УДК 517.948

М. А. Синенко, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Об оптимальной скорости сходимости метода В. И. Лебедева на некоторых классах операторных уравнений

Получены оценки сверху и снизу скорости сходимости метода В. И. Лебедева на некоторых классах операторных уравнений II рода.

Одержані оцінки зверху і знизу швидкості збіжності методу В. І. Лебедєва на деяких класах операторних рівнянь II роду.

В настоящее время для решения линейных операторных уравнений II рода широко используют так называемые аппроксимационно-итеративные методы. Наиболее известными методами указанного типа являются проекционно-итеративный (п. и.) метод, возникающий на базе разработанного Ю. Д. Соколовым метода осреднения функциональных поправок [1, 2], и KP метод [3].

Первый (п. и.) метод изучен в работах А. Ю. Лучки, Н. С. Курпеля и др. Меньше исследован KP метод, предложенный В. И. Лебедевым.

Рассмотрим суть каждого метода применительно к операторным уравнениям II рода

$$u = Hu + f, \tag{1}$$

где H — линейный оператор, f — известный, u — искомый элементы из гильбертова пространства X.

Пусть F — некоторое конечномерное подпространство X ($\dim F = \varphi_0(n)$), P — ортопроектор на F ($P: X \to F$). Тогда п. и. метод состоит в следующем: если u_k — приближенное решение уравнения (1), полученное на k-й итерации, то следующее $(k+1)$-е приближение строим по формуле

$$u_{k+1} = f + H(u_k + \delta_k), \tag{2}$$

где поправка δ_k определяется из уравнения с конечномерным оператором

$$\delta_k = PH\delta_k + P(f + Hu_k - u_k).$$

Теперь рассмотрим вычислительную схему одного из вариантов KP метода, а именно: KP_1P_2 метод. Здесь P_1, P_2 — ортопроекторы соответственно на подпространства Φ_1, $\dim \Phi_1 = \varphi_1(n)$, Φ_2 $\dim \Phi_2 = \varphi_2(n)$. Причем будем считать, что $F = \Phi_1 \oplus \Phi_2$, т. е. ортопроектор P, рассмотренный выше, равен $P_1 + P_2$. Тогда если u_k — приближенное решение уравнения (1), полученное на k-й итерации, то

$$\begin{gathered} u_{k+1/3} = Hu_k + f, \\ \omega_{k+1/3} = P_1H\omega_{k+1/3} + P_1H(u_{k+1/3} - u_k), \\ u_{k+2/3} = u_{k+1/3} + \omega_{k+1/3}, \\ \omega_{k+2/3} = P_2H\omega_{k+2/3} + P_2H(u_{k+2/3} - u_k), \\ u_{k+1} = u_{k+2/3} + \omega_{k+2/3}. \end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что если подпространства F, Φ_1, Φ_2 выбрать так, чтобы $\dim F = N$, $\dim \Phi_1 \approx \dim \Phi_2 \approx \frac{1}{2}N$, (знак $\approx$ означает, что указанные размерности «приблизительно» равны $\frac{1}{2}N$), то для реализации п. и. метода на каждой итерации необходимо решать систему линейных уравнений размерности $N \times N$, а пользуясь KP методом — две системы размерности $\frac{1}{2}N \times \frac{1}{2}N$, что, вообще говоря, сделать проще.

По терминологии [4, с. 292] процесс (3) — линейная итерация, т. е. для погрешности k-й итерации этого процесса $\varepsilon_k = u - u_k$ справедливо представление $\varepsilon_k = T\varepsilon_{k-1}$, где $T = T(H, F)$ — линейный оператор, характеризующий тот или иной итерационный процесс.

Для KP_1P_2 метода

$$T = (I - P_2H)^{-1}(I - P_1H)^{-1}(H - P_1H - P_2H + P_1HP_2H) =$$
$$= (I - P_2H)^{-1}(I - P_1H)^{-1}(H - PH + P_1HP_2H).$$

Известно [4, с. 293], что процесс линейных итераций сходится со скоростью геометрической прогресии со знаменателем

$$\mu(T(H, F)) = \lim_{m\to\infty}(\| T^m \|_{x\to x})^{1/m}.$$

Следовательно, скорость сходимости линейных итераций на классе $\mathcal{H}$ операторов H из уравнений (1) характеризуется величиной

$$\mu(T, \mathcal{H}, F) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \mu(T(H, F)).$$

