаховой пары (X, Y) значение K_p-функционала на элементе $f \in \in X + Y$ в точке $t > 0$ определяется соотношениями [4]

$$K_p(f, t; X, Y) = \inf_\varphi (\| f - \varphi \|_X^p + t^p \| \varphi \|_Y^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$K_\infty(f, t; X, Y) = \inf_\varphi \max(\| f - \varphi \|_X; t \| \varphi \|_Y).$$

В [3] Петре доказал, что в случае, когда Q — числовая прямая или одномерный тор $\mathbf{T}^1$,

$$K_1(f, t; C, C^1) = 2^{-1}\overline{\omega}_f(2t); \quad K_\infty(f, t; C, C^1) = 2^{-1}\omega_f^{\#}(2t),$$

и вывел отсюда точную интерполяционную теорему для линейных операторов в пространствах C^α:

$$\| T \|_{\alpha \to \alpha} \leqslant \| T \|_{C \to C}^{1-\alpha} \| T \|_{1 \to 1}^{\alpha}. \tag{8}$$

Ю. А. Брудный доказал [6], что

$$K_1(f, t: C(Q), C^1(Q)) = 2^{-1}\overline{\omega}_f(2t)$$

для произвольного метрического компакта. Следуя его методу, вычисляем K-функционалы пары (C, C^ω) при некоторых ограничениях на ω.

В дальнейшем ω^{-1} означает функцию, обратную к ω, а $\omega_f \circ \omega^{-1}$ — суперпозицию функций ω_f и ω^{-1}.

Теорема 2. *Пусть Q — произвольный метрический компакт, ω — такой м. н., что для некоторого $\xi \in (0, \operatorname{diam} Q]$ $\omega(h)$ строго монотонна при $h \in [0, \xi]$ и $\omega(h) = \omega(\xi)$ при $h \in [\xi, \operatorname{diam} Q]$, функция $f \in C(Q)$ такова, что $\omega_f(h) = \omega_f(\xi)$ для всех $h \in [\xi, \operatorname{diam} Q]$. Тогда справедливы равенства*

$$K_\infty(f, t; C, C^\omega) = \frac{1}{2}(\omega_f \circ \omega^{-1})^{\#}(2t); \tag{9}$$

$$K_1(f, t; C, C^\omega) = \frac{1}{2}\overline{(\omega_f \circ \omega^{-1})}(2t), \quad 2t < \omega(\xi),$$

$$K_1(f, t; C, C^\omega) = \frac{1}{2}\omega_f(\xi), \quad 2t \geqslant \omega(\xi). \tag{10}$$

Доказательство. Будем использовать следующие очевидные неравенства:

$$\omega_f(h) \leqslant 2\| f \|_C; \qquad \omega_f(h) \leqslant \| f \|_\omega \omega(h); \quad \omega_{f+g}(h) \leqslant \omega_f(h) + \omega_g(h).$$

Пусть $s \leqslant \xi$. Тогда $\forall \varphi \in C^\omega$

$$1/2(\omega_f \circ \omega^{-1})(s) \leqslant 1/2\omega_{f-\varphi}(\omega^{-1}(s)) + 1/2\omega_\varphi(\omega^{-1}(s)) \leqslant \| f - \varphi \|_C + 1/2\| \varphi \|_\omega \times$$

$$\times \omega(\omega^{-1}(s)) = \| f - \varphi \|_C + ts(2t)^{-1}\| \varphi \|_\omega \leqslant \max(\| f - \varphi \|_C; t\|\varphi\|_\omega)(1 + s(2t)^{-1}).$$

Ввиду произвольности φ отсюда следует неравенство

$$1/2(\omega_f \circ \omega^{-1})^{\#}(2t) \leqslant K_\infty(f, t; C, C^\omega).$$

Теперь оценим K_∞-функционал сверху. Для этого в качестве функции φ (см. определение) возьмем [7]

$$\varphi(x) = \sup_u (f(u) + N\omega(\rho(x, u)) + a),$$

где $N > 0$, $a = \dfrac{1}{2}\sup\{\omega_f(\rho(x, y)) - N\omega(\rho(x, y)); \ x, y \in Q\}$.

