DOI: 10.3842/umzh.v76i6.7900

УДК 517.9

Олександр Бойчук (Інститут математики НАН України, Київ),
Сергій Чуйко[1] (Донбаський державний педагогічний університет та Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.; Інститут динаміки складних технічних систем Макса Планка, Магдебург, Німеччина),
Микита Попов (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.)

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА У ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

For the nonlinear boundary-value problem for an ordinary differential equation in the critical case, we obtain constructive conditions for the existence of solutions and propose a scheme for finding these solutions by using the Adomian decomposition method.

Отримано конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у критичному випадку з використанням методу декомпозиції Адомяна.

1. Постановка задачі. Будемо досліджувати задачу про побудову розв'язків [1 – 3]

$$z(t) \in \mathbb{C}[a,b]$$

нелінійної крайової задачі

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + Z(z,t), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + J(z(\cdot)) \tag{2}$$

у малому околі розв'язків породжуючої задачі

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)\, z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Тут $A(t)$ — неперервна щодо незалежної змінної t на відрізку $[a,b]$ матриця, $Z(z,t)$ — нелінійна вектор-функція, аналітична щодо невідомої z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3). Вектор-функція $Z(z,t)$ та функція $f(t)$ неперервні щодо незалежної змінної t на відрізку $[a,b]$, крім того, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал, а $J(z(\cdot))$ — нелінійний обмежений векторний функціонал [1 – 3]

$$\ell z(\cdot), J(z(\cdot)) \colon \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m.$$

Нелінійний обмежений векторний функціонал $J(z(\cdot))$ припускаємо аналітичним щодо невідомої z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3).

Актуальність вивчення крайової задачі (1), (2) пов'язана з широким застосуванням подібних задач при вивченні неізотермічних хімічних реакцій [4], а також періодичних процесів у біологічних системах, механіці, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху [1 – 3, 5]. Наприкінці статті буде наведено приклад знаходження наближень до періодичного розв'язку цієї задачі з використанням побудованої нами ітераційної схеми. У статтях [6, 7] за допомогою

[1] Відповідальний за листування, e-mail: chujko-slav@ukr.net.

ефективного методу Ньютона – Канторовича [8] знайдено наближення до розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема періодичних крайових задач. При побудові розв'язків нелінійних крайових задач виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, призводить до великих похибок розв'язків нелінійних крайових задач. Подібну проблему було продемонстровано для періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті [9, 10].

Крім того, побудова розв'язків нелінійних крайових задач з використанням методу простих ітерацій [1] значно ускладнюється обчисленням похідних нелінійностей. У статтях [6, 7] прискорення збіжності ітераційних схем досягнуто обчисленням похідних нелінійностей на кожному кроці. З огляду на зазначене спрощення обчислень похідних нелінійностей та можливість знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема періодичних крайових задач, в елементарних функціях можна досягти з використанням методу декомпозиції Адомяна [11]. Приклад такого спрощення буде наведено нижче.

2. Необхідна умова розв'язності. Будемо досліджувати критичний випадок

$$P_{Q^*} \neq 0,$$

причому припускаємо виконаною умову

$$P_{Q_d^*}\big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{4}$$

У цьому випадку породжуюча задача (3) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \alpha\big](t), \quad r := n - n_1, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ — нормальна $(X(a) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини системи (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матриця,

$$\operatorname{rank} Q = n_1, \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r},$$

P_{Q_r} — $(n \times r)$-матриця, утворена з r лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$-вимірної матриці-ортопроєктора

$$P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q),$$

$P_{Q_d^*}$ – $(d \times m)$-матриця, утворена з $(d := m - n_1)$ лінійно незалежних рядків $(m \times m)$-вимірної матриці-ортопроєктора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*).$$