Естественно выбирать подпространства F таким образом, чтобы величина $\mu(T, H, F)$ была по возможности меньшей, т. е. оптимизировать итерационный процесс в смысле величины

$$\mu_N(T, \mathcal{H}) = \inf_{\substack{F\subset X\\ \dim F = N}} \mu(T, \mathcal{H}, F).$$

В настоящей работе на некоторых классах $\mathcal{H}$ получены оценки сверху и снизу величины $\mu_N(T, \mathcal{H})$ для KP_1P_2 метода. Отметим, что в ряде важных случаев эти оценки совпадают по порядку с аналогичными оценками для п. и. метода.

В гильбертовом пространстве X рассмотрим последовательность вложенных друг в друга бесконечномерных подпространств $X \supset X^1 \supset \ldots$ $\ldots \supset X^r \supset \ldots$ и последовательность линейных (не обязательно ограниченных) операторов $\mathcal{A}_0 = I$, $\mathcal{A}_i : X_i \to X$, $i = 1, 2, \ldots$. Норму в X^ν зададим соотношением

$$\| f \|_{X^\nu} = \| f \|_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \| \mathcal{A}_i f \|_X .$$

Кроме того, предположим, что существует последовательность вложенных друг в друга конечномерных подпространств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \ldots$ $\ldots \subset X$, $\dim F_n = \varphi(n) \asymp n$ таких, что для любых k и ν

$$\| I - P_{F_k} \|_{X^\nu \to X} \leqslant a_\nu k^{-\nu},$$

где P_{F_k} — ортопроектор на F_k, a_ν — некоторые константы.

Рассмотрим класс операторов

$$\mathcal{H}^{r,s} = \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma) = \{H \mid H : X \to X^r, \| H \|_{X\to X^r} \leqslant \alpha,$$
$$\|(I - H)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \gamma, (\mathcal{A}_iH)^* : X \to X^s, \|(\mathcal{A}_iH)^*\|_{X\to X^s} \leqslant \beta_i, i = \overline{0, r}\}$$

и положим в рамках KP_1P_2 метода (3) $F = F_n$, $\Phi_1 = F_m$, $\Phi_2 = F_n \setminus F_m$ $\left(\text{причем } \dim F_m \approx \frac{1}{2}\dim F_n,\ m \geqslant \frac{1}{2} n\right)$

$$P = P_{F_n}, \quad P_1 = P_{F_m}, \quad P_2 = P_{F_n} - P_{F_m}. \tag{4}$$

В дальнейшем через c, c_1, c_2 будем обозначать различные константы, величины которых зависят лишь от параметров, входящих в определение класса $H^{r,s}$.

Теорема 1. *Пусть KP_1P_2 — метод, определенный соотношениями* (3), (4). *Тогда для класса* $\mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma)$ *и* n *такого, что* $2^{r+1}\alpha\gamma n^{-r} < 1$, *справедлива оценка*

$$\mu(T, \mathcal{H}^{r,s}, Fn) \leqslant Cn^{-r-s}.$$

Если, кроме того, k *таково, что* $\dim F_{n+k} > N$ *и* $F_{n+k} \subset X^r \cap X^s$, *то*

$$\mu_N(T, \mathcal{H}^{r,s}) \geqslant \delta \| P_{F_{n+k}} \|^{-1}_{X\to X^r} \| P_{Fn+k} \|^{-1}_{X\to X^s},$$

где $\delta = \min\left\{\alpha, \dfrac{\gamma-1}{\gamma}, \beta_1, \ldots, \beta_r\right\}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу теоремы о разрешимости приближенного уравнения [5, с. 517]

$$\|(I-P_1H)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \frac{\|(I-H)^{-1}\|_{X\to X}}{1-\|(I-H)^{-1}\|_{X\to X}\|H-P_1H\|_{X\to X}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma}{1-2^r\gamma\alpha n^{-r}} = c_1,$$

$$\|P_2H\|_{X\to X} = \|P_{F_n}H - P_{F_m}H\|_{X\to X} \leqslant \|H-P_{F_n}H\|_{X\to X} +$$

$$+ \|H-P_{F_m}H\|_{X\to X} \leqslant \alpha(1+2^r)n^{-r} = q < 1.$$

Тогда $\|(I-P_2H)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \dfrac{1}{1-q} = c_2$ [5, с. 211]. Оценим норму T^m. Для этого T^m представим в виде суммы двух слагаемых

$$T^m = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(H-PH+P_1HP_2H)T^{m-1} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2,$$