В [7] доказано, что $\| \varphi \|_\omega \leqslant N$ и $\| f - \varphi \|_C \leqslant \dfrac{1}{2}\sup\{\omega_f(\rho(x, y)) -$

$-N\omega(\rho(x,y))\}$, следовательно,

$$K_\infty(f,t;C,C^\omega)\leqslant\inf_N\max\left\{\frac{1}{2}\sup_s(\omega_f(s)-N\omega(s);\ Nt\right\}.$$

Здесь верхнюю грань достаточно брать лишь по множеству $\{s:s\leqslant\xi\}$. По условию на этом множестве функция $\omega(s)$ строго монотонна, поэтому после замены $y=\omega(s)$ получаем неравенство

$$K_\infty(f,t;C,C^\omega)\leqslant\inf_N\max\left\{\frac{1}{2}\sup_y(\omega_f\circ\omega^{-1})(y)-Ny;\ Nt\right\}.$$

Из определения (2) следует $(\omega_f\circ\omega^{-1})(y)\leqslant(1+y(2t)^{-1}(\omega_f\circ\omega^{-1})^{\#}(2t)$. Выберем, далее, $N=\frac{1}{2}t^{-1}(\omega_f\circ\omega^{-1})^{\#}(2t)$, тогда

$$K_\infty(f,t;C,C^\omega)\leqslant\inf_N\max\left\{\frac{1}{2}(\omega_f\circ\omega^{-1})^{\#}(2t)(1+y(2t)^{-1}-Ny;\ Nt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(\omega_f\circ\omega^{-1})^{\#}(2t).$$

Соотношение (9) доказано.

Равенства (10) можно доказать аналогичными рассуждениями. Но можно поступить иначе, используя (9), соотношение $K_1(f,t;X,Y)=\inf_s\{K_\infty(f,t;X,Y)(1+t/s)\}$ из [4] и применить (3).

Замечание 1. Появление условий, связанных с точкой ξ, в случае $\xi<\operatorname{diam}Q$ объясняется тем, что если $Q=\mathbf{T}^m$ — m-мерный тор и $C(\mathbf{T}^m)$ — пространство периодических непрерывных функций, то для всех f из $C(\mathbf{T}^m)$ их модули непрерывности $\omega_f(h)$ постоянны при $h>\frac{1}{2}\operatorname{diam}\mathbf{T}^m$.

Теорема 3. *Пусть Q — произвольный метрический компакт, а функции ω и f удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для любого сублинейного ограниченного оператора $T:C\to C$ выполняется неравенство*

$$\|Tf\|_C\leqslant\frac{1}{2}\|T\|_{C\to C}\overline{(\omega_f\circ\omega^{-1})}(2\|T\|_{\omega\to C}\|T\|_{C\to C}^{-1}). \tag{11}$$

Если все функции f из C удовлетворяют условию теоремы, то для каждого оператора T неравенство (11) *является точным в том смысле, что в правой части ни константу* 1/2, *ни аргумент* $2\|T\|_{\omega\to C}\|T\|_{C\to C}^{-1}$ *для всех* $f\in C$ *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Покажем сначала, что для рассматриваемых операторов T всегда выполнено неравенство

$$2\|T\|_{\omega\to C}\|T\|_{C\to C}^{-1}\leqslant\omega(\xi). \tag{12}$$

Действительно, пусть $c_f=\frac{1}{2}(\max f+\min_Q f)$, тогда

$$\|f-c_f\|_C\leqslant\frac{1}{2}\max_h\omega_f(h)=\frac{1}{2}\omega_f(\xi)\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_\omega\omega(\xi), \tag{13}$$

$$\|Tf\|_C=\|T(f-c_f)\|_C\leqslant\|T\|_{C\to C}\frac{1}{2}\|f\|_\omega\omega(\xi),$$

$$\|T\|_{\omega\to C}=\sup\{\|Tf\|_C;\ \|f\|_\omega\leqslant1\}\leqslant\frac{1}{2}\|T\|_{C\to C}\omega(\xi).$$

Теперь для произвольной φ из C^{ω}

$$\| Tf \|_C \leqslant \| T(f-\varphi) \|_C + \| T\varphi \|_C \leqslant \| T \|_{C\to C} \| f-\varphi \|_C + \| T \|_{\omega\to C} \| \varphi \|_{\omega}.$$

Следовательно, $\| Tf \|_C \leqslant \| T \|_{C\to C} K_1(f, \| T \|_{\omega\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}; C, C^{\omega})$, и из (10) и (12) получаем (11).