Крім того,

$$G\big[f(s); \alpha\big](t) := K[f(s)](t) + X(t)Q^+\big\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\big\}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3),

$$K\big[f(s)\big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи (3), Q^+ — псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом [1]. Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$z(t) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t) + \ldots + u_k(t) + \ldots .$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z,t)$ аналітична щодо невідомої z в околі розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ породжуючої задачі (3), тому у зазначеному околі має місце розклад [11, с. 502]

$$Z(z(t),t) = A_0(z_0(t,c_r),t) + A_1(z_0(t,c_r),u_1(t),t) \\ + A_2(z_0(t,c_r),u_1(t),u_2(t),t) + \ldots + A_k(z_0(t,c_r),u_1(t),\ldots,\ u_k(t),t) + \ldots .$$

Нелінійний обмежений векторний функціонал $J(z(\cdot))$ аналітичний щодо невідомої z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3), тому у зазначеному околі має місце розклад

$$J(z(\cdot)) = J_0(z_0(\cdot,c_r)) + J_1(z_0(\cdot,c_r),u_1(\cdot)) + J_2(z_0(\cdot,c_r),u_1(\cdot),u_2(\cdot)) + \ldots \\ + J_k(z_0(\cdot,c_r),u_1(\cdot),u_2(\cdot),\ldots,u_k(\cdot)) + \ldots .$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_1(t) := z_0(t,c_r) + u_1(t), \quad u_1(t) = X_r(t)c_1 + u_1^{(1)}(t), \quad c_1 \in \mathbb{R}^r,$$
$$u_1^{(1)}(t) = G\big[A_0(z_0(s,c_r)); J_0(z_0(\cdot,c_r))\big](t)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(t)}{dt} = A\,u_1(t) + A_0(z_0(t,c_r)), \quad \ell u_1(\cdot) = J_0(z_0(\cdot,c_r)).$$

У випадку (4) умова розв'язності крайової задачі першого наближення приводить до рівняння

$$F_0(c_r) := P_{Q_d^*}\big\{J_0(z_0(\cdot,c_r)) - \ell K\big[A_0(z_0(t,c_r),t)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{5}$$

Лема. *Припустимо, що має місце критичний випадок* $(P_{Q^*} \neq 0)$, *причому виконано умову* (4). *У цьому випадку породжуюча нетерова* $(m \neq n)$ *крайова задача* (3) *має сім'ю розв'язків*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s);\alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що крайова задача (1), (2) *в околі породжуючого розв'язку* $z_0(t,c_r^*)$ *має розв'язок* $z(t)$. *За цих умов має місце рівність* (5).

Рівняння (5) будемо називати рівнянням для породжуючих констант нелінійної крайової задачі (1), (2).

3. Достатня умова розв'язності. Рівняння для породжуючих констант (5), взагалі кажучи, є нелінійним рівнянням. Приклад такого рівняння буде наведено нижче. Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (5) має дійсні корені. Фіксуючи один із дійсних розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (5), приходимо до задачі про побудову розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі розв'язку

$$z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\big[f(s);\alpha\big](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

породжуючої задачі (3). Нехай $(d \times r)$-вимірна матриця

$$B_0 := P_{Q_d^*}\big\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\big[\mathcal{A}_1(s)X_r(s)\big](\cdot)\big\}.$$

Тут

$$\mathcal{A}_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_r^*)}$$

— $(n \times n)$-вимірна матриця,

$$\ell_1 u(\cdot) := \left.\frac{\partial J(z(\cdot))}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_r^*)}$$

— похідна за Фреше векторного функціонала $J(z(\cdot))$. Традиційною умовою розв'язності нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі розв'язку породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ є вимога простоти коренів [1 – 3]

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \quad B_0 := F_0'(c_r) \in \mathbb{R}^{d\times r} \tag{6}$$

рівняння для породжуючих констант (5). Покажемо, що вимога простоти коренів (6) рівняння для породжуючих констант (5) є достатньою умовою розв'язності нелінійної крайової задачі (1), (2) в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$. Друге наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_2(t) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t) + u_2(t)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі другого наближення

$$\frac{du_2(t)}{dt} = A(t)\, u_2(t) + A_1(z_0(t, c_r^*), u_1(t)), \quad \ell u_2(\cdot) = J_1(z_0(\cdot, c_r^*), u_1(\cdot)),$$

