УДК 517.5

В. Б. Семенюк, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Приближение дифференцируемых функций многочленами на областях с внешними пиками

Для изотропных пространств С. Л. Соболева, определенных на областях с внешними пиками степенного вида, указывается метод и даются оценки приближения функций и их производных алгебраическими многочленами.

Для ізотропних просторів С. Л. Соболева, визначених на областях із зовнішніми піками степеневого вигляду, вказується метод і даються оцінки наближення функцій і їх похідних алгебраїчними многочленами.

Пусть $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, где $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=\lambda_0>1$, $\lambda_n=1$, $|\lambda|=\lambda_1+\ldots\lambda_n$ и $\Omega_\lambda=\{x: x=(x_1, \ldots, x_n),\ |x_i|<x_n^{\lambda_0},\ i=\overline{1, n-1},\ 0<x_n<1\}$ — ограниченная область. Через $w_p^r(\Omega)$, $r\in\mathbb{N}^1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначается изотропное пространство Соболева [1] функций f на открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с конечной полунормой

$$\|f\|_{w_p^r(\Omega)}=\sum_{|\alpha|=r}\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$$

где

$$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n, \quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Полагаем $w_p^0(\Omega)=L_p(\Omega)$.

Через $|\Omega|$ будем обозначать диаметр непустого ограниченного множества $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, а через $\rho(\Omega', \Omega'')$ — расстояние между множествами Ω' и Ω'' из $\mathbb{R}^n$.

Через $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство алгебраических многочленов $P_N(x)$ вида

$$P_N(x)=\sum_{0\leqslant|k|\leqslant N}a_k x^k,$$

где $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами $|k|=k_1+\ldots+k_n$; $a_k\in\mathbb{R}^1$; $x^k=x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$; $0^0=1$.

В формулировках результатов и их доказательств соотношение $a(M, \mathfrak{M})\ll b(M, \mathfrak{M})$ означает, что существует $c>0$, не зависящее от M, но, вообще говоря, зависящее от множества параметров $\mathfrak{M}$, такое, что $a(M, \mathfrak{M})\leqslant cb(M, \mathfrak{M})$. Соотношение $a(M, \mathfrak{M})\asymp b(M, \mathfrak{M})$ означает, что при всех M выполняются соотношения $a(M, \mathfrak{M})\ll b(M, \mathfrak{M})$ и $b(M, \mathfrak{M})\ll a(M, \mathfrak{M})$.

Теорема. *Для каждой функции $f\in w_p^r(\Omega_\lambda)$, $r\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, при каждом $N\in\mathbb{N}^1$, $N\geqslant r-1$, существуют полиномы $P_N(f)\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^n)$ такие, что*

$$\|f-P_N(f)\|_{w_p^s(\Omega_\lambda)}\ll\|f\|_{w_p^r(\Omega_\lambda)}N^{-r+s}, \quad s=\overline{0, r-1}, \tag{1}$$

$$\|P_N(f)\|_{w_p^r(\Omega_\lambda)}\ll\|f\|_{w_p^r(\Omega_\lambda)}. \tag{2}$$

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

Лемма 1 [2]. *Если Ω — произвольное непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и Ω_m, $m=\overline{1, M}$, — произвольное разбиение Ω на конечное число непустых попарно непересекающихся множеств, то для каждой пары натуральных чисел $\nu\geqslant n$ и $N\geqslant 1$ можно указать набор алгебраических многочленов $P_{\nu N}(x, \Omega_m)\in\mathcal{P}_{\nu N}(\mathbb{R}^n)$, $m=\overline{1, M}$, обладающих свойст-*

ями

$$\sum_{m=1}^{M} P_{\nu N}(x, \Omega_m) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

$$0 \leqslant P_{\nu N}(x, \Omega_m) \leqslant 1, \quad m = \overline{1, M}, \quad x \in \Omega_\lambda,$$

$$|D^\alpha P_{\nu N}(x, \Omega_m)| \leqslant c(n, \nu, \alpha) N^{|\alpha|} (1 + N\rho(x, \Omega_m))^{n-\nu},$$

$$m = \overline{1, M}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \Omega.$$