Точность (11) следует из определения нормы оператора. Действительно, так как $\overline{(\omega_f \circ \omega^{-1})}(h) \leqslant 2 \| f \|_C$, то правая часть (11) не превышает $\| T \|_{C\to C} \| f \|_C$, причем для всех $f \in C$ по условию. Значит, константу 1/2 уменьшить нельзя. Далее, $\overline{(\omega_f \circ \omega^{-1})}(h) \leqslant \| f \|_{\omega} h$, поэтому правая часть (11) не превышает $\| T \|_{\omega\to C} \| f \|_{\omega}$, и значит, аргумент функции $\overline{(\omega_f \circ \omega^{-1})}(\cdot)$ также нельзя уменьшить.

Замечание 2. Если вместо K_1-функционала использовать K_{∞}-функционал, то можно получить оценки $\| Tf \|_C$ в терминах функции $(\omega_f \circ \circ \omega^{-1})^{\#}$.

Следующая теорема интерполяции в пространствах C^{ω} отличается от теоремы Петре и применима для решения некоторых типичных задач теории приближения.

Теорема 4. *Пусть Q — произвольный метрический компакт, и для любой $f \in C$, для всех $h \in (\xi, \operatorname{diam} Q]$ $\omega_f(h) = \omega_f(\xi)$. Пусть, далее, модули непрерывности $\omega_1(h)$ и $\omega_2(h)$ строго монотонны при $h \in [0, \xi]$ и постоянны при $h \in (\xi, \operatorname{diam} Q]$, а функция $\omega_1 \circ \omega_2^{-1}$ является выпуклой вверх. Тогда для ограниченного сублинейного оператора $T: C \to C$ выполняется неравенство*

$$\omega_1^{-1}(2 \| T \|_{\omega_1\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}) \leqslant \omega_2^{-1}(2 \| T \|_{\omega_2\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}). \tag{14}$$

Если Q — компакт в линейном метрическом пространстве, содержащий отрезок длины $\operatorname{diam} Q$, а метрика инвариантна относительно сдвигов, то неравенство (14) является точным в том смысле, что существуют операторы T, для которых (14) обращается в равенство.

Отметим частный случай теоремы для пространств Липшица.

Следствие 1. *Если $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, то*

$$\| T \|_{\alpha\to C} \leqslant \left(\frac{1}{2} \| T \|_{C\to C} \right)^{1-\alpha/\beta} \| T \|^{\alpha/\beta}_{\beta\to C}. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 4. Пусть $f \in C^{\omega_1}$. Ввиду строгой монотонности $\omega_1(h)$ и $\omega_2(h)$ при $h \in [0, \xi)$ из неравенства $\omega_f(h) \leqslant \| f \|_{\omega_1} \omega_1(h)$ следует, что при любом $y \in [0, \omega_1(\xi))$ $(\omega_f \circ \omega_2^{-1})(y) \leqslant \| f \|_{\omega_1} (\omega_1 \circ \omega_2^{-1})(y)$. Здесь в правой части функция по условию выпуклая вверх. Значит,

$$\overline{(\omega_f \circ \omega_2^{-1})}(y) \leqslant \| f \|_{\omega_1} (\omega_1 \circ \omega_2^{-1})(y). \tag{16}$$

Ввиду (12) мы можем в (16) положить $y = 2 \| T \|_{\omega_2\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}$.

Теперь оценим $\| Tf \|_C$ с помощью (11):

$$\| Tf \|_C \leqslant \frac{1}{2} \| T \|_{C\to C} \overline{(\omega_f \circ \omega_2^{-1})} (2 \| T \|_{\omega_2\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \| T \|_{C\to C} \| f \|_{\omega_1} (\omega_1 \circ \omega_2^{-1}) (2 \| T \|_{\omega_2\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}).$$

Следовательно,

$$\| T \|_{\omega_1\to C} \leqslant \frac{1}{2} \| T \|_{C\to C} (\omega_1 \circ \omega_2^{-1}) (2 \| T \|_{\omega_2\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}),$$

что эквивалентно (14).