где

$$\mathcal{J}_1 = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(H-PH)T^{m-1},$$

$$\mathcal{J}_2 = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}P_1HP_2HT^{m-1};$$

$\mathcal{J}_1$, в свою очередь, имеет вид

$$\mathcal{J}_1 = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(I-P)H(I-H)^{-1}(I-P_1H-P_2H+$$

$$+P_1HP_2H+P_1H+P_2H-P_1HP_2H-H)(I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}\times$$

$$\times(H-PH)T^{m-2} + (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(I-P)H(I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}\times$$

$$\times P_1HP_2HT^{m-2} = \mathcal{J}_1^{\mathrm{I}} + \mathcal{J}_1^{\mathrm{II}} - \mathcal{J}_1^{\mathrm{III}} + \mathcal{J}_1^{\mathrm{IV}},$$

где

$$\mathcal{J}_1^{\mathrm{I}} = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(I-P)(I-H)^{-1}H(I-P)HT^{m-2},$$

$$\mathcal{J}_1^{\mathrm{II}} = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(I-P)(I-H)^{-1}H(PH-H)(I-P_2H)^{-1}\times$$

$$\times(I-P_1H)^{-1}(I-P)HT^{m-2},$$

$$\mathcal{J}_1^{\mathrm{III}} = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(I-P)H(I-H)^{-1}P_1HP_2H(I-P_2H)^{-1}\times$$

$$\times(I-P_1H)^{-1}(I-P)HT^{m-2},$$

$$\mathcal{J}_1^{\mathrm{IV}} = (I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}(I-P)H(I-P_2H)^{-1}(I-P_1H)^{-1}P_1HP_2HT^{m-2}.$$

Оценим норму каждого слагаемого полученной суммы:

$$\|\mathcal{J}_1^{\mathrm{I}}\|_{X\to X} \leqslant \gamma c_1c_2 \sup_{\|f\|_X\leqslant 1}\sup_{\|g\|_X\leqslant 1} |(H(I-P)^2HT^{m-2}f, g)| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma c_1c_2 \sup_{\|f\|_X\leqslant 1}\sup_{\|g\|_X\leqslant 1} |((I-P)HT^{m-2}f, (I-P)H^*g)| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma c_1 c_2 \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} \|I - P\|_{X^r \to X} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} \| f \|_X \|I - P\|_{X^s \to X} \times$$

$$\times \| H^* \|_{X \to X^s} \| g \|_X \leqslant \gamma c_1 c_2 \beta_0 n^{-r-s} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\| \mathcal{J}_1^{\mathrm{III}} \|_{X \to X} \leqslant c_3 n^{-r} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} \| P_1 H P_2 H \|_{X \to X} \leqslant c_3 n^{-r} \times$$

$$\times \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} \| P_1 H (I - P_1) P_2 (I - P_1) H \|_{X \to X} \leqslant c_3 n^{-r} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} \times$$

$$\times \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} |(f, \; H^* g - P_1 H^* g)| \| I - P_1 \|_{X^r \to X} \| H \|_{X \to X^r} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha c_3 2^{r+s} n^{-2r-s} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r}. \tag{6}$$

Аналогично

$$\| \mathcal{J}_1^{\mathrm{II}} \|_{X \to X} \leqslant \alpha \gamma c_1 c_2 \beta_0 n^{-2r-s} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r}, \tag{7}$$

$$\| \mathcal{J}_1^{\mathrm{IV}} \|_{X \to X} \leqslant \alpha \beta_0 c_1 c_2 2^{r+s} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} n^{-2r-s}, \tag{8}$$

$$\| \mathcal{J}_2 \|_{X \to X} \leqslant 2^{r+s} c_1 c_2 \beta_0 n^{-r-s} \| HT^{m-1} \|_{X \to X^r}. \tag{9}$$

Таким образом, учитывая (5) — (9), получаем

$$\| T^m \|_{X \to X} \leqslant c_0 n^{-r-s} \| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} + c_1 c_2 \beta_0 n^{-r-s} \| HT^{m-1} \|_{X \to X^r}. \tag{10}$$