Лемма 2 [3]. *Пусть* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $c > 1$, $c\varepsilon = (c\varepsilon_1, \dots, c\varepsilon_n)$, Π_ε, $\Pi_{c\varepsilon}$ — *n-мерные параллелепипеды соответственно с ребрами длины* ε_i *и* $c\varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$, *имеющие общий центр, а* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *область, звездная относительно* Π_ε, *такая, что* $\Pi_\varepsilon \subset \Omega \subset \Pi_{c\varepsilon}$, $\partial\Omega \cap \partial\Pi_{c\varepsilon} \neq \varnothing$.

Тогда для каждой функции $f \in w_p^r(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *существует* $\pi_{r-1}(f, \Omega) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ *такой, что*

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega) \|_{w_p^s(\Omega)} \ll |\Omega|^{r-s} \| f \|_{w_p^r(\Omega)}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

Лемма 3 [3]. *Пусть* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_0 > 1$, $\lambda_n = 1$, $h > 0$ *и* $\Omega_\lambda(h) = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), |x_i| < x_n^{\lambda_0}, i = \overline{1, n-1}, 0 < x_n < h\}$. *Тогда для каждой функции* $f \in w_p^r(\Omega_\lambda(h))$, $r \in \mathbb{N}^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *существует* $\pi_{r-1}(f, \Omega_\lambda(h)) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ *такой, что*

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_\lambda(h)) \|_{w_p^s(\Omega_\lambda(h))} \ll h^{r-s} \| f \|_{w_p^r(\Omega_\lambda(h))}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

Лемма 4 [3]. *Пусть* Π_ε *и* $\Pi_{c\varepsilon}$ — *n-мерные параллелепипеды из леммы 2*, $\pi_{r-1} \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{N}^1$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\| \pi_{r-1} \|_{L_p(\Pi_{c\varepsilon})} \ll c^{r-1+n/p} \| \pi_{r-1} \|_{L_p(\Pi_\varepsilon)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Доказательство теоремы. При каждом фиксированном $N \in \mathbb{N}^1$ разобьем все пространство $\mathbb{R}^n$ на конгруэнтные кубы $Q_{N,\mu}$, $\mu \in \mathbb{N}^1$, с ребрами длины N^{-1}. Рассматривая набор всех непустых множеств $Q_{N,\mu} \cap \Omega_\lambda$, пронумеруем их в некотором порядке. Получим разбиение Ω_λ на попарно непересекающиеся множества $\Omega_{N,m}$, $m = \overline{1, M}$, где $M = M(n, N)$. Очевидно, $M \asymp N^n$. Воспользовавшись леммой 1, определим набор многочленов $P_{\nu N}(x, \Omega_{N,m}) \in \mathcal{P}_{\nu N}(\mathbb{R}^n)$, $m = \overline{1, M}$, таких, что

$$\sum_{m=1}^{M} P_{\nu N}(x; \Omega_{N,m}) \equiv 1, \quad x \in \Omega_\lambda, \tag{3}$$

$$0 \leqslant P_{\nu N}(x; \Omega_{N,m}) \leqslant 1,$$

$$|D^\alpha P_{\nu N}(x; \Omega_{N,m})| \leqslant c(n, \nu, \alpha) N^{|\alpha|} (1 + N\rho(x, \Omega_{N,m}))^{n-\nu}, \quad m = \overline{1, M}, \ x \in \Omega_\lambda. \tag{4}$$

Для каждой функции $f \in w_p^r(\Omega_\lambda)$ определим набор многочленов $\pi_{r-1}(x, f, \Omega_{N,m})$, $m = \overline{1, M}$.