Для доказательства точности рассмотрим оператор $T_0 = J - P_0$, где J — тождественный оператор, а P_0 — метрическая проекция на подпространство констант. Очевидно, $\| T_0 \|_{C\to C} = 1$. Из (13) следует $\| T_0 \|_{\omega\to C} \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2}\max\limits_h \omega(h)$. Но для функции f, построенной в утверждении 2, имеем $\|f\|_\omega = 1$ и $\|T_0 f\|_C = \frac{1}{2}\max\limits_h \omega(h)$. Значит, для таких компактов $\|T_0\|_{\omega\to C} = \frac{1}{2}\max\limits_h \omega(h)$ и обе части в неравенстве (14) для оператора T_0 принимают одинаковое значение.

Покажем теперь, что интерполяционная теорема Петре (см. (8)) верна в более общем случае.

Теорема 5. *Пусть Q — произвольный метрический компакт. Если $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, то для любого линейного оператора T справедлива интерполяционная теорема*

$$\|T\|_{\alpha\to\alpha} \leqslant \|T\|_{C\to C}^{1-\alpha/\beta}\|T\|_{\beta\to\beta}^{\alpha/\beta}, \tag{17}$$

которая является точной, если для метрики и компакта Q выполняются условия утверждения 2.

Доказательство. Получим сначала вспомогательное неравенство для модулей непрерывности.

Пусть ω — строго монотонный м. н., тогда

$$\overline{(\omega_{Tf}\circ\omega^{-1})}(h) \leqslant \|T\|_{C\to C}\overline{(\omega_f\circ\omega^{-1})}(h\|T\|_{\omega\to\omega}\|T\|_{C\to C}^{-1}). \tag{18}$$

Дважды применяя теорему 2, имеем

$$\overline{(\omega_{Tf}\circ\omega^{-1})}(h) = 2K_1(Tf, h/2; C, C^\omega) = 2\inf_\varphi\left(\|Tf-\varphi\|_C + \frac{h}{2}\|\varphi\|_\omega\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\inf_\varphi\left(\|Tf - T\varphi\|_C + \frac{h}{2}\|T\varphi\|_\omega\right) \leqslant \|T\|_{C\to C}\, 2\inf_\varphi\left(\|f-\varphi\|_C + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2}\|T\|_{\omega\to\omega}\|T\|_{C\to C}^{-1}\|\varphi\|_\omega\right) = \|T\|_{C\to C}\; 2K_1\left(f, \frac{h}{2}\|T\|_{\omega\to\omega}\|T\|_{C\to C}^{-1}; C, C^\omega\right) =$$

$$= \|T\|_{C\to C}\overline{(\omega_f\circ\omega^{-1})}(h\|T\|_{\omega\to\omega}\|T\|_{C\to C}^{-1}).$$

Пусть теперь ω_1 и ω_2 — модули непрерывности, причем ω_2 — строго монотонная, а $\omega_1\circ\omega_2^{-1}$ — выпуклая вверх функция. Тогда

$$\frac{\|T\|_{\omega_1\to\omega_1}}{\|T\|_{C\to C}} \leqslant \sup_h \frac{(\omega_1\circ\omega_2^{-1})(h\|T\|_{\omega_2\to\omega_2}\|T\|_{C\to C}^{-1})}{(\omega_1\circ\omega_2^{-1})(h)}. \tag{19}$$

Действительно, используя (18) и (16), получаем

$$\|T\|_{\omega_1\to\omega_1} = \sup_{\|f\|_{\omega_1}\leqslant 1}\sup_y \frac{\omega_{Tf}(y)}{\omega_1(y)} = \sup_{\|f\|_{\omega_1}\leqslant 1}\sup_y \frac{(\omega_{Tf}\circ\omega_2^{-1})(y)}{(\omega_1\circ\omega_2^{-1})(y)} \leqslant$$

$$\leqslant \|T\|_{C\to C}\sup_{\|f\|_{\omega_1}\leqslant 1}\sup_h \frac{\overline{(\omega_f\circ\omega_2^{-1})}(h\|T\|_{\omega_2\to\omega_2}\|T\|_{C\to C}^{-1})}{(\omega_1\circ\omega_2^{-1})(h)} \leqslant$$

$$\leqslant \|T\|_{C\to C}\sup_h \frac{(\omega_1\circ\omega_2^{-1})(h\|T\|_{\omega_2\to\omega_2}\|T\|_{C\to C}^{-1})}{(\omega_1\circ\omega_2^{-1})(h)}.$$

Неравенство (17) является частным случаем (19), если положить $\omega_1(h) = h^\alpha$, $\omega_2(h) = h^\beta$.