Оценим $\| HT^{m-2} \|_{X \to X^r}$:

$$\| HT^{m-2} \|_{X \to X^r} = \| H (I - P_2 H)^{-1} (I - P_1 H)^{-1} (H - PH + P_1 H P_2 H) \times$$

$$\times T^{m-3} \|_{X \to X} \leqslant \| T_1 \|_{X \to X^r} + \| T_2 \|_{X \to X^r},$$

где

$$T_1 = H (I - P_2 H)^{-1} (I - P_1 H)^{-1} (H - PH) T^{m-3},$$

$$T_2 = H (I - P_2 H)^{-1} (I - P_1 H)^{-1} P_1 H P_2 H T^{m-3}.$$

В свою очередь,

$$\| T_1 \|_{X \to X^r} \leqslant \| T_3 \|_{X \to X^r} + \| T_4 \|_{X \to X^r} + \| T_5 \|_{X \to X^r},$$

где

$$T_3 = (I - H)^{-1} H (I - P) H T^{m-3},$$

$$T_4 = (I - H)^{-1} H (I - P) H (I - P_2 H)^{-1} (I - P_1 H)^{-1} (I - P) H T^{m-3},$$

$$T_5 = (I - H)^{-1} H P_1 H P_2 H (I - P_2 H)^{-1} (I - P_1 H)^{-1} (I - P) H T^{m-3}.$$

Оценим теперь норму T_3. Для произвольного элемента $f \in X$, ($\| f \|_X \leqslant 1$) положим $\varphi = T_3 f$. Заметим, что φ является решением уравнения

$$\varphi = H\varphi + H (I - P) H T^{m-3} f.$$

Кроме того,

$$\| \varphi \|_X \leqslant \gamma \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} |(H (I - P)^2 H T^{m-3} f, \; g)| \leqslant \gamma \beta_0 n^{-r-s} \| HT^{m-3} \|_{X \to X^r}.$$

Используя определение нормы в X^r, имеем

$$\| T_3 \|_{X \to X_r} = \| \varphi \|_{X_r} \leqslant \sum_{i=0}^{r} \| \mathcal{A}_i H \varphi \|_X + \sum_{i=0}^{r} \| \mathcal{A}_i H (I - P) H T^{m-3} f \|_X =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} | (HT^{m-3} f - PHT^{m-3} f, \; (\mathcal{A}_i H)^* g - P (\mathcal{A}_i H)^* g)| + \| H\varphi \|_{X^r} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\alpha \beta_0 \gamma + \sum_{i=0}^{r} \beta_i \Big) n^{-r-s} \| HT^{m-3} \|_{X \to X^r}. \tag{11}$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\| T_4 \|_{X\to X^r} \leqslant \alpha c_1 c_2 \left(\alpha\beta_0\gamma + \sum_{i=0}^{r} \beta_i\right) n^{-r-s} \| HT^{m-3} \|_{X\to X^r}, \tag{12}$$

$$\| T_5 \|_{X\to X^r} \leqslant \alpha c_1 c_2 \beta_0 \left(\alpha^2\gamma + \sum_{i=0}^{r} \beta_i\right) 2^{r+s} n^{-2r-s} \| HT^{m-3} \|_{X\to X^r}. \tag{13}$$

$$\| T_2 \|_{X\to X^r} \leqslant 2^{r+s} \beta_0 c_1 c_2 \sum_{i=0}^{r} \beta_i n^{-r-s} \| HT^{m-3} \|_{X\to X^r}. \tag{14}$$

Учитывая (11) — (14), имеем

$$\| HT^{m-2} \|_{X\to X^r} \leqslant Cn^{-r-s} \| HT^{m-3} \|_{X\to X^r} \leqslant \alpha C^{m-2} n^{-(m-2)(r+s)}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (10), получаем

$$\| T^m \|_{X\to X} \leqslant c_4 c^{m-2} n^{-(m-1)(r+s)},$$

$$\mu (T(H, F_n)) = \lim_{m\to\infty} \| T^m \|_{X\to X}^{1/m} \leqslant Cn^{-r-s}.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого $H \in \mathscr{H}^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma)$, то

$$\mu (T, \mathscr{H}^{r,s}, F_n) = \sup_{H\in\mathscr{H}^{r,s}} \mu (T(H, F_n)) \leqslant cn^{-r-s}.$$

Перейдем к оценке снизу. Для этого зафиксируем произвольные подпространства F, Φ_1, Φ_2, $\dim F = N$, $\dim \Phi_1 \approx \frac{1}{2} N$, $\Phi_2 = F \setminus \Phi_1$, P_F P_{Φ_1}, P_{Φ_2} — ортопроекторы на подпространства F, Φ_1, Φ_2 и рассмотрим оператор

$$H_0 = \delta \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^r}^{-1} \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^s}^{-1} P_{F_{n+k}},$$

где $\delta > 0$, $P_{F_{n+k}} : X \to F_{n+k}$, k — натуральное число такое, что $\dim F_{n+k} > 2N$, $F_{n+k} \subset X^r \cap X^s$.