Пусть $\Omega_{N,m} \subset \Omega_{(N,k)} = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), \ |x_i| > x_n^{\lambda_0}, \ i = \overline{1, n-1}, (k-1) N^{-1} \leqslant x_n \leqslant kN^{-1}, 1 < k \leqslant N^{1-1/\lambda_0}\}$. Очевидно, существуют постоянные $c_1 = c_1(n, \lambda_0) > 0$, $c_2 = c_2(n, \lambda_0) > 0$ такие, что множество $\Omega_{(N,k)}$ содержит параллелепипед $\Pi'_{(N,k)} = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), |x_i| < c_1(kN^{-1})^{\lambda_0}, i = \overline{1, n-1}, c_1(k-1) N^{-1} < x_n < c_1 kN^{-1}, 1 < k \leqslant N^{1-1/\lambda_0}\}$, является звездным относительно $\Pi'_{(N,k)}$ и содержится в параллелепипеде $\Pi''_{(N,k)} = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), |x_i| < c_2(kN^{-1})^{\lambda_0}, i = \overline{1, n-1}, c_2(k-1) N^{-1} < x_n < c_2 kN^{-1}, 1 <$

$< k \leqslant N^{1-1/\lambda_0}\}$. Тогда согласно лемме 2 существует многочлен $\pi_{r-1}(f, \Omega_{(N,k)}) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{(N,k)}) \|_{w_p^s(\Omega_{(N,k)})} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega_{(N,k)})} |\Omega_{(N,k)}|^{r-s}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

По определению полагаем $\pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) = \pi_{r-1}(f, \Omega_{(N,k)})$. Очевидно,

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^s(\Omega_{N,m})} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega_{(N,k)})} N^{r-s}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

Если $\Omega_{N,m} \subset \Omega_{(N,0)} = \{x : x = (x_1, \ldots, x_n), \ |x_i| < x_n^{\lambda_0}, \ i = \overline{1, n-1}, 0 < x_n < N^{-1}\}$, то в силу леммы 3 существует многочлен $\pi_{r-1}(f, \Omega_{N,0}) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{(N,0)}) \|_{w_p^s(\Omega_{(N,0)})} \ll \| f \|_{w_p^s(\Omega_{(N,0)})} N^{-r+s}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

По определению положим $\pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) = \pi_{r-1}(f, \Omega_{(N,0)})$. Очевидно, в этом случае

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^s(\Omega_{N,m})} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega_{(N,0)})} N^{-r+s}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

Пусть теперь $\Omega_{N,m} \subset \Omega_{(N,k)} = \{x : x = (x_1, \ldots, x_n), \ |x_i| < x_n^{\lambda_0}, \ i = \overline{1, n-1}, \ (k-1) N^{-1} \leqslant x_n \leqslant kN^{-1}, \ k > N^{1-1/\lambda_0}\}$. Если $\Omega_{N,m}$ — куб, полностью содержащийся в Ω_λ, то из леммы 2 следует существование многочлена $\pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ такого, что

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^s(\Omega_{N,m})} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega_{N,m})} N^{-r+s}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

Если же $\Omega_{N,m}$ не является кубом, полностью лежащим в Ω_λ, то, выбрав какой-нибудь ближайший к $\Omega_{N,m}$ куб $\Omega_{N,m'} = Q_{N,\mu'}$, содержащийся в Ω_λ, обозначим через $Q'_{N,\mu'}$ куб, концентрический с кубом $Q_{N,\mu'}$ с ребром минимальной длины такой, что $Q'_{N,\mu'} \supset \Omega_{N,m}$. Нетрудно проверить, что множество $Q'_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda$ является звездным относительно куба $Q_{N,\mu'}$ и существует $c = c(n, \lambda_0) > 0$ такое, что $|Q'_{N,\mu'}| \leqslant c |Q_{N,\mu'}|$. Тогда в силу леммы 2 существует многочлен $\pi_{r-1}(f, Q'_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\| f - \pi_{r-1}(f, Q'_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda) \|_{w_p^s(Q_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda)} \ll \| f \|_{w_p^r(Q'_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda)} |Q'_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda|^{r-s},$$

$$s = \overline{0, r-1}.$$

По определению полагаем $\pi_{r-1}(f \Omega_{N,m}) = \pi_{r-1}(f, Q'_{N,\mu'} \cap \Omega_\lambda)$. Очевидно, в этом случае