де

$$u_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_2 + u_2^{(1)}(t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^r,$$

$$u_2^{(1)}(t) = G\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s)); J_1(z_0(\cdot, c_r^*), u_1(\cdot))\big](t).$$

Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$F_1(c_1) := P_{Q_d^*}\, \big\{J_1(z_0(\cdot, c_r^*), u_1(\cdot)) - \ell K\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s))\big](\cdot)\big\} = 0,$$

на відміну від рівняння для породжуючих констант (5), є лінійним рівнянням щодо c_1:

$$F_1(c_1) = B_0\, c_1 + d_1(c_r^*) = 0,$$

розв'язним за умови (6) простоти коренів рівняння (5) породжуючих констант. Тут

$$B_0 = F_1'(c_1) \in \mathbb{R}^{d\times r}, \quad d_1(c_r^*) := F_1(c_1) - B_0\, c_1.$$

Справді, позначимо вектор-функцію [14]

$$v(t,\mu) := z_0(t, c_r^*) + \mu\, u_1(t) + \ldots + \mu^k\, u_k(t) + \ldots,$$

при цьому

$$F_1(c_1) := P_{Q_d^*}\big\{J_1(z_0(\cdot, c_r^*), u_1(\cdot)) - \ell K\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s))\big](\cdot)\big\}$$

$$= P_{Q_d^*}\big\{J'_\mu(v(\cdot,\mu)) - \ell K\big[Z'_\mu(v(s,\mu),s))\big](\cdot)\big\}\Big|_{\mu=0}$$

$$= P_{Q_d^*}\big\{\ell_1 u_1(\cdot) - \ell K\big[\mathcal{A}_1(s)u_1(s)\big](\cdot)\big\}.$$

Отже,

$$B_0 = F_1'(c_1), \quad d_1(c_r^*) = F_1(c_1) - B_0\, c_1 = P_{Q_d^*}\big\{\ell_1 u_1^{(1)}(\cdot) - \ell K\big[\mathcal{A}_1(s)u_1^{(1)}(s)\big](\cdot)\big\}.$$

Таким чином, за умови (6) простоти коренів рівняння (5) породжуючих констант задачі (1), (2) отримуємо принаймні один розв'язок крайової задачі першого наближення

$$u_1(t) = X_r(t)c_1 + u_1^{(1)}(t), \quad c_1 = -B_0^+\, d_1(c_r^*),$$

де B_0^+ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця [1]. Позначимо $(n \times n)$-вимірну матрицю

$$\mathcal{A}_2(z_0(t,c_r^*)) := \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z(z,t)}{\partial z}\, z_0(t,c_r^*)\right)\Bigg|_{z=z_0(t,c_r^*)}$$

та другу похідну за Фреше векторного функціонала $J(z(\cdot))$:

$$\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) := \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial J(z(\cdot))}{\partial z}\, z_0(\cdot,c_r^*)\right)\Bigg|_{z=z_0(t,c_r^*)}.$$

Третє наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_3(t) := z_0(t,c_r^*) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі третього наближення

$$\frac{du_3(t)}{dt} = A(t)\, u_3(t) + A_2(z_0(t,c_r^*), u_1(t), u_2(t)), \quad \ell u_3(\cdot) = J_2(z_0(\cdot,c_r^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot)).$$

Тут

$$u_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_3 + u_3^{(1)}(t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^r,$$

$$u_3^{(1)}(t) = G\big[A_1(z_0(s,c_r^*), u_1(s), u_2(s)); J_1(z_0(\cdot,c_r^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot))\big](t).$$