Для проверки точности достаточно взять оператор $T_0 = J - P_0$ и учесть, что $\|T_0\|_{\alpha\to\alpha} = 1$.

3. Приложения к задачам теории приближения. Одной из основных задач теории приближения являются оценки типа Джексона приближения функции некоторым функциональным множеством в терминах ее модуля непрерывности (см., например, [2]). Тот факт, что

точное значение K-функционала в паре (C, C^{ω}) выражается через модуль непрерывности, позволяет использовать интерполяцию в пространствах C^{ω} в константных задачах теории приближения в C.

В этом пункте рассмотрим теоремы 3 и 4 в терминах теории приближения.

Пусть A — подпространство $C \equiv C(Q)$, содержащее константы; P_A — метрическая проекция из C на A; $E(f, A) = \|(J - P_A) f\|_C$ — наилучшее приближение элемента f подпространством A.

Отметим, что оператор $J - P_A$ является сублинейным и $\|J - P_A\|_{C\to C} = 1$.

Будем рассматривать также линейные операторы $\mathscr{L}: C \to A$, точные на константах. Тогда $\mathscr{L}(H^{\omega}; A) = \|J - \mathscr{L}\|_{\omega\to C}$ — уклонение линейного метода приближения $\mathscr{L}$ класса H^{ω} подпространством A.

Теперь теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 6. *Если функции ω и f удовлетворяют условиям теоремы 2, то справедливы неравенства*

$$E(f, A) \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{(\omega_f \circ \omega^{-1})}\,(2E(H^{\omega}; A)), \tag{20}$$

$$\|f - \mathscr{L}f\|_C \leqslant \frac{1}{2}\,\|J - \mathscr{L}\|_{C\to C}\,\overline{(\omega_f \circ \omega^{-1})}\,(2\mathscr{L}(H^{\omega}; A)\,\|J - \mathscr{L}\|^{-1}_{C\to C}), \tag{21}$$

неулучшаемые на пространстве $C(Q)$.

Особо отметим частный случай $\omega(t) = t$:

$$E(f, A) \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{\omega}_f\,(2E(H^1; A)), \tag{22}$$

$$\|f - \mathscr{L}f\|_C \leqslant \frac{1}{2}\,\|J - \mathscr{L}\|_{C\to C}\,\overline{\omega}_f\,(2\mathscr{L}(H^1; A)\,\|J - \mathscr{L}\|^{-1}_{C\to C}). \tag{23}$$

Для получения теорем типа Джексона нужно вычислить в правой части аргументы модулей непрерывности. Иногда это удается сделать. Пусть, например, $Q = \mathbf{T}^1$.

Если $A = \mathscr{T}^{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов степени не выше $n - 1$, то частный случай теоремы Фавара — Ахиезера — Крейна означает [2] $E(H^1, \mathscr{T}^{2n-1}) = \pi(2n)^{-1}$, и в этом случае (22) есть точное неравенство Н. П. Корнейчука [1] $E(f, \mathscr{T}^{2n-1}) \leqslant \frac{1}{2}\,\overline{\omega}_f\,(\pi n^{-1})$.

Известно много работ, посвященных оценкам величин $\|f - \mathscr{L}f\|_C$ в случае $Q = \mathbf{T}^1$ для конкретных $\mathscr{L}$ и A. В работе [8] в случае, когда $\mathscr{L}$ — интегральный оператор свертки с ядром, получены оценки типа (23), причем в правой части неравенства представлены в терминах ядра.

Отметим, что при желании можно получить оценки приближений типа (22), (23) не в терминах $\overline{\omega}_f$, а через $\omega_f^{\#}$ (см. замечание 2).

Если же компакт Q удовлетворяет условию теоремы 1, то неравенствам (22), (23) можно придать следующий вид:

$$E(f, A) \leqslant \frac{1}{2}\,(k + 1)\,\omega_f\,(2E(H^1; A)\,k^{-1}), \tag{24}$$

$$\|f - \mathscr{L}f\|_C \leqslant \frac{1}{2}\,(k + 1)\,\|J - \mathscr{L}\|_{C\to C}\,\omega_f\,(2\mathscr{L}(H^1; A)\,k^{-1}\,\|J - \mathscr{L}\|^{-1}_{C\to C}).$$

В случае $Q = \mathbf{T}^1$, $A = \mathscr{T}^{2n-1}$ оценка (24) приводит к теореме Джексона с точной константой [5].