Как показано в [6], если положить $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{\gamma-1}{\gamma}, \{\beta_i\}, i = \overline{0, r}\right\}$, то $H_0 \in \mathscr{H}^{r,s}$. Оператор $(I - P_{\Phi_1} H_0)^{-1}$ представим в виде $I - B_1$, где B_1: $X \to \Phi_1$, аналогично $(I - P_{\Phi_2} H_0)^{-1} = I - B_2$, $B_2 : X \to \Phi_2$. Тогда

$$[(I - P_{\Phi_1} H_0)^{-1} (I - P_{\Phi_2} H_0)^{-1} (I - P_F + P_{\Phi_1} H_0 P_{\Phi_2}) H_0]^m = H_0^m - H_{2N},$$

где H_{2N} — некоторый оператор из X в конечномерное подпространство, размерность которого не превышает $2N$ $(H_{2N} : X \to F_{2N})$,

$$\sup_{H\in\mathscr{H}^{r,s}} \| T^m (H, F) \|_{X\to X} \geqslant \| T^m (H_0, F) \|_{X\to X} = \sup_{\varphi\in X_1} \| (H_0^m - H_{2N}) \varphi \|_X \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{g\in F_{2N}} \sup_{\varphi\in X_1} \| H_0^m \varphi - g \|_X \geqslant d_{2N} (H_0^m X_1, X),$$

где X_1 — единичный шар в X, $d_k (H_0^m X_1, X)$ — k-й поперечник по Колмогорову образа X_1 при действии оператора H_0^m.

Если φ пробегает множество $F_{n+k} \cap X_1$, то элементы $H_0^m \varphi$ заполняют шар радиуса $\delta^m \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^r}^{-m} \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^s}^{-m}$ в F_{n+k} с нормой пространства X. По теореме о поперечнике шара [7]

$$\sup_{H\in\mathscr{H}^{s,r}} \| T^m (H, F) \|_{X\to X} \geqslant d_{2N} (H_0^m X_1, X) \geqslant \delta^m \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X_r}^{-m} \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^s}^{-m}.$$

В силу произвольности F имеем

$$\mu_N(T, \mathcal{H}^{r,s}) = \inf_{F\subset X} \sup_{H\in\mathcal{H}^{r,s}} \lim_{m\to\infty} \| T^m(H, F)\|_{X\to X}^{1/m} \geqslant$$

$$\geqslant \delta \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^r}^{-1} \| P_{F_{n+k}} \|_{X\to X^s}^{-1}, \ \dim F = N.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 1. Пусть $X = L_2$ — пространство суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ функций; L_2^i — пространства 2π-периодических функций, у которых производные $f^{(j)}$, $j = \overline{0, i-1}$, абсолютно непрерывны на $[0, 2\pi]$, а $f^{(i)} \in L_2$, $\mathcal{A}_i = d^i/dt^i$ — операторы дифференцирования, F_i — пространства тригонометрических полиномов $(i-1)$-й степени. Тогда $P_{F_i} f$ — частные суммы ряда Фурье функции f порядка i. Обозначим, как обычно, $P_{F_i} = S_i$. Если норму в L_2^i определить соотношением

$$\| \varphi \|_{L_2^i} = \| \varphi \|_{L_2} + \sum_{j=1}^{i} \left\| \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right\|_{L_2} = \sum_{j=0}^{i} \| \mathcal{A}_j \varphi \|_{L_2} \qquad (\mathcal{A}_0 = I),$$

то, как известно [7, с. 125],

$$\| I - S_n \|_{L_2^i \to L_2} \leqslant n^{-i}, \tag{16}$$

и, таким образом, подпространства $X^i = L_2^i$ и F_n удовлетворяют все условия теоремы 1.

