УДК 517.513

В. И. Соболев, д-р физ.-мат. наук,
В. М. Щербин, канд. физ.-мат. наук (Воронеж. ун-т)

# Об интегрировании отображений полуупорядоченных колец

Рассматриваются интегралы лебеговского типа отображений $f:E\to X$, где $X$ — полуупорядоченное кольцо, $E\subset R$, по мере со значениями, принадлежащие $X$. Доказываются обычные свойства интеграла, в том числе теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, об абсолютной непрерывности и полной аддитивности $(u, v)$-интеграла. Доказывается теорема о существовании решения дифференциального уравнения с $(u, v)$-производными.

Розглядаються інтеграли лебегівського типу відображень $f{:}E\to R$, де $X$ — напівупорядковане кільце, $E\subset R$, за мірою зі значеннями, що належать $X$. Доводяться звичайні властивості інтегралу, в тому числі теореми про граничний перехід під знаком інтегралу, про абсолютну неперервність і повну адитивність $(u, v)$-інтегралу. Доводиться теорема про існування розв'язку диференціального рівняння з $(u, v)$-похідними.

**1.** Пусть $X$ — полуупорядоченное кольцо, т. е. линейная структура (векторная решетка) [1], в которой определено умножение элементов, согласованное с упорядочением: из $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ следует $x\cdot y\geqslant 0$. Для $x\in X$ полагаем $x_+=\sup(x, 0)$, $x_-=\sup(-x,0)$, $|x|=x_++x_-$; $X^+=\{x|x\geqslant 0\}$.

В кольце $X$ будем использовать $r$-сходимость (сходимость с регулятором): $x_0=r\text{-}\lim x_n$, если для некоторого $u\in X_+\setminus\{0\}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0$ такой, что $|x_n-x_0|<\varepsilon u$ при $n\geqslant n_0$.

Пусть $E\subset R$ и на $E$ задана $\sigma$-аддитивная мера $\mu$ $\mu(\tilde E)\in X$, где $\tilde E$ — измеримое подмножество $E$.

Если $x$ — кольцо $M[0,1]$ измеримых на $[0,1]$ функций, то примером меры $\mu(\widetilde{E})\in X$ может быть функция $\varphi(\tau, \widetilde{E})$, $\widetilde{E}\subset E$, $\tau\in[0,1]$, измеримая по $\tau$ при всех $\widetilde{E}\subset S_E$, где $S_E$ — некоторый аддитивный класс подмножеств $E$, обладающая почти при всех $\tau\in[0,1]$ свойством счетной аддитивности по второму аргументу $\mu\left(\tau, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(\tau, E_i)$, где $E_i\subset E$, $E_i\cap E_j$, при $i\neq j$, есть множество лебеговой меры нуль.

Другим примером такой меры может служит спектральная мера $\mu(\tilde{E})=P$, где $X$—коммутативное, сильно замкнутое кольцо ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$, и значением меры являются ортопроекторы $P$ этого кольца. В этом случае мера помимо обычных свойств обладает следующим: $\mu(\tilde{E}\cap\tilde{\tilde{E}})=\mu(\tilde{E})\times\times\mu(\tilde{\tilde{E}})$ [1—6].

Отображение $f:E\to X$ назовем ступенчатой функцией, если $E$ можно разбить на измеримые подмножества $E_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, так что $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$, $E_i\cap E_j=\varnothing$, $i\neq j$, и на $E_i$ функция $f$ сохраняет постоянное значение $a_i$.

Будем обозначать такую функцию следующим образом:

$$f(\lambda)=(a_1,\ E_1;\ a_2,\ E_2;\ \ldots;\ a_n,\ E_n).$$

Если мы разобьем одно или несколько множеств $E_i$ на два или более измеримых подмножеств $E_i^{(1)}$, $E_i^{(2)}$, ..., $E_i^{(k_i)}$ и рассмотрим функцию $\tilde f(\lambda)$, имеющую на $E_i^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, k_i$, значение $a_i$, то будем говорить, что функция $\tilde f(\lambda)$ получена измельчением функции $f(\lambda)$. Будем также говорить, что две ступенчатые функции находятся в общем положении, если они имеют одни и те же подмножества постоянства. Легко видеть, что две любые ступенчатые функции путем измельчения можно привести в общее положение.