Умова розв'язності крайової задачі третього наближення

$$F_2(c_2) := P_{Q_d^*}\big\{J_2(z_0(\cdot,c_r^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot)) - \ell K\big[A_2(z_0(s,c_r^*), u_1(s), u_2(s))\big](\cdot)\big\} = 0$$

є лінійним рівнянням

$$F_2(c_2) = B_0\, c_2 + d_2(c_r^*, c_1) = 0,$$

розв'язним за умови (6) простоти коренів рівняння (5) породжуючих констант. Справді [14],

$$F_2(c_2) = \frac{1}{2}\, P_{Q_d^*}\big\{J''_{\mu^2}(v(\cdot,\mu)) - \ell K\big[Z''_{\mu^2}(v(s,\mu),s))\big](\cdot)\big\}\Big|_{\mu=0}$$

$$= P_{Q_d^*}\big\{\ell_1 u_2(\cdot) + \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))u_1(\cdot) - \ell K\big[\mathcal{A}_1(s)u_2(s) + \mathcal{A}_2(z_0(s, c_r^*))u_1(s)\big](\cdot)\big\},$$

отже,

$$B_0 = F_2'(c_2), \quad d_2(c_r^*, c_1) = F_2(c_2) - B_0\, c_2 = P_{Q_d^*}\big\{\ell_1 u_2^{(1)}(\cdot) + \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))u_1^{(1)}(\cdot)$$
$$- \ell K\big[\mathcal{A}_1(s)u_2^{(1)}(s) + \mathcal{A}_2(z_0(s, c_r^*))u_1^{(1)}(s)\big](\cdot)\big\}.$$

Таким чином, за умови (6) простоти коренів рівняння (5) породжуючих констант задачі (1), (2) отримуємо принаймні один розв'язок крайової задачі другого наближення

$$u_2(t) = X_r(t)c_2 + u_2^{(1)}(t), \quad c_2 = -B_0^+\, d_2(c_r^*, c_1).$$

Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку визначає ітераційна схема

$$\begin{gathered}
u_1(t) = X_r(t)c_1 + u_1^{(1)}(t), \quad c_1 = -B_0^+\, d_1(c_r^*),\\
u_2^{(1)}(t) = G\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s)); J_1(z_0(\cdot, c_r^*), u_1(\cdot))\big](t),\\
u_2(t) = X_r(t)c_2 + u_2^{(1)}(t), \quad c_2 = -B_0^+\, d_2(c_r^*, c_1),\\
u_2^{(1)}(t) = G\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s)); J_1(z_0(\cdot, c_r^*), u_1(\cdot))\big](t),\\
z_{k+1}(t) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t) + \ldots + u_{k+1}(t), \qquad (7)\\
u_{k+1}(t) = X_r(t)c_{k+1} + u_{k+1}^{(1)}(t), \quad c_{k+1} = -B_0^+\, d_k(c_r^*, c_1, \ldots,\ c_k),\\
u_{k+1}^{(1)}(t) = G\big[A_k(z_0(s, c_r^*), u_1(s), \ldots,\ u_k(s))\big](t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.
\end{gathered}$$

Довести збіжність ітераційної схеми (7) до розв'язку крайової задачі (1), (2) у критичному випадку можна аналогічно [1, 13, 15].

Теорема. *У критичному випадку* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *породжуюча крайова задача* (3) *за умови* (4) *має* r*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови (6) *простоти коренів рівняння* (5) *породжуючих констант задача* (1), (2) *має принаймні один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі* (1), (2) *визначає ітераційна схема* (7). *Якщо існує константа* $0 < \gamma < 1$, *для якої виконуються нерівності*

$$||u_1(t)|| \le \gamma ||z_0(t, c_r^*)||, \quad ||u_{k+1}(t)|| \le \gamma ||u_k(t)||, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то ітераційна схема (7) *збігається до розв'язку крайової задачі* (1), (2).