Теперь сформулируем интерполяционную теорему 4 в терминах наилучших и линейных приближений классов H^{ω}.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда справедливы неравенства*

$$\omega_1^{-1}(2E(H^{\omega_1}; A)) \leqslant \omega_2^{-1}(2E(H^{\omega_2}; A)), \tag{25}$$

$$\omega_1^{-1}(2\mathscr{L}(H^{\omega_1}; A)\, \| J - \mathscr{L} \|_{C\to C}^{-1}) \leqslant \omega_2^{-1}(2\mathscr{L}(H^{\omega_2}; A)\, \| J - \mathscr{L} \|_{C\to C}^{-1}). \tag{26}$$

Эти соотношения позволяют сравнить качество приближения одним и тем же подпространством (и одним и тем же методом $\mathscr{L}$) различных классов H^{ω}. В случае $Q = \mathbf{T}^1$, $A = \mathscr{T}^{2n-1}$ для линейных методов суммирования рядов Фурье эта задача поставлена П. П. Коровкиным и исследована в [9], а подобное (25) сравнение наилучших приближений различных классов непрерывных функций изучалось в [10, 11].

Соотношение (25) позволяет сравнить также поперечники классов H^{ω}. Например, пусть A_n — подпространство в $C(\mathbf{T}^1)$ размерности n, $d_n(H^{\omega}; C(\mathbf{T}^1)) = \inf\{E(H^{\omega}; A_n); \dim A_n = n\}$ — поперечник Колмогорова [2] класса H^{ω} в пространстве $C(\mathbf{T}^1)$. Известно [2], что если ω — выпуклая вверх функция, то

$$d_{2n}(H^{\omega}; C(\mathbf{T}^1)) = d_{2n-1}(H^{\omega}; C(\mathbf{T}^1)) = \frac{1}{2}\,\omega(\pi n^{-1}).$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть $Q = \mathbf{T}^1$, а функции ω_1, ω_2 и $\omega_1 \circ \omega_2^{-1}$ — выпуклые вверх. Тогда если подпространство A_n реализует поперечник класса H^{ω_2}, то оно реализует также и поперечник класса H^{ω_1}.*

В случае $\omega_2(h) = h$ это утверждение есть частный случай результата [10].

4. Интерполяция операторов в пространстве Зигмунда. В этом пункте всюду под пространством C понимаем пространство 2π-периодических непрерывных функций одной переменной.

Пусть $\Delta_h^2 f(x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$ — вторая разность $f(x)$ с шагом h; $\omega_2(f, h) = \sup\{\| \Delta_t^2 f \|_C; |t| \leqslant h\}$ — модуль гладкости f; для фиксированного $\alpha \in (0, 2]$

$$Z^{\alpha} = \{f \in C; \| f \|_{\alpha} = \max\{\omega_2(f, h)\, h^{-\alpha}; h \in [0, \pi]\} < \infty\}$$

— пространство Зигмунда; $C^2 = \{f \in C;\ \| f \|_{C^2} = \| f'' \|_C < \infty\}$.

Для величины $K_1(f, t; C, C^2)$ известны [12] двусторонние оценки в терминах модуля гладкости f. Мы получим в определенном смысле точные двусторонние оценки. При этом мы существенно используем работу [13], в которой методом промежуточного приближения доказано неравенство

$$E(f, \mathscr{T}^{2n-1}) \leqslant \omega_2(f, \pi(2n)^{-1}) \tag{27}$$

и его неулучшаемость в том смысле, что $\forall n\ \forall \varepsilon \in (0, 2^{-1})$ найдутся функции $\varphi_n \in C$ такие, что

$$1 = \| \varphi_n \|_C \geqslant E(\varphi_n, \mathscr{T}^{2n-1}) > 1 - \varepsilon - (2n)^{-1} = (1 - \varepsilon - (2n)^{-1})\, \omega_2(\varphi_n, \pi(2n)^{-1}). \tag{28}$$

Обозначим $\varphi(f, t) = \omega_2(f, t^{1/2})$ и $\bar{\varphi}(f, t) = \overline{\omega_2(f, t^{1/2})}$,

$$\varphi^*(f, t) = \inf\{\varphi(h)(1 + th^{-1}); h \leqslant \pi^2\} = \omega_2^*(f, t^{1/2}).$$

Отсюда следует $\omega_2^*(f, (kt)^{1/2}) \leqslant (k+1)\, \omega_2(f, t^{1/2})$.