Определение 1. *Неотрицательную функцию $f:E\to X$ будем называть $r$-измеримой, если $\forall\varepsilon>0$ найдется ступенчатая функция $g:E\to X$ и элемент $u\in X^+/\{0\}$ такие, что*

$$|f(\lambda)-g(\lambda)|<\varepsilon u \tag{1}$$

*$\forall\lambda\in E$. Функцию произвольного знака назовем $r$-измеримой, если $r$-измеримы $f_+(\lambda)$ и $f_-(\lambda)$.*

Из определения непосредственно следует, что если $f(\lambda)$ — измеримая функция, то существует последовательность ступенчатых функций $\{g_n(\lambda)\}$ такая, что $f(\lambda)=r=\lim g_n(\lambda)$.

Нетрудно проверить, используя, если необходимо, приведение ступенчатых функций в общее положение, что линейная комбинация и произведение ступенчатых функций есть ступенчатая функция, модуль ступенчатой функции — также ступенчатая функция, и sup и inf двух ступенчатых функций являются ступенчатыми функциями.

Отсюда следует, что указанные выше операции, примененные к $r$-измеримым функциям, не выводят за пределы класса $r$-измеримых функций.

Лемма 1. *Если $f(\lambda) = r\text{-}\lim f_n(\lambda)$ и все $f_n(\lambda)$ $r$-измеримы с единым регулятором «$u$», то $f(\lambda)$ также $r$-измерима.*

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ выберем сперва $f_n(\lambda)$ так, чтобы $|f(\lambda) - f_n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} u$, а затем ступенчатую функцию $g_n(\lambda)$ так, чтобы

$$|f_n(\lambda) - g_n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} v.$$

Тогда $|f(\lambda) - g_n(\lambda)| < \varepsilon w$, где $w = \sup(u, v)$, и утверждение леммы доказано.

**2.** Если $f(\lambda)$ — ступенчатая функция, то полагаем

$$\int_E f(\lambda)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i). \tag{2}$$

Справедливы следующие свойства интегралов от ступенчатых функций:

1) линейность, т. е.

$$\int_E \{\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)\}\, d\mu = \alpha \int_E f(\lambda)\, d\mu + \beta \int_E g(\lambda)\, d\mu;$$

2) мультипликативность, т. е.

$$\int_E f(\lambda) g(\lambda)\, d\mu = \int_E f(\lambda)\, d\mu \cdot \int_E g(\lambda)\, d\mu$$

($\mu(E')\mu(E'') = 0$, если $E' \cap E'' = \varnothing$);

3) $\int_E f_+(\lambda)\, d\mu = \left(\int_E f(\lambda)\, d\mu\right)_+, \int_E f_-(\lambda)\, d\mu = \left(\int_E f(\lambda)\, d\mu\right)_-,$

$$\left|\int_E f(\lambda)\, d\mu\right| \leqslant \int |f(\lambda)|\, d\mu;$$

4) если $f(\lambda) \leqslant g(\lambda)$ на $E$, то

$$\int_E f(\lambda)\, d\mu \leqslant \int_E g(\lambda)\, d\mu;$$

в частности, если $a \leqslant f(\lambda) \leqslant b$, то

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f(\lambda)\, d\mu \leqslant b\mu(E);$$

5) если $E = E' \cup E''$, $E'$ и $E''$ измеримы $E' \cap E'' = \varnothing$, то

$$\int_E f(\lambda)\, d\mu = \int_{E'} f(\lambda)\, d\mu + \int_{E''} f(\lambda)\, d\mu.$$

Эти свойства доказываются без труда (если необходимо, функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ приводятся в общее положение).