Приклад. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження 2π-періодичних розв'язків нелінійного рівняння

$$y'' + \sin y = \cos 3t. \qquad (8)$$

Нелінійне рівняння (8) рівнозначне такому:

$$y'' + y = \cos 3t + Y(y), \quad Y(y) = y - \sin y.$$

Тому для 2π-періодичної задачі (8) має місце критичний випадок $Q = 0$. Періодичні розв'язки нелінійного рівняння (8) будемо шукати в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0) = c_{0a}\, \cos t + c_{0b}\, \sin t, \quad c_{0a}\,, c_{0b}\, \in \mathbb{R}^1,$$

однорідної частини

$$y_0'' + y_0 = 0$$

цього рівняння. Неоднорідне рівняння

$$y_0'' + y_0 = f(t) := \cos 3t$$

задовольняє умову (4), тому є розв'язним:

$$y_0(t, c_0) = c_{0a}\, \cos t + c_{0b}\, \sin t + G\big[f(s)\big](t).$$

Тут

$$G\big[f(s)\big](t) := \int\limits_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds = \frac{1}{8}\, \big(\cos t - \cos 3t\big)$$

— оператор Гріна 2π-періодичної задачі для рівняння

$$y'' + y = f(t).$$

При побудові розв'язку нелінійної 2π-періодичної задачі (8) виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, призводить до великих похибок у розв'язку. Зокрема, навіть знаходження коренів рівняння (5) для породжуючих амплітуд у випадку нелінійної 2π-періодичної задачі (8) можливе лише наближене, тому природно скористатись розвиненням нелінійності

$$Y(y) = y - \sin y \approx W(y) := \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{120} + \frac{y^7}{5040}$$

в околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0)$. У свою чергу, для нелінійності $W(y)$ можна скористатись декомпозицією Адомяна. Для знаходження амплітуди породжуючого розв'язку приходимо до рівняння

$$F_0(c_0) = \ell K\big[A_0(y_0(t, c_0), t)\big](\cdot) = 0,$$

де

$$A_0(y_0(t, c_0), t) = \frac{y_0^3(t, c_0)}{6} - \frac{y_0^5(t, c_0)}{120} + \frac{y_0^7(t, c_0)}{5040}.$$

Позначимо

$$c_0 := \begin{pmatrix} c_{0a} \\ c_{0b} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо нелінійне рівняння