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^s(\Omega_{N,m})} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega_\lambda \cap Q'_{N,\mu'})} N^{-r+s}, \quad s = \overline{0, r-1}.$$

Из способа определения многочленов $\pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m})$ видно, что существует $c_0 = c_0(n, \lambda_0) > 0$ такое, что для каждого $\Omega_{N,m}$, $m = \overline{1, M}$, найдется множесто $\Omega'_{N,m} \supset \Omega_{N,m}$, являющееся объединением конечного числа (независящего от N) множеств разбиения $\{\Omega_{N,\mu}\}_{\mu=1}^{M}$ таких, что расстояние от них до $\Omega_{N,m}$ не превышает $c_0 N^{-1}$ и при этом

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^s(\Omega_{N,m})} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,m})} N^{-r+s}, \quad s = \overline{0, r-1}. \tag{5}$$

Определим теперь многочлены, которые осуществляют приближение $f \in w_p^r(\Omega_\lambda)$ на всей области Ω_λ. Полагаем

$$P_{\nu,n,r}(x; f) = \sum_{m=1}^{M} \pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,m}) P_{\nu N}(x, \Omega_{N,m}). \tag{6}$$

Покажем, что многочлены вида (6) удовлетворяют неравенствам (1), (2) при $N := N\nu + r - 1$, и $\nu \geqslant 2\lambda_0 (r - 1 + n) + 2n + 8$. Из тождества (3) следует представление

$$f(x) - P_{\nu,N,r}(x; f) = \sum_{m=1}^{M} (f(x) - \pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,m})) P_{\nu N}(x; f, \Omega_{N,m}),$$

а из него — оценки

$$\| f - P_{n,\nu,r} \|_{w_p^s(\Omega)} = \Big\| \sum_{m=1}^{M} (f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m})) P_{\nu N}(\Omega_{N,m}) \Big\|_{w_p^s(\Omega)} \ll$$

$$\ll \sum_{|\alpha|=s} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \Big\| \sum_{m=1}^{M} (D^{\alpha-\beta} f - D^{\alpha-\beta}(f, \Omega_{N,m})) D^{\beta} P_{\nu N}(\Omega_{N,m}) \Big\|_{L_p(\Omega)} \ll$$

$$\ll \sum_{|\alpha|=s} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \Big\| \sum_{m=1}^{M} | D^{\alpha-\beta} f - D^{\alpha-\beta} \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) | \, | D^{\beta} P_{\nu N}(\Omega_{N,m}) |^{1/2} \times$$

$$\times | D^{\beta} P_{\nu N}(\Omega_{N,m}) |^{1/2} \|_{L_p(\Omega)}, \quad s = \overline{0, r-1}, \quad 1 < p < \infty.$$

Используем далее неравенство Гельдера для сумм

$$\| f - P_{n,\nu,r} \|_{w_p^s(\Omega)} \ll \sum_{|\alpha|=s} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \Big(\int_{\Omega} \Big(\sum_{m=1}^{M} | D^{\alpha-\beta} f(x) - D^{\alpha-\beta} \pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,m}) |^{p} \times$$

$$\times | D^{\beta} P_{\nu N}(x; \Omega_{N,m}) |^{p/2} \Big) \Big(\sum_{m=1}^{M} | D^{\beta}(x; \Omega_{N,m}) |^{q/2} \Big)^{p/q} dx \Big)^{1/p},$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Рассмотрим вторую сумму, стоящую под знаком интеграла. Использовав (4), получим

$$\Big(\sum_{m=1}^{M} | D^{\beta} P_{\nu N}(x; \Omega_{N,m}) |^{q/2} \Big)^{p/q} \ll \Big(\sum_{m=1}^{m} N^{|\beta|} (1 + N\rho(x; \Omega_{N,m}))^{n-\nu} \Big)^{q/2} \Big)^{p/q} \ll$$

$$\ll N^{\frac{|\beta| p}{2}} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \Big)^{p/q} \ll N^{\frac{|\beta| p}{2}}.$$