Теорема 1. *Если $f(\lambda)$ — $r$-измеримая на $E$ функция и $\{f_n(\lambda)\}$ — последовательность ступенчатых функций такая, что $f_n(\lambda) \xrightarrow{(r)} f(\lambda)$, то существует*

$$r\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(\lambda)\, d\mu = y \in X.$$

*Полагаем $\int_E f(\lambda)\, d\mu \overset{\text{def}}{=} r\text{-}\lim \int_E f_n(\lambda)\, d\mu$. Таким образом, всякая $r$-измеримая функция интегрируема.*

Доказательство. Если задано $\varepsilon > 0$, то $\exists n_0$ такое, что $|f_n(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon u$ при $n \geqslant n_0$, откуда $|f_{n+p}(\lambda) - f_n(\lambda)| < 2\varepsilon u$, $n \geqslant n_0$, $p \geqslant 1$ или $-2\varepsilon u < f_{n+p}(\lambda) - f_n(\lambda) < 2\varepsilon u$. Но тогда

$$-2\varepsilon u\mu(E) < \int_E f_{n+p}(\lambda)\,d\mu - \int_E f_n(\lambda)\,d\mu < 2\varepsilon u\mu(E)$$

или

$$\left|\int_E f_{n+p}(\lambda)\,d\mu - \int_E f_n(\lambda)\,d\mu\right| < 2\varepsilon u\mu(E)$$

при $n \geqslant n_0$, $p \geqslant 1$, т. е. последовательность $\left\{\int_E f_n(\lambda)\,d\mu\right\}$ удовлетворяет условию Коши с регулятором сходимости $v = u\mu(E)$.

В силу полноты кольца $X$ отсюда следует, что существует $r\text{-}\lim \int_E f_n(\lambda)\,d\mu$ и теорема доказана.

Если $f_n(\lambda) \xrightarrow{(r)} f(\lambda)$ с некоторым регулятором сходимости «$u$», а $\int_E f_n(\lambda)\,d\mu \xrightarrow{(r)} \int_E f(\lambda)\,d\mu$ с некоторым регулятором сходимости «$v$», то такой интеграл будем называть $(u, v)$-интегралом, хотя в разных случаях значения регуляторов «$u$» и «$v$» могут быть различными.

Покажем, что величина $(u, v)$-интеграла не зависит от апроксимирующей последовательности $\{f_n(\lambda)\}$, хотя второй регулятор сходимости при этом меняется. В самом деле, если $f_n(\lambda) \xrightarrow{(r)} f(\lambda)$ и $\tilde{f}_n(\lambda) \xrightarrow{(r)} f(\lambda)$, то $f_n(\lambda) - \tilde{f}_n(\lambda) \xrightarrow{(r)} 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0'$ такое, что $|f_n(\lambda) - \tilde{f}_n(\lambda)| < \varepsilon u$ при $n \geqslant n_0'$. Отсюда, как и выше,

$$-\varepsilon u\mu(E) < \int_E f_n(\lambda)\,d\mu - \int_E \tilde{f}_n(\lambda)\,d\mu < \varepsilon u\mu(E). \tag{3}$$

Так как $\int_E f_n(\lambda)\,d\mu \xrightarrow{(r)} \int_E f(\lambda)\,d\mu$, то $\exists n_0''$ такое, что

$$-\varepsilon v < \int_E f(\lambda)\,d\mu - \int_E f_n(\lambda)\,d\mu < \varepsilon v. \tag{4}$$

Складывая (3) и (4) и полагая $w = u\mu(E) + v$, получаем

$$-\varepsilon w < \int_E f(\lambda)\,d\mu - \int_E \tilde{f}_n(\lambda)\,d\mu < \varepsilon w,$$

т. е. $r\text{-}\lim \int_E \tilde{f}_n(\lambda)\,d\mu = \int_E f(\lambda)\,d\mu$, что и требовалось доказать. Путем предельного перехода под знаком интегралов убеждаемся, что свойства 1—5 интегралов, установленные для ступенчатых функций, будут справедливы для любых интегрируемых функций.

3. На $(u, v)$-интегралы переносятся важнейшие свойства обычных числовых интегралов Лебега.