$$F_0(c_0) = \begin{pmatrix} F_{0a}(c_0) \\ F_{0b}(c_0) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} F_{0a}(c_0) = {} & \frac{58\ 844\ 303\, c_{0b}\, \pi}{6\ 039\ 797\ 760} + \frac{1\ 565\ 707\, c_{0a} c_{0b}\, \pi}{25\ 165\ 824} + \frac{518\ 159\, c_{0a}^2 c_{0b}\, \pi}{4\ 194\ 304} - \frac{1147\, c_{0a}^3 c_{0b}\, \pi}{294\ 912} \\ & - \frac{169 c_{0a}^4 c_{0b}\, \pi}{32\ 768} + \frac{c_{0a}^5\, c_{0b}\, \pi}{10\ 240} + \frac{c_{0a}^6 c_{0b}\, \pi}{9216} + \frac{1\ 558\ 561\, c_{0b}^3\, \pi}{12\ 582\ 912} - \frac{637\, c_{0a} c_{0b}^3\, \pi}{98\ 304} \\ & - \frac{505\, c_{0a}^2\, c_{0b}^3 \pi}{49\ 152} + \frac{c_{0a}^3 c_{0b}^3\, \pi}{3072} + \frac{c_{0a}^4\, c_{0b}^3\, \pi}{3072} - \frac{2539\, c_{0b}^5\, \pi}{491\ 520} + \frac{7 c_{0a} c_{0b}^5\, \pi}{30\ 720} + \frac{c_{0a}^2 c_{0b}^5\, \pi}{3072} + \frac{c_{0b}^7\, \pi}{9216}, \\ F_{0b}(c_0) = {} & -\frac{11\ 779\ 213\, \pi}{24\ 159\ 191\ 040} - \frac{35312717\, c_{0a}\, \pi}{6\ 039\ 797\ 760} - \frac{1\ 567\ 751\, c_{0a}^2 \pi}{50\ 331\ 648} - \frac{4\ 700\ 195\, c_{0a}^3 \pi}{37\ 748\ 736} \\ & + \frac{1\ 915\, c_{0a}^4\, \pi}{1\ 179\ 648} + \frac{851\, c_{0a}^5\, \pi}{163\ 840} - \frac{7\, c_{0a}^6\, \pi}{184\ 320} - \frac{c_{0a}^7 \pi}{9\ 216} - \frac{1\ 565\ 707\, c_{0b}^2\, \pi}{50\ 331\ 648} - \frac{518\ 159\, c_{0a} c_{0b}^2\, \pi}{4\ 194\ 304} \\ & + \frac{1\ 147\, c_{0a}^2 c_{0b}^2\, \pi}{196\ 608} + \frac{169 c_{0a}^3 c_{0b}^2\, \pi}{16\ 384} - \frac{c_{0a}^4\, c_{0b}^2 \pi}{4\ 096} - \frac{c_{0a}^5 c_{0b}^2\, \pi}{3\ 072} + \frac{637\, c_{0b}^4\, \pi}{393\ 216} + \frac{505\, c_{0a} c_{0b}^4 \pi}{98\ 304} \\ & - \frac{c_{0a}^2 c_{0b}^4\, \pi}{4096} - \frac{c_{0a}^3 c_{0b}^4\, \pi}{3\ 072} - \frac{7\, c_{0b}^6 \pi}{184\ 320} - \frac{c_{0a} c_{0b}^6\, \pi}{9\ 216}. \end{aligned}$$

Рівняння (5) для породжуючих амплітуд у випадку нелінійної 2π-періодичної задачі (8) має єдиний простий

$$B_0 = \frac{2\ 356\ 993\, \pi}{603\ 979\ 776} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

дійсний корінь

$$c_0^* = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Періодичні розв'язки рівняння (8) будемо шукати в околі породжуючого розв'язку

$$y_0(t, c_0^*) = -\frac{1}{8} \cos 3t.$$

Використовуючи ітераційну схему (7)

$$y_1(t) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t), \quad u_1(t) = c_{1a}\, \cos t + c_{1b}\, \sin t + u_1^{(1)}(t),$$

отримуємо

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(t) := G\big[A_0(y_0(s, c_0^*))\big](t) = {} & \frac{1}{1\ 190\ 564\ 934\ 451\ 200} \big(- 37\ 519\ 350\ 301 \cos t \\ & + 36\ 309\ 511\ 700 \cos 3t + 120\ 9923\ 022 \cos 9t - 84\ 425 \cos 15t + 4 \cos 21t \big). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} A_0(y_0(t, c_0^*)) = {} & \frac{1}{676\ 457\ 349\ 120} \big(- 165\ 043\ 235 \cos 3t - 54\ 996\ 501 \cos 9t \\ & + 10\ 745 \cos 15t - \cos 21t \big). \end{aligned}$$

З умови розв'язності крайової задачі другого наближення одержуємо

$$c_{1a} = \frac{37\ 519\ 350\ 301}{1\ 190\ 564\ 934\ 451\ 200}, \quad c_{1b} = 0,$$

отже,

$$u_1(t) = \frac{1}{1\ 190\ 564\ 934\ 451\ 200}\big(36\ 309\ 511\ 700\cos 3t + 1\ 209\ 923\ 022\cos 9t$$
$$- 84\ 425\cos 15t + 4\cos 21t\big).$$