Следовательно,

$$\| f - P_{\nu,n,r} \|_{w_p^s(\Omega)} \ll \sum_{|\alpha|=s} \sum_{\beta \leqslant \alpha} N^{|\beta|/2} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} \int_{\Omega_{\mu}} | D^{\alpha-\beta} f(x) -$$

$$- D^{\alpha-\beta} \pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,m}) |^{p} \, | D^{\beta} P_{\nu N}(x; \Omega_{N,m}) |^{p/2} dx \Big)^{1/p}.$$

Снова использовав (4), получим оценки

$$\| f - P_{\nu,n,r} \|_{w_p^s(\Omega)} \ll \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ |\alpha|=s}} N^{|\beta|} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} (\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{m,N}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \times$$

$$\times (1 + N\rho(\Omega_{N,m}; \Omega_{N,\mu})^{\frac{n-\nu}{2}})^{p} \Big)^{1/p} \ll \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ |\alpha|=s}} N^{|\beta|} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} (\| f -$$

$$- \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\mu}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu})^{\frac{n-\nu}{2}} + \| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\mu}) -$$

$$- \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{n-\nu}{2}} \Big)^{p} \Big)^{1/p}.$$

Использовав (5), будем иметь

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\mu}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \ll N^{-r+|\alpha|-|\beta|} \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,\mu})}.$$

Рассмотрим теперь

$$\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\mu}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})}.$$

Пусть Ω_{N,k_i}, $i = \overline{1, i(\mu, m)}$, — некоторый конечный набор множеств из разбиения $\{\Omega_{N,m}\}_{m=1}^M$ таких, что $\Omega_{N,k_1} = \Omega_{N,\mu}$, $\Omega_{N,k_{i(\mu,m)}} = \Omega_{N,m}$, $\rho(\Omega_{N,k_i}, \Omega_{N,k_{i+1}}) = 0$, $i = \overline{1, i(\mu, m) - 1}$. Такой набор будем называть «цепочкой», соединяющей $\Omega_{N,\mu}$ с $\Omega_{N,m}$. Цепочку» с минимальным числом $i(\mu, m)$ будем называть кратчайшей. Будем считать, что каждая пара множеств $\Omega_{N,\mu}$, $\Omega_{N,m}$ соединена кратчайшей «цепочкой» Ω_{N,k_i}, $i = \overline{1, i(m, \mu)}$. Тогда

$$\pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,\mu}) - \pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,m}) = \sum_{i=1}^{i(m,\mu)-1} (\pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,k_i}) - \\ - \pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,k_{i+1}}).$$

Следовательно,

$$\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\mu}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \ll \sum_{i=1}^{i(\mu,m)-1} \| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \\ - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})}.$$

Рассмотрим отдельно

$$\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})}.$$

Пусть $\overline{\Omega}_{N,k_i} = \Omega_{N,k_i} \cup \Omega_{Nk_{i+1}}$ и $\pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют неравенству (5) для $\overline{\Omega}_{N,k_i}$. Очевидно, такие полиномы существуют. Пусть Q^0_{N,k_i} — параллелепипед максимальных размеров, вписанный в Ω_{N,k_i}, а Q^*_{N,k_i} — минимальный параллелепипед со сторонами, пропорциональными сторонам Q^0_{N,k_i}, концентрический с Q^0_{N,k_i} и содержащий $\Omega_{N,\mu}$; тогда, используя лемму 4, получаем

$$\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \ll \| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \\ - \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} + \| \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \ll \\ \ll \| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(Q^*_{N,k_i})} + \| \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) - \\ - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(Q^*_{N,k_{i+1}})} \ll \left(\frac{|Q^*_{N,k_i}|}{|Q^0_{N,k_i}|} \right)^{r-1-|\alpha|+|\beta|+n/p} \| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \\ - \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(Q^0_{N,k_i})} + \left(\frac{|Q^*_{N,k_{i+1}}|}{|Q^0_{N,k_{i+1}}|} \right)^{r-1-|\alpha|+|\beta|+n/p} \| \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) - \\ - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(Q^0_{N,k_{i+1}})}.$$