Теорема 2. *Если $f_n(\lambda) \xrightarrow{(r)} f(\lambda)$ и все $f_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, $r$-измеримы с общим регулятором «$u$», то*

$$\int_E f_n(\lambda)\,d\mu \xrightarrow{(r)} \int_E f(\lambda)\,d\mu.$$

Доказательство. По лемме 1 функция $f(\lambda)$, а поэтому и все функции $f(\lambda) - f_n(\lambda)$ $r$-измеримы, следовательно, $(u, v)$-интегрируемы. Далее, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ такое, что $|f(\lambda) - f_n(\lambda)| < \varepsilon u$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда по свойству $(u, v)$-интеграла

$$\left|\int_E f(\lambda)\,d\mu - \int_E f_n(\lambda)\,d\mu\right| = \left|\int_E (f(\lambda) - f_n(\lambda))\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f(\lambda) - f_n(\lambda)|\,d\mu <$$

$$< \varepsilon u \mu(E) = \varepsilon \bar{w} \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Теорема 3. (*об абсолютной непрерывности $(u, v)$-интеграла*). *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой интегрируемой функции $f(\lambda)$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого измеримого подмножества $H \subset E$, удовлетворяющего условию $\mu(H) < \delta v$, где $v \in X+ \setminus \{0\}$, будем иметь*

$$\left|\int_H f(\lambda)\,d\mu\right| < \varepsilon w \text{ при некотором } w. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $\int_H |f(\lambda)\,d\mu| \leqslant \int_H |f(\lambda)\ d\mu|$ то доказательство достаточно провести для неотрицательных функций. Пусть $g(\lambda)$ — положительная ступенчатая функция такая, что $0 \leqslant f(\lambda) < g(\lambda) + \frac{\varepsilon}{2} u$. Тогда

$$0 \leqslant \int_E f(\lambda)\,d\mu < \int_E g(\lambda)\,d\mu + \frac{\varepsilon}{2} u \mu(E);\ 0 \leqslant \int_H f d\mu < \int_H g d\mu + \frac{\varepsilon}{2} u \mu(H).$$

Если $M = \sup\limits_\lambda g(\lambda)$, то $\int_H g(\lambda)\,d\mu \leqslant M\mu(H)$. Тогда, считая $\varepsilon < 2$, получаем

$$0 \leqslant \int_H f(\lambda)\,\alpha\mu \leqslant M\mu(H) + \frac{\varepsilon}{2}\mu(H)\,u < \mu(H)(M + u) < \delta(\varepsilon)\,v\,(M + u) =$$

$$= \delta(\varepsilon)\,w < \varepsilon w,$$

если $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$, $w = v(M + u)$, и теорема доказана.

Теорема 4 (*о полной аддитивности $(u, v)$-интеграла*). *Если $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ является r-сходящимся с регулятором «$w$», то*

$$\int_E f(\lambda)\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(\lambda)\,d\mu \tag{6}$$

*для любой r-измеримой функции $f(\lambda)$, причем ряд справа в равенстве (6) r-сходится с некоторым регулятором $(v)$.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для $f(\lambda) \geqslant 0$. Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i$; $R_n = E \setminus S_n$. Тогда

$$\int_E f(\lambda)\,d\mu - \int_{S_n} f(\lambda)\,d\mu = \int_{R_n} f(\lambda)\,d\mu,$$

и следовательно,

$$0 \leqslant \int_E f(\lambda)\,d\mu - \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(\lambda)\,d\mu = \int_{R_n} f(\lambda)\,d\mu. \tag{7}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По теореме 3 найдется $\delta > 0$ такое, что если $\mu(R_n) < \delta w$, то $\int_{R_n} f(\lambda)\,d\mu < \varepsilon v$. В свою очередь, для данного $\delta$ выберем $n_0$ таким, чтобы $\mu(R_n) < \delta w$ при $n \geqslant n_0$. Тогда для таких $n$ из (7) следует

$$0 \leqslant \int_E f(\lambda)\,d\mu - \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(\lambda)\,d\mu < \varepsilon v,$$

т. е. $\int_E f(\lambda)\,d\mu = r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(\lambda)\,d\mu$; теорема доказана.

В случае когда $X$ — пространство измеримых функций $M[0, 1]$ и $\mu(E)$ — мера Лебега, построенный интеграл есть линейный оператор из пространства измеримых функций двух переменных в пространство измеримых функций одной переменной

$$y(\tau) = Af(\lambda) = \int_E x(\tau, \lambda)\, d_E\varphi(\tau, E)$$

непрерывный относительно сходимости с регулятором, причем в качестве регулятора можно брать любую положительную функцию $v(\tau) \in M[0, 1]$.

4. Ранее авторами была определена $(u, v)$-производная отображения $f: X \to Y$, где $X$ и $Y$ — $K$-пространства (4). Рассмотренный интеграл не является операцией, обратной дифференцированию. Получить обращение операции $(u, v)$-дифференцирования можно двумя путями. Во-первых, можно рассмотреть определенные выше интегралы, но по скалярной мере $\mu(E)$, так сказать, $(1, v)$-интегралы.

Если $\int_a^x f(t)\, dt$ — такой интеграл и $f(x)$ $v$-непрерывен, то обычным путем получаем $\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)'_x = f(x)$. Такой путь избран при рассмотрении дифференциальных уравнений (см. ниже).

Можно, однако, поступить по-другому, определив интеграл методом Коши от отображения $f:[a, b] \to X$, где $[a, b]$ — порядковый отрезок в кольце $X$. Именно: взяв элементы $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b$ (такие элементы всегда существуют, например, середина $[a, b]$, а затем середины получаемых половин и т. д.) и точку $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, составим сумму

$$S_n(f, T^{(n)}, \xi^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}).$$

Здесь $T^{(n)}$ — набор элементов $x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Если при $n \to \infty$ $\sup(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \to 0$ с регулятором «$u$», $S_n(f, T^{(n)}, \xi^{(n)}) \to S(f)$ с регулятором «$v$», тогда $S(f)$ назовем $(u, v)$-интегралом Коши от $f(x)$ по $[a, b]$ и обозначим $(u, v)\,_a f(x)\, dx$. Нетрудно показать, что $(u, v)$-интеграл Коши существует, если $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такие, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon v \text{ при } |x' - x''| < \delta u$$

независимо от положений точек $x'$, $x''$ на $[a, b]$.

Для таких функций и интегралов типа Коши легко показать, что $(u, v)$-производная от $(u, v)\int_a^x f(t)\, dt$ есть $f(x)$.

5. Приведем пример применения рассмотренного выше интеграла, точнее $(1, v)$-интеграла.

Докажем теорему о существовании решения дифференциального уравнения с $(u, v)$-производными (5).

Теорема. Принцип неподвижной точки. *Пусть $X$ — $K$-пространство и отображение $A: X \to X$ удовлетворяет условию $|Au - Av| \leqslant \Theta\,|u - v|$ для любых $u, v \in X$, $0 < \Theta < 1$ фиксировано. Тогда существует неподвижная точка отображения $A$, т. е. $Au = u$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in X$ и построим последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, полагая $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1, \ldots, x_n = Ax_{n-1}$. Тогда будем иметь

$$|x_2 - x_1| = |Ax_1 - Ax_0| \leqslant \Theta\,|x_1 - x_0| = \Theta\,|Ax_0 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_2| = |Ax_2 - Ax_1| \leqslant \Theta\,|x_2 - x_1| \leqslant \Theta^2\,|Ax_0 - x_0|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x_{n+1} - x_n| = |Ax_n - Ax_{n-1}| \leqslant \Theta^n\,|Ax_0 - x_0|.$$

Отсюда

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+$$
$$+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+|x_{n+p-2}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+$$
$$+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant$$
$$\leqslant(\Theta^{n+p-1}+\Theta^{n+p-2}+\ldots+\Theta^n)|Ax_0-x_0|=\frac{\Theta^n-\Theta^{n+p}}{1-\Theta}|Ax_0-x_0|.$$

Так как $0<\Theta<1$, то $\Theta^n\to 0$ при $n\to\infty$, а следовательно, $|x_{n+p}-$ $-x_n|\xrightarrow{(r)}0$ при $n\to\infty$, $p>0$. Таким образом, $\{x_n\}$ есть сходящаяся в себе последовательность.