Далі, використовуючи ітераційну схему (7)

$$y_2(t) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t) + u_2(t),$$

маємо

$$u_2(t) = c_{2a}\ \cos t + c_{2b}\ \sin t + u_2^{(1)}(t),$$

де

$$u_2^{(1)}(t) := G\big[A_1(y_0(s, c_0^*), u_1(s))\big](t)$$
$$= \frac{1}{1\ 487\ 962\ 745\ 086\ 243\ 462\ 739\ 279\ 216\ 640\ 000}$$
$$\times\big(34\ 762\ 334\ 389\ 390\ 170\ 152\ 368\ 297\cos t$$
$$- 33\ 569\ 443\ 757\ 313\ 553\ 947\ 978\ 120\cos 3t$$
$$- 1\ 179\ 855\ 998\ 450\ 398\ 663\ 125\ 732\cos 9t$$
$$- 13\ 037\ 275\ 825\ 257\ 078\ 666\ 700\cos 15t$$
$$+ 2\ 642\ 476\ 453\ 864\ 046\ 072\cos 21t - 277\ 425\ 273\ 803\ 040\cos 27t$$
$$+ 10\ 947\ 431\ 495\cos 33t - 272\ 272\cos 39t\big),$$

крім того,

$$A_1(y_0(t, c_0^*), u_1(t)) = \frac{1}{14\ 381\ 542\ 848\ 465\ 809\ \ 178\ 624\ 000}$$
$$\times\big(2\ 595\ 658\ 502\ 280\ 502\ 311\cos 3t + 912\ 288\ 948\ 242\ 468\ 571\cos 9t$$
$$+ 28\ 225\ 932\ 203\ 029\ 030\cos 15t - 11\ 237\ 694\ 578\ 063\cos 21t$$
$$+ 1\ 952\ 049\ 492\cos 27t - 115\ 121\cos t + 4\cos 39t\big).$$

З умови розв'язності крайової задачі третього наближення отримуємо

$$c_{2a} = -\frac{3\ 4762\ 334\ 389\ 390\ 170\ 152\ 368\ 297}{1\ 487\ 962\ 745\ 086\ 243\ 462\ 739\ 279\ 216\ 640\ 000}, \quad c_{2b} = 0,$$

отже,

$$u_2(t) = \frac{1}{1\ 487\ 962\ 745\ 086\ 243\ 462\ 739\ 279\ 216\ 640\ 000}$$

$$\begin{aligned}
&\times\big(-33\,569\,443\,757\,313\,553\,947\,978\,120\cos 3t\\
&-1\,179\,855\,998\,450\,398\,663\,125\,732\cos 9t\\
&-13\,037\,275\,825\,257\,078\,666\,700\cos 15t\\
&+2\,642\,476\,453\,864\,046\,072\cos 21t-277\,425\,273\,803\,040\cos 27t\\
&+10\,947\,431\,495\cos 33t-272\,272\cos 39t\big).
\end{aligned}$$

Використовуючи ітераційну схему (7)

$$y_3(t):=y_0(t,c_0^*)+u_1(t)+u_2(t)+u_3(t),$$

одержуємо

$$u_3(t)\approx u_3^{(1)}(t),$$

де

$$\begin{aligned}
u_3^{(1)}(t)&:=G\big[A_2(y_0(s,c_0^*),u_1(s),u_2(s))\big](t)\\
&=\frac{1}{3\,100\,965\,045\,011\,813\,668\,543\,096\,232\,937\,077\,694\,382\,567\,587\,840\,000\,000}\\
&\times\big(-71\,531\,422\,282\,272\,391\,801\,482\,817\,153\,578\,943\,505\,271\,301\cos t\\
&+69\,033\,782\,331\,770\,378\,001\,748\,280\,242\,576\,685\,739\,800\,000\cos 3t\\
&+2\,462\,264\,409\,590\,416\,519\,040\,828\,974\,967\,537\,096\,227\,800\cos 9t\\
&+35\,150\,178\,433\,787\,888\,252\,039\,399\,909\,877\,257\,501\,925\cos 15t\\
&+225\,454\,198\,612\,502\,518\,805\,213\,424\,819\,461\,716\,080\cos 21t\\
&-91\,737\,640\,696\,790\,136\,699\,491\,381\,811\,504\,300\cos 27t\\
&+16\,839\,001\,854\,592\,283\,765\,609\,904\,343\,650\cos 33t\\
&-1\,415\,216\,727\,801\,759\,063\,397\,346\,130\cos 39t\\
&+75\,137\,671\,149\,904\,104\,268\,800\cos 45t-2\,131\,000\,919\,033\,110\,124\cos 51t\\
&+35\,874\,183\,373\,600\cos 57t\big),
\end{aligned}$$