Теорема 8. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\inf_{\substack{f \in C \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{K_1(f, t; C, C^2)}{\frac{1}{4}\, \overline{\omega_2(f, (2t)^{1/2})}} = 1, \quad t \in (0, \pi^2/2), \tag{29}$$

$$\sup_{t\in(0,\pi^2/2)} \sup_{\substack{f\in C\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{K_1(f,t;C,C^2)}{\frac{1}{2}\,\omega_2^*(f,(2t)^{1/2})} = \sup_{t\in(0,\pi^2/2)} \sup_{\substack{f\in C\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{K_1(f,t;C,C^2)}{\omega_2(f,(2t)^{1/2})} = 1. \quad (30)$$

Доказательство. Используем известные свойства

$$\omega_2(f,h)\leqslant 4\,\|f\|_C;\quad \omega_2(f,h)\leqslant 2h^2\,\|f\|_{C^2};\quad \omega_2(f+\varphi,h)\leqslant\omega_2(f,h)+\omega_2(\varphi,h).$$

Для произвольной $\varphi\in C^2$

$$\frac{1}{4}\,\omega_2(f,(2t)^{1/2})\leqslant\frac{1}{4}\,(\omega_2(f-\varphi,(2t)^{1/2})+\omega_2(\varphi,(2t)^{1/2})\leqslant\|f-\varphi\|_C+t\,\|\varphi\|_{C^2},$$

поэтому $\frac{1}{4}\,\omega_2(f,(2t)^{1/2})\leqslant K_1(f,t;C,C^2)$. Но так как K_1-функционал есть выпуклая вверх функция t, то

$$\frac{1}{4}\,\overline{\omega_2(f,(2t)^{1/2})}\leqslant K_1(f,t;C,C^2). \quad (31)$$

Ввиду очевидного свойства $K_1(f,t;C,C^2)\leqslant\|f\|_C$ неравенство (31) обращается в равенство для любой функции f такой, что $\|f\|_C = \frac{1}{4}\,\overline{\omega_2(f,(2t)^{1/2})}$. В качестве примера можно взять четную непрерывную на периоде $[-\pi,\pi)$ функцию $f(x)$, которая линейна на $[-(2t)^{1/2},0]$ и $[0,(2t)^{1/2}]$, $f(0)=1$, $f(\pm(2t)^{1/2})=-1$; далее f для $|x|\in[(2t)^{1/2},\pi]$ продолжается периодически.

Тем самым (29) доказано.

Для доказательства (30) получим сначала для $K_1(\cdot)$ оценку сверху. Для этого используем функцию Стеклова второго порядка

$$S_{h,2}(f,x)=(2h)^{-1}\int_{-h}^{h} f(x+u)\,(1+|u|\,h^{-1})\,du,$$

обладающую свойствами

$$\|f-S_{h,2}(f)\|_C\leqslant\frac{1}{2}\,\omega_2(f,h);\qquad \|S_{h,2}(f)\|_{C^2}\leqslant h^{-2}\omega_2(f,h).$$

Тогда для любого $h\in(0,\pi)$

$$K_1(f,t;C,C^2)\leqslant\|f-S_{h,2}(f)\|_C+t\,\|S_{h,2}(f)\|_{C^2}\leqslant\frac{1}{2}(1+2th^{-2})\,\omega_2(f,h),$$

$$K_1(f,t;C,C^2)\leqslant\frac{1}{2}\,\omega_2^*(f,(2t)^{1/2})\leqslant\omega_2(f,(2t)^{1/2}).$$

Теперь (30) будет следовать из соотношения (35), которое докажем после теоремы 9.