Так как $X$ — полное пространство, то существует $r\text{-}\lim x_n=x$ и для этого $x$ имеем

$$|Ax-x|\leqslant|Ax-x_n|+|x_n-x|=|Ax-Ax_{n-1}|+|x_n-x|\leqslant$$
$$\leqslant\Theta|x-x_{n-1}|+|x_n-x|\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

т. е. $Ax=x$, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего нам нужны следующие обозначения: пусть $Y$ — $K$-пространство,

$$M_v=\{y\in Y:|y-y_0|\leqslant v\},\ v\in Y^+,$$
$$M_\rho=\{\lambda\in Y:|\lambda-\lambda_0|\leqslant\rho\},\ \rho\in Y^+,$$

$T_h=\{t\in R:|t-t_0|\leqslant h\}$ — отрезок вещественной оси.

Теорема. *Пусть дана непрерывная функция* $F:T_h\times M_v\times\times M_\rho\to Y$, *ограниченная некоторым постоянным элементом* $d$, *т. е.* $|F(t, y, \lambda)|\leqslant d$, *сравнимым с элементом* $v\in Y_v$, *удовлетворяющая следующему условию*:

$$|F(t,\ y_1,\ \lambda)-F(t,\ y_2,\ \lambda)|\leqslant N|y_1-y_2|. \tag{8}$$

*Пусть, далее, имеется r-непрерывная функция* $\varphi:\mu_\rho\to Y$ *с регулятором непрерывности «v» при* $\lambda\to\lambda_0$.

*Тогда существует число* $\delta\leqslant h$ *и элемент* $G\leqslant\rho$, *а также непрерывная по* $\lambda$ *и* $(1, v)$*-дифференцируемая по* $t$ *функция* $y:T_\delta\times M_G\to M_v$, *удовлетворяющая следующему дифференциальному уравнению*:

$$\frac{dy}{dt}=F(t,\ y(t,\ \lambda),\ \lambda),\ (t,\ \lambda)\in T_\delta\times M_G, \tag{9}$$

*и начальному условию*

$$y(t_0,\ \lambda)=\varphi(\lambda),$$
$$y(t_0,\ \lambda_0)=\varphi(\lambda_0)=y_0. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим через $C_\delta$, $\delta\leqslant h$, множество всех $r$-непрерывных функций $y:t\to\mu_v$, $|t-t_0|<\delta$. Рассмотрим на этом множестве оператор $A_\lambda$:

$$A_\lambda z=\varphi(\lambda)+\int_{t_0}^{t}F(\tau,\ z(\tau),\ \lambda)\,d\tau,$$
$$A_\lambda z(t)\in Y;\ z\in C_\delta;\ \delta\leqslant h. \tag{11}$$

При всех значениях $\lambda\in M_G$ справедлива оценка:

$$|A_\lambda z(t)-y_0|\leqslant|A_\lambda z(t)-\varphi(\lambda)|+|\varphi(\lambda)-y_0|=$$
$$=\left|\int_{t_0}^{t}F(\tau,z(\tau),\lambda)\,d\tau-\varphi(\lambda)\right|+|\varphi(\lambda)-y_0|<\delta\cdot d+|\varphi(\lambda)-y_0|,$$

а также оценим следующее выражение:

$$|A_\lambda z_1(t) - A_\lambda z_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [F(\tau, z_1(\tau), \lambda) - F(\tau, z_2(\tau), \lambda)]\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |F(\tau, z_1(\tau), \lambda) - F(\tau, z_2(\tau), \lambda)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant N \int_{t_0}^{t} |z_1(\tau) - z_2(\tau)|\, d\tau \leqslant N \sup_{\tau} |z_1(\tau) - z_2(\tau)|\, \delta.$$

Теперь число $\delta \leqslant h$ и элемент $G \leqslant \rho$ выбираем столь малым, чтобы выполнялись неравенства $\delta d \leqslant v/2$. Это можно сделать в силу сравнимости элементов $d$ и $v \in Y^+$. Из условия теоремы имеем

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| \leqslant v/2, \ |\lambda - \lambda_0| \leqslant G \leqslant \rho.$$

Но тогда получаем

$$|A_\lambda z(t) - y_0| \leqslant \delta \cdot d + |\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| < \frac{v}{2} + \frac{v}{2} = v,$$

$$|A_\lambda z_1(t) - A_\lambda z_2(t)| \leqslant \Theta \sup_{\tau} |z_1(\tau) - z_2(\tau)|, \ 0 < \Theta < 1,$$

при $N \cdot \delta < \Theta$.