Учитывая, что $\dfrac{|Q^*_{N,k_i}|}{|Q^0_{N,k_i}|} \ll (1 + N\rho(\Omega_{N,\mu}, \Omega_{N,m}))^{\lambda_0}$, $i = \overline{1, i(m, \mu)}$, имеем

$$\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \ll$$

$$\ll (1 + N\rho(\Omega_{N,\mu}, \Omega_{N,m}))^{\lambda_0(r-1-|\alpha|+|\beta|+n/p)} (\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) -$$

$$- \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(Q^0_{N,k_i})} + \| \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) -$$

$$- \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_{i+1}}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(Q^0_{N,k_{i+1}})} \ll (1 + N\rho(\Omega_{N,\mu}, \Omega_{N,m}))^{\lambda_0(r-1-|\alpha|+|\beta|+n/p)} \times$$

$$\times (\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,k_i})} + \| f - \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,k_i})} +$$

$$+ \| f - \pi_{r-1}(f, \overline{\Omega}_{N,k_i}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,k_{i+1}})} + \| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,k\, i+1}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,k_{i+1}})}.$$

Используя (5), получаем

$$\| \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\mu}) - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,m}) \|_{w_p^{|\alpha|-|\beta|}(\Omega_{N,\mu})} \ll$$

$$\ll (1 + N\rho(\Omega_{N,\mu}, \Omega_{N,m}))^{\lambda_0(r-1-|\alpha|+|\beta|+n/p)} N^{-r+|\alpha|-|\beta|} (\| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,k_i})} +$$

$$+ \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,k_{i+1}})}).$$

В итоге, учитывая, что $|\alpha| \geqslant |\beta|$, имеем

$$\| f - P_{r,N,\nu} \|_{w_p^s(\Omega)} \ll N^{-r+s} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} \Big((1 + N\rho(\Omega_{N,\mu}, \Omega_{N,m}))^{\frac{n-\nu}{2}} \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,\mu})} +$$

$$+ (1 + N\rho(\Omega_{N,\mu}, \Omega_{N,m}))^{\lambda_0(r-1+n/p)+\frac{n-\nu}{2}} \sum_{i=1}^{i(m,\mu)-1} \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,k_i})} \Big)^p \Big)^{1/p}.$$

Снова применим неравенство Гельдера для сумм

$$N^{-r+s} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} ((1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{n-\nu}{4}} (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{n-\nu}{4}} \times$$

$$\times \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,\mu})} + \sum_{i=1}^{i(m,\mu)-1} (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{\lambda_0}{2}\left(r-1+\frac{n}{p}\right)+\frac{n-\nu}{4}} \times$$

$$\times (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{\lambda_0}{2}\left(r-1+\frac{n}{p}\right)+\frac{n-\nu}{4}} \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,k_i})} \Big)^p \Big)^{1/p} \ll$$

$$\ll N^{-r+s} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} ((1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{n-\nu}{4}p} \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,\mu})} +$$

$$+ (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\left(\frac{\lambda_0}{2}\left(r-1+\frac{n}{p}\right)+\frac{n-\nu}{4}\right)p} \sum_{i=1}^{i(m,\mu)-1} \| f \|^p_{w_p^r(\Omega'_{N,k})} \Big) \times$$

$$\times (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{n-\nu}{2}q} (i(m,\mu) - 1) \times$$

$$\times (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\left(\frac{\lambda_0}{2}\left(r-1+\frac{n}{p}\right)+\frac{n-\nu}{4}\right)q} \Big)^{\frac{p}{q}} \Big)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll N^{-r+s} \Big(\sum_{m=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{M} (1 + N\rho(\Omega_{N,m}, \Omega_{N,\mu}))^{\frac{n-\nu}{4}} \| f \|^p_{w_p^r(\Omega'_{N,\mu})} +$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\mu=1}^{M}(1+N\rho(\Omega_{N,m},\Omega_{N,\mu}))^{\left(\frac{\lambda_0^-}{2}\left(r-1+\frac{n}{p}\right)+\frac{n-\nu}{4}\right)p}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{i(m,\mu)-1}\|f\|^p_{w_p^r(\Omega_{N,k_i})}\Big)^{1/p},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Учитывая выбор ν и конечную не зависящую от N кратность покрытия Ω_λ множествами $\Omega'_{N,\mu}$, окончательно имеем

$$\|f-P_{n,\nu,r}\|_{w_p^s(\Omega_\lambda)}\ll N^{-r+s}\|f\|_{w_p^r(\Omega_\lambda)}.$$

Легко видеть, что аналогичные оценки верны и при $p=\overline{1,\infty}$. Чтобы доказать неравенство (2) при $N:=N\nu+r-1$, отметим, что для каждого $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, $|\beta|=r$, выполняется тождество

$$D^\beta\pi_{r-1}(x;f,\Omega_{N,m})\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Кроме того, если $|\alpha-\beta|\geqslant 1$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, то из тождества (3) следует тождество

$$\sum_{m=1}^{M}D^{\alpha-\beta}P_{\nu N}(x;\ \Omega_{N,m})\equiv 0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Поэтому при каждом $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ таком, что $|\alpha|=r$, будут выполняться тождества

$$D^\alpha P_{N,\nu,r}(x;f)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\frac{|\alpha|!}{|\alpha-\beta|!\,|\beta|!}\sum_{m=1}^{M}D^\beta\pi_{r-1}(x;\ f,\ \Omega_{N,m})\times$$

$$\times D^{\alpha-\beta}P_{\nu N}(x;\ \Omega_{N,m})=\sum_{m=1}^{M}(D^\beta f(x)-D^\beta\pi_{r-1}(x;\ f,\ \Omega_{N,m})\,P_{\nu N}(x;\Omega_{N,m}).$$

Из этих тождеств с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, получаем искомую оценку

$$\|P_{\nu,N,r}(f)\|_{W_p^r(\Omega_\lambda)}\ll\|f\|_{W_p^r(\Omega_\lambda)}.$$

Покажем, теперь, что (1) и (2) выполняются для всех $N\geqslant r-1$. Очевидно, в качестве $P_{r-1}(f)$ можно использовать многочлены $\pi_{r-1}(x;f,\Omega_\lambda(1))$ из леммы 3. Если же $N\geqslant r$, то, выбрав $N'\in\mathbb{N}^1$ таким, что $(N'-1)\nu+r-1\leqslant N<N'\nu+r-1$, положим $P_N(x;f)=P_{N',\nu,r}(x;f)$, где $P_{N',\nu,r}(x;f)$ — многочлены, определяемые по формуле (6). Так как $N'\asymp N$, то для $P_N(x;f)$ выполняются неравенства (1) и (2).

Замечание. Отметим, что при $p=\infty$ каждая функция $f\in w_\infty^r(\Omega_\lambda)$ может быть продолжена с сохранением класса на $\mathbb{R}^n$. При $1\leqslant p<\infty$ такое положение невозможно. Если $p=\infty$, то утверждение теоремы следует из [4].

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— М. : Наука, 1988.— 366 с.
2. *Коновалов В. Н.* Равномерное приближение алгебраическими многочленами и продолжение функций многих действительных переменных // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 4.— С. 485—492.
3. *Семенюк В. Б.* Приближение функций и их производных некоторыми сплайнами на областях с внешним пиком // Исследования по теории приближения функций.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1991.— С. 100—109.
4. *Коновалов В. Н.* Описание следов некоторых классов функций многих переменных.— Киев, 1984.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.21).

Получено 07.06.91