крім того,

$$\begin{aligned}
A_2(y_0(t,c_0^*),u_1(t),u_2(t))=\bigg(&-\frac{381\,174\,083\,565\,269\,548\,591\,648\,661\cos 3t}{2\,140\,270\,077\,336\,352\,529\,904\,106\,234\,026\,393\,600}\\
&-\frac{58\,913\,996\,044\,406\,821\,308\,093\,283\,891\cos 9t}{927\,450\,366\,845\,752\,762\,958\,446\,034\,744\,770\,560\,000}\\
&-\frac{72\,787\,296\,811\,227\,400\,792\,562\,076\,577\cos 15t}{28\,666\,647\,702\,505\,085\,400\,533\,786\,528\,474\,726\,400\,000}\\
&-\frac{47\,915\,644\,849\,236\,686\,815\,391\,470\,907\cos 21t}{1\,497\,832\,342\,455\,890\,712\,177\,890\,346\,112\,804\,454\,400\,000}
\end{aligned}$$

$$+\frac{7\,590\,254\,697\,719\,445\,164\,711\,843\cos 27t}{352\,431\,139\,401\,386\,049\,924\,209\,493\,203\,012\,812\,800\,000}$$
$$-\frac{1\,264\,193\,442\,746\,098\,108\,781\cos 33t}{213\,976\,048\,922\,270\,101\,739\,698\,620\,873\,257\,779\,200\,000}$$
$$+\frac{244\,480\,341\,987\,636\,317\cos 39t}{352\,431\,139\,401\,386\,049\,924\,209\,493\,203\,012\,812\,800\,000}$$
$$-\frac{1\,147\,769\,282\,503\cos 45t}{23\,403\,630\,350\,873\,292\,377\,779\,536\,658\,012\,569\,600\,000}$$
$$+\frac{224\,578\,681\cos 51t}{125\,692\,224\,541\,753\,066\,756\,186\,602\,471\,004\,569\,600\,000}$$
$$-\left.\frac{191\cos 57t}{5\,083\,141\,433\,673\,837\,258\,522\,252\,305\,812\,684\,800\,000}\right).$$

Для знайдених за допомогою ітераційної схеми (7) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8) виконуються нерівності

$$||u_1(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \le \gamma||z_0(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad ||u_{k+1}(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \le \gamma||u_k(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]},$$
$$\gamma \approx 0,00\;151\;202 \ll 1, \quad k = 0,1,2.$$

Отже, можна казати про практичну збіжність ітераційної схеми (7) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8). Тут

$$||y_0(t,c_0^*)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0,125, \quad ||u_1(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0,0000\;315\;139,$$
$$||u_2(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 2,33\;624 \times 10^{-8}, \quad ||u_3(t)||_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 3,53\;243 \times 10^{-11}.$$

Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (7) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8) визначають нев'язки

$$\Delta_k := \big|\big|y_k''(t) + \sin y_k(t) - \cos 3t\,\big|\big|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0,1,2.$$

Зокрема,

$$\Delta_0 \approx 0,0003\;252\;67, \quad \Delta_1 \approx 2,45\;820 \times 10^{-7}, \quad \Delta_2 \approx 2,44\;073 \times 10^{-10}.$$

Зазначимо, що досліджена нелінійна періодична задача для рівняння (8) не є слабконелінійною, на відміну від найбільш досліджених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1, 5, 16]. