УДК 519.2

**Ю. Ф. Даниев**, канд. техн. наук,
**И. А. Кущ**, науч. сотр. (Ин-т техн. механики АН Украины, Днепропетровск)

# Оценки вероятности пребывания случайного процесса в полосе

Приведены выражения для нижних и верхней оценок вероятности пребывания случайного процесса в полосе.

Наведені вирази для нижніх і верхньої оцінок імовірності перебування випадкового процесу в смузі.

Задачи, связанные с необходимостью определения вероятности пребывания случайного процесса $\xi(t)$ в полосе, возникают при оценке помехоустойчивости и надежности аппаратуры связи и имеют большое практическое значение [1].

Пусть $\xi(t)$ — действительный случайный процесс, $u$, $v$ — действительные числа, $u < v$.

Определим вероятность

$$P_T(u, v) = P\{u < \xi(t) < v, \quad t \in [0, T]\}, \tag{1}$$

т. е. вероятность пребывания процесса $\xi(t)$ в полосе, ограниченной сверху уровнем $v$, снизу уровнем $u$.

Следуя [2], обозначим через $G_y(0, T)$ множество непрерывных на отрезке $[0, T]$ скалярных функций, которые не совпадают тождественно с $y$ ни в одном из интервалов этого промежутка. Отметим, что если при конечном $T$ с вероятностью 1 выборочные функции $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, принадлежат множеству $G_y(0, T)$ и не имеют касаний уровня $y$, то среднее число пересечений уровня $y$ процессом $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$ конечно.

Будем рассматривать те выборочные функции процесса, которые в начальный момент удовлетворяют условию $u < \xi(0) < v$, вероятность этого события равна $P_0(u, v)$. В этом случае первым пересечением уровня $v$ может быть выход, а уровня $u$ — вход.

Обозначим через $N_y^+(0, T)$ ($N_y^-(0, T)$) среднее число выходов (входов) процесса за (под) уровень $y$ на отрезке $[0, T]$.

Теорема 1. *Пусть* 1) *с вероятностью 1 выборочные функции* $\xi(t)$ *принадлежат множествам* $G_u(0, T)$, $G_v(0, T)$ *и не имеют касаний уровней* $u$, $v$ *на отрезке* $[0, T]$; 2) $P\{\xi(0) = u\} = 0$, $P\{\xi(0) = v\} = 0$.

*Тогда для процесса* $\xi(t)$ *имеет место неравенство*

$$P_0(u, v) - N_v^+(0, T) - N_u^-(0, T) \leqslant P_T(u, v) \leqslant P_0(u, v) - \\ - N_v^+(0, T) - N_u^-(0, T) + N^+(0, T) + N_v^-(0, T). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через $A_j^v(0, T)$, $j = 1, 2, \ldots$, событие, состоящее в том, что $u < \xi(0) < v$ и число пересечений уровня $v$ процессом $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$ равно $j$. Событие $B_i^u(0, T)$, $i = 1, 2, \ldots$, состоящее в том, что $u < \xi(0) < v$, и число пересечений уровня $u$ процессом $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$ равно $i$.

Определим событие $C_{i,j}^{u,v}$ как

$$C_{i;j}^{u;v}(0, T) = A_j^v(0, T) \cap B_i^u(0, T).$$

Легко показать, что

$$N_v^+(0, T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,[P\{A_{2k-1}^v(0,\ T)\} + P\{A_{2k}^v(0, T)\}], \tag{3}$$

$$N_v^-(0, T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,[P\{A_{2k}^v(0, T)\} + P\{A_{2k+1}^v(0, T)\}], \tag{4}$$

$$N_u^-(0, T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,[P\{B_{2k-1}^u(0, T)\} + P\{B_{2k}^u(0, T)\}], \tag{5}$$

$$N_u^+(0, T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,[P\{B_{2k}^u(0, T)\} + P\{B_{2k+1}^u(0, T)\}]. \tag{6}$$

Выражение (1) можно записать с учетом введенных событий в следующем виде:

$$P_T(u, v) = P_0(u, v) - \sum_{k=1}^{\infty} P\{A_k^v(0, T)\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} P\{B_k^u(0, T)\} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P\{C_{i,j}^{u,v}(0, T)\}. \tag{7}$$

Нижняя оценка неравенства (2) является следствием отношений (3), (5).