Через $\mathcal{H}_{L_2}^{r,s} = \mathcal{H}_{L_2}^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma)$ обозначим класс операторов H вида

$$Hf(t) = \int_0^{2\pi} h(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

резольвенты которых ограничены ($\|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant \gamma$), а ядра $h(t, \tau)$ имеют кусочно-непрерывные частные производные $\partial^i h(t, \tau)/\partial t^i$, $i = \overline{0, r}$, ограниченные некоторыми фиксированными постоянными α_i и, кроме того, для любой функции $f \in L_2$

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j h(\tau, t)}{\partial \tau^j} f(\tau)\, d\tau \right\|_{L_2} \leqslant \beta_{ij} \| f \|_{L_2}, \ i = \overline{0, s}; \ \ j = \overline{0, r}. \tag{17}$$

Теорема 2. *При $r, s = 1, 2, \ldots$ на классе $\mathcal{H}_{L_2}^{r,s}$ оптимальный порядок скорости сходимости KP_1P_2 метода определяется соотношением*

$$\mu_N(T, \mathcal{H}_{L_2}^{r,s}) \asymp N^{-r-s}.$$

Указанный порядок достигается, если в рамках KP_1P_2 метода в качестве F, Φ_1 использовать подпространства тригонометрических полиномов соответствующих порядков.

Доказательство. Определение класса $\mathcal{H}_{L_2}^{r,s}$, и в частности условия (17), гарантируют принадлежность $\mathcal{H}_{L_2}^{r,s}$ рассмотренному выше классу $\mathcal{H}^{r,s}$ при $X^i = L_2^i$. Поэтому искомая оценка сверху следует из теоремы 1 и (16).

Для получения оценки снизу заметим, что в силу известного интегрального представления для $S_n f$ оператор

$$H_0 = \delta \| S_{n+k} \|_{L_2\to L_2^r}^{-1} \| S_{n+k} \|_{L_2\to L_2^s}^{-1} S_{n+k}$$

принадлежит $\mathscr{H}L_2^{r,s}$. Но тогда нужная оценка снизу следует из теоремы 1 и соотношения

$$\| S_{n+k} \|_{L_2 \to L_2^i} \leqslant (n + k)^i,$$

которое вытекает из известного неравенства Берштейна для норм произвольных тригонометрических полиномов.

Через $\hat{\mathscr{H}}L_2^{r,s}$ обозначим класс операторов, определение которого отличается от определения класса $\mathscr{H}L_2^{r,s}$ лишь отсутствием периодичности.

Т е о р е м а 3. *Для KP_1P_2 метода*

$$\mu_N (T, \hat{\mathscr{H}}L_2^{r,s}) \asymp N^{-r-s}.$$

При этом оптимальный порядок скорости сходимости достигается, если в качестве F, Φ_1 использовать подпространства алгебраических полиномов соответствующих степеней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка снизу следует из того, что $\mathscr{H}L_2^{r,s} \subset \hat{\mathscr{H}}L_2^{r,s}$ и, следовательно,

$$\mu_N (\hat{\mathscr{H}}L_2^{r,s}, T) \geqslant \mu (T, \mathscr{H}L_2^{r,s}).$$

Для оценки сверху нужно вновь воспользоваться теоремой 1, где в качестве F_n рассматриваются подпространства алгебраических многочленов с базисом из полиномов Лежандра.

З а м е ч а н и е. Пусть $T_p = T_p (H, F)$ — оператор, характеризующий п. и. метод (2). Из результатов работ [1] (§ 12), [8] следует, что на классах $\mathscr{H}L_2^{r,s}$, $\hat{\mathscr{H}}L_2^{r,s}$

$$\mu_N (T_p, \mathscr{H}L_2^{r,s}) \asymp \mu_N (T_p, \hat{\mathscr{H}}L_2^{r,s}) \asymp N^{-r-s},$$

т. е. на указанных классах оптимальные порядки скорости сходимости п. и. и KP_1P_2 методов совпадают.

1. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— 264 с.
2. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 360 с.
3. *Лебедев В. И.* Об итерационном *KP* методе // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1967.— 7, № 6.— С. 1250—1270.
4. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов.— М. : Атомиздат, 1971.— 492 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 736 с.
6. *Солодкий С. Г.* Оптимизация адаптивных прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 1.— С. 95—101.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
8. *Переверзев С. В.* Оптимизации методов приближенного решения интегральных уравнений : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1987.— 24 с.

Получено 25.10.90