Теорема 9. *Для любого ограниченного сублинейного оператора T и любой $f\in C$*

$$\|Tf\|_C\leqslant\frac{1}{2}\,\|T\|_{C\to C}\,\omega_2^*(f,(2\,\|T\|_{C^2\to C}\,\|T\|_{C\to C}^{-1})^{1/2}), \quad (32)$$

$$\|Tf\|_C\leqslant\|T\|_{C\to C}\,\omega_2(f,(2\,\|T\|_{C^2\to C}\,\|T\|_{C\to C}^{-1})^{1/2}). \quad (33)$$

Неравенство (33) (*и тем более* (32)) *является неулучшаемым в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся T и f такие, что*

$$\|Tf\|_C>(\|T\|_{C\to C}-\varepsilon)\,\omega_2(f,(2\,\|T\|_{C^2\to C}\,\|T\|_{C\to C}^{-1})^{1/2}).$$

Доказательство. Оценки сверху следуют из теоремы 8 и неравенства

$$\| Tf \|_C \leqslant \| T \|_{C\to C} K_1 (f, \| T \|_{C^2\to C} \| T \|^{-1}_{C\to C}; C, C^2). \tag{34}$$

Пусть $T_n = J - P_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где P_n — метрическая проекция на $\mathcal{T}^{2n-1}$. По теореме Фавара — Ахиезера — Крейна [2] $\| J - P_n \|_{C^2\to C} = \pi^2 (8n^2)^{-1}$. Поэтому для T_n (32) означает неравенство (27), и неулучшаемость (32) следует из (28).

Кроме того, из (28) и (34) следует

$$K_1 (\varphi_n, \pi^2 (8n^2)^{-1}; C, C^2) > (1 - \varepsilon - (2n)^{-1})\, \omega_2 (\varphi_n, \pi (2n)^{-1}), \tag{35}$$

что завершает доказательство теоремы 8.

Следующая теорема интерполяции в пространствах Зигмунда доказывается аналогично теоремам 4 и 5 . Однако константы $2^{\alpha/2}$ и 4, по-видимому, не являются точными.

Теорема 10. *Пусть* $\alpha \in (0, 2)$. *Тогда*:

а) *для любого ограниченного сублинейного оператора* T

$$\| T \|_{Z^\alpha \to C} \leqslant 2^{\alpha/2} \| T \|^{1-\alpha/2}_{C\to C} \| T \|^{\alpha/2}_{C^2\to C};$$

б) *для любого ограниченного линейного оператора* T

$$\| T \|_{Z^\alpha \to Z^\alpha} \leqslant 4 \| T \|^{1-\alpha/2}_{C\to C} \| T \|^{\alpha/2}_{C^2\to C^2}.$$

По той же схеме, что и в п. 3, можно применить теоремы 9 и 10 для сравнения приближений (линейных и наилучших) и поперечников единичных шаров пространств Z^α и C^2.

1. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1963.— **27**, № 1.— С. 29—44.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
3. *Petre J.* Exact interpolation theorems for lipschitz continuous functions // Ricerde di Mat.— 1969.— P. 1—21.
4. *Берг И., Лефстрем Й.* Интерполяционные неравенства. Введение.— М. : Мир, 1980.— 264 с.
5. *Корнейчук Н. П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки.— 1982.— **32**, № 5.— С. 669—674.
6. *Митягин Б. С., Семенов Е. М.* Отсутствие интерполяции линейных операторов в пространствах гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— **41**, № 6.— С. 1289—1328.
7. *Покровский А. В.* Об одной теореме А. Ф. Тимана // Функцион. анализ и его прил.— 1967.— **1**, № 5.— С. 93—94.
8. *Бабенко В. Ф., Шалаев В. В.* О неравенствах типа неравенств Джексона для линейных методов приближения функций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 10.— С. 31—34.
9. *Баскаков В. А.* Проблема Коровкина — Ульянова в теории линейного приближения классов функций // Теория функций и приближений. Ч. 1.— Саратов, 1990.— С. 44—47.
10. *Корнейчук Н. П.* О равномерном приближении периодических функций подпространствами конечной размерности // Докл. АН СССР.— 1973.— **213**.— С. 525—528.
11. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functional // Anal. Math.— 1976.— **2**, N 1.— P. 11—40.
12. *Petre J.* Theory of interpolation of normed spaces // Notas mat. Inst. mat. pura e apl.— 1968.— N 39.— P. 1—86.
13. *Шалаев В. В.* К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. — Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1977.— С. 39—43.

Получено 24.01.91