Таким образом, для указанных $\delta$ и $G$ оператор $A_\lambda z(t)$ при каждом фиксированном $\lambda \in M_G^{\lambda}$ отображает $C_\delta$ в себя и является сжимающим. Множество $C_\delta$ является полным в том смысле, что если $x_n \in C_\delta$ и $r\text{-}\lim x_n = x_0$, то $x_0 \in C_\delta$.

Таким образом, согласно изложенному выше оператор $A_\lambda$ обладает неподвижной точкой, т. е. существует функция $y(t, \lambda) \in C_\delta$ такая, что

$$A_\lambda y(t, \lambda) = y(t, \lambda),$$

$$y(t, \lambda) = \varphi(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau. \tag{12}$$

Из соотношения (12) видно, что $y(t, \lambda)$ при фиксированном $\lambda$ имеет $(1, v)$-производную по $t$.

Для функции $y(t, \lambda)$ удовлетворяется равенство (9). Подставляя в (12) $t = t_0$, получаем выполнение начального условия (10) $y(t_0, \lambda) = \varphi(\lambda)$. Проверим $r$-непрерывность полученного решения по параметру $\lambda$, т. е.

$$r\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{T_h} |y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)| = 0. \tag{*}$$

Из принципа неподвижной точки следует оценка

$$|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)| \leqslant \frac{1}{1 - \Theta} \sup_{T_h} |A_\lambda z(t) - A_{\lambda_0} z(t)|.$$

Поэтому достаточно соотношение (*) проверить для оператора $A_\lambda$. Пусть $z \in C_\delta$,

$$A_\lambda z(t) - A_{\lambda_0} z(t) = \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0) + \int_{t_0}^{t} [F(\tau, z(\tau), \lambda) - F(\tau, z(\tau), \lambda_0)]\, d\tau. \tag{13}$$

В силу непрерывности по $\lambda$ функций $F(\tau, z(\tau), \lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ имеем следующее соотношение:

$$|F(\tau, z(\tau), (\lambda) - F(\tau, z(\tau), \lambda_0)| < \varepsilon w$$

и $|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| < \varepsilon v$ всякий раз, когда $|\lambda - \lambda_0| < \delta u$. Тогда из (13) следует

$$|A_\lambda z(t) - A_{\lambda_0} z(t)| < \varepsilon w + \varepsilon v = \varepsilon(w + v) \qquad (14)$$

всякий раз, когда $|\lambda - \lambda_0| < \delta u$.

Так как соотношение (14) верно для любой $z \in C_\delta$, то и $\sup\limits_{z \in C_\delta} |A_\lambda z(t) - A_{\lambda_0} z(t)| < \varepsilon(v + w)$, а значит, $r\text{-}\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \sup\limits_{z \in C_\delta} |A_\lambda z(t) - A_{\lambda_0} z(t)|$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Здесь мы использовали принцип сжатых отображений для оператора $A_\lambda z$, аналогичный принципу сжатых отображений, доказанный выше.


1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М. : Физматгиз, 1961.— 407 с.
2. *Соболев В. И.* О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.— 1953.— **91**, № 1.— С. 23—26.
3. *Соболев В. И., Щербин В. М.* О дифференцировании отображений $\mathscr{K}$-пространств// Там же.— 1975. —**225**, № 5.— С. 1020—1022.
4. *Щербин В. М.* Об интегрировании по Риману отображений полуупорядоченных колец.— М., 1985.— 14 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2839—85.
5. *Щербин В. М.* Относительно равномерные производные отображений $\mathscr{K}$-пространств и некоторые теоремы о локальном обращении отображений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Ташкент, 1979.— 17 с.



Получено 25.12.90