Для получения верхней оценки необходимо учесть, что

$$N_v^+(0, T) - N_v^-(0, T) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{A_{2k-1}^v(0, T)\}, \tag{8}$$

$$N_u^-(0, T) - N_u^+(0, T) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{B_{2k-1}^u(0, T)\} \tag{9}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{A_{2k}^v(0, T)\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{B_{1k}^u(0, T)\} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P\{C_{i,j}^{u,v}(0, T)\} \geqslant 0. \tag{10}$$

Неравенство (10) вытекает из следующего факта. Поскольку событие $C_{i,j}^{u,v}(0, T)$ не является невозможным, если только одно из чисел $i, j$ четно, пусть для определенности $i$, то

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{i,j}^{u,v}(0, T) \subset B_i^u(0, T).$$

Верхняя оценка является следствием соотношений (3)—(10).

Рассмотрим частный случай, когда $\xi(t)$ — дифференцируемый гауссовский случайный процесс. Введем обозначения

$$m(t) = M\xi(t), \quad \sigma^2(t) = M(\xi(t) - m(t))^2,$$

$$r(t_1, t_2) = M([\xi(t_1) - m(t_1)]\,[\xi(t_2) - m(t_2)]),$$

$$\gamma^2(t) = M(\dot{\xi}(t) - M\dot{\xi}(t))^2,$$

$$\mu_{12}(t) = \frac{M([\xi(0) - m(0)]\,[\xi(t) - m(t)])}{\sigma(0)\,\sigma(t)},$$

$$\mu_{13}(t) = \frac{M([\xi(0) - m(0)]\,[\dot{\xi}(t) - M\dot{\xi}(t)])}{\sigma(0)\,\gamma(t)},$$

$$\mu_{23}(t) = \frac{M([\xi(t) - m(t)]\,[\dot{\xi}(t) - M\dot{\xi}(t)])}{\sigma(t)\,\gamma(t)}.$$

Теорема 2. *Пусть $\xi(t)$ — гауссовский процесс, $m(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{m}(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$ и $r(t_1, t_2)$ имеет смешанную частную производную второго порядка $\partial^2 r(t_1, t_2)/\partial t_1\,\partial t_2$, непрерывную во всех точках вида $(t_1, t_1)$. Пусть совместное нормальное распределение процесса $\xi(t)$ в момент $t_1 = 0$, $t_2 = t$ и производной в среднем квадратичном $\dot{\xi}(t)$ невырождено при каждом $t$; $\sigma(t) > 0$, и $|\mu_{23}(t)| < 1$, $t \in [0, T]$. Тогда выполнены предположения теоремы 1 и справедливы формулы*

$$N_v^+(0, T) = \int_u^v dx \int_0^T dt \int_0^{+\infty} z f_t(x, v, z)\, dz, \tag{11}$$

$$N_v^-(0, T) = -\int_u^v dx \int_0^T dt \int_{-\infty}^0 z f_t(x, v, z)\, dz, \tag{12}$$

$$N_u^-(0, T) = -\int_u^v dx \int_0^T dt \int_{-\infty}^0 z f_t(x, u, z)\, dz, \tag{13}$$

$$N_u^+(0, T) = \int_u^v dx \int_0^T dt \int_0^{\infty} z f_t(x, u, z)\, dz, \tag{14}$$

*где $f_t(x, y, z)$ — плотность распределения случайного вектора $(\xi(0), \xi(t), \dot{\xi}(t))$ со средними $m(0)$, $m(t)$, $\dot{m}(t)$ и нормированной ковариационной матрицей*

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12} & 1 & \mu_{23} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Доказательство. Определим моменты времени $t_{n,k} = kT2^{-n}$ и введем кусочно-линейный процесс $\xi_n(t)$, аппроксимирующий процесс $\xi(t)$. Тогда для подсчета среднего числа $N_v^+(0, T)$ выходов процесса $\xi(t)$ воспользуемся методом, использованным для подсчета общего числа пересечений [2, с. 292]; получим

$$N_{n,v}^+ = \sum_{k=0}^{2^n-1} [P\{(u < \xi(0) < v) \cap (\xi(t_{n,k}) < v < \xi(t_{n,k+1}))\}]. \tag{16}$$

Обозначая через $\zeta_k$ случайную величину $2^n[\xi(t_{n,k+1}) - \xi(t_{n,k})]$, имеем

$$P\{(u < \xi(0) < v) \cap (\xi(t_{n,k}) < v < \xi(t_{n,k+1}))\} =$$

$$= \int_u^v dx \int_0^{\infty} dz \int_{v - z\cdot 2^{-n}}^{v} f_{n,k}(x, y, z)\, dy, \tag{17}$$

где $f_{n,k}(x, y, z)$ — плотность распределения случайного вектора $(\xi(0), \xi(t_{n,k}), \zeta_k)$.

Из (17) с учетом (16) получим

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} [P\{(u < \xi(0) < v) \cap (\xi(t_{n,k}) < v < \xi(t_{n,k+1}))\}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n} \int_u^v dx \int_0^{\infty} dz \int_{-z}^{0} f_{n,k}(x, v + 2^{-n} y, z)\, dy. \tag{18}$$

Аналогично [2, с. 292] при $n \to \infty$ из (18) следует справедливость соотношения (11).

Тем же самым способом доказываются соотношения (12), (13) и (14).

При решении практических задач значения $N_u^{\pm}(0, T)$ и $N_v^{\pm}(0, T)$ необходимо предварительно представить в виде однократных интегралов.

Выразим $N_v^{+}(0, T)$ через функции $m$, $\gamma$, $\mu$. Учитывая, что

$$f_t(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma(0)\sigma(t)\gamma(t)D^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2D}\left[D_{11}n_1^2 + D_{22}n_2^2 + D_{33}n_3^2 + 2D_{12}n_1n_2 + 2D_{13}n_1n_3 + 2D_{23}n_2n_3\right]\right\},$$

где $D$ — определитель, а $D_{ij}$ $(i = 1, 3;\ j = 1, 3)$ — алгебраические дополнения элементов нормированной ковариационной матрицы (15),

$$n_1 = \frac{x - m(0)}{\sigma(0)};\quad n_2 = \frac{y - m(t)}{\sigma(t)};\quad n_3 = \frac{z - \dot{m}(t)}{\gamma(t)},$$

и используя [3] (10.010.1, 10.011.1), окончательно получаем

$$N_v^{+}(0, T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\gamma(t)\sqrt{D_{11}}}{\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{a_3^2}{2}\right\}\left\{\frac{D_{13}}{\sqrt{D_{11}D_{33}}}\left[\exp\left\{-\frac{b_1^2}{2}\right\}F(c_1) -\right.\right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{b_2^2}{2}\right\}F(c_2)\right] + \exp\left\{-\frac{g^2}{2}\right\}[F(d_1) - F(d_2)] +$$

$$+ \sqrt{2\pi}g\left[F(b_1) - B_vN\left[b_1, -g; -\frac{D_{13}}{\sqrt{D_{11}D_{33}}}\right] -\right.$$

$$\left.\left. - F(b_2) + B_vN\left[b_2, -g; -\frac{D_{13}}{\sqrt{D_{11}D_{33}}}\right]\right]\right\}dt,$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{D_{33}}}(a_1 - \mu_{12}a_3);$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{D_{33}}}(a_2 - \mu_{12}a_3),$$

$$a_1 = \frac{v - m(0)}{\sigma(0)},\quad a_2 = \frac{u - m(0)}{\sigma(0)},\quad a_3 = \frac{v - m(t)}{\sigma(t)},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{D_{33}}{D}}\,\frac{\dot{m}(t)}{\gamma(t)} - \frac{D_{13}a_1 + D_{23}a_3}{\sqrt{DD_{33}}},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{D_{33}}{D}}\,\frac{\dot{m}(t)}{\gamma(t)} - \frac{D_{13}a_2 + D_{23}a_3}{\sqrt{DD_{33}}},$$

$$d_1 = \frac{D_{11}a_1 + D_{12}a_3}{\sqrt{DD_{11}}} - \frac{D_{13}\dot{m}(t)}{\sqrt{DD_{11}}\gamma(t)},$$

$$d_2 = \frac{D_{11}a_2 + D_{12}a_3}{\sqrt{DD_{11}}} - \frac{D_{13}\dot{m}(t)}{\sqrt{DD_{11}}\gamma(t)},$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{D_{11}}}\left(\frac{\dot{m}(t)}{\gamma(t)} + \mu_{23}a_3\right),$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy,$$

$$B_v N(k, h;\ \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{h} \int\limits_{-\infty}^{k} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right] dxdy,$$

$$-1 < \rho < 1.$$

Аналогично можно через функции $m$, $\gamma$, $\mu$ выразить $N_v^-(0, T)$, $N_u^\pm(0, T)$.

Отметим, что нижнюю оценку (2) можно уточнить следующим образом. Выберем внутри отрезка $[0, T]$ какую-либо промежуточную точку $0 < t_i < t$. Помимо нахождения выборочными функциями в полосе в нулевой момент времени и выхода за уровень $v$ или входа за уровень $u$ в момент времени $t < T$ потребуем дополнительно, чтобы в выбранной точке $t_i$ выборочные функции также находились в полосе.

Обозначим через

$$N_{y,1}^+(0, T)\ (N_{y,1}^-(0, T))$$

среднее число выходов (входов) процесса с одной промежуточной точкой за (под) уровень $y$ на отрезке $[0, T]$, которое определяется следующим образом: если в момент $t\ (t < T)$ реализация процесса имеет выход (вход) за (под) уровень $y$, то в момент $t/2$ эта реализация удовлетворяет условию $u < \xi(t/2) < v$.

Тогда нижняя оценка имеет вид

$$P_T(u, v) \geqslant P_0(u, v) - N_{v,1}^+(0, T) - N_{u,1}^-(0, T),$$

где

$$N_{v,1}^+(0, T) = \int\limits_u^v dx \int\limits_u^v dw \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty z f_t(x, w, v, z)\, dz,$$

$$N_{u,1}^-(0, T) = -\int\limits_u^v dx \int\limits_u^v dw \int\limits_0^T dt \int\limits_{-\infty}^0 z f_t(x, w, u, z)\, dz,$$

$f_t(x, w, y, z)$ — плотность распределения случайного вектора $(\xi(0), \xi(t/2), \xi(t), \dot{\xi}(t))$.

Вместо одной промежуточной точки $t_i$ можно взять несколько. С увеличением числа промежуточных точек и соответственно с усложнением выражения (2) будет повышаться точность нижней оценки.

Проанализируем выражение (2) в случае, когда $v = -u$, а $\xi(t)$ — гауссовский стационарный дифференцируемый эргодический случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $r(t)$, $\sigma^2$ — дисперсия процесса.

В этом случае для малых $T$ нижняя и верхняя оценки (2) будут совпадать с точным значением вероятности $P_T(-v, v)$, так как можно пренебречь малыми вероятностями двукратных, трехкратных и т. д. пересечений случайным процессом уровней $-v$, $v$.

В другом предельном случае при $T \to \infty$, $P_\infty(-v, v) = 0$, а нижняя оценка принимает отрицательное значение. В этих случаях нижнюю границу принимают равной нулю. Верхняя оценка с учетом соотношений (8) и (9) будет равна $(2F(\frac{v}{\sigma}) - 1)^2$.

Отсюда следует, что при больших $T$ верхняя оценка имеет большую погрешность.

Отметим, что полученное значение верхней оценки в рассматриваемом примере можно получить с учетом соотношений (11)—(14), представив трехкратные интегралы в виде однократных [3] и последующим численным интегрированием.


1. *Фомин Я. А.* Теория выбросов случайных процессов.— М. : Связь, 1980.— 216 с.
2. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы.— М. : Мир, 1969.— 398 с.
3. *Owen D. B.* A table of normal integrals // Commun. on Stat.— 1980.— 9, N 4.— P. 389—419.



Получено 25.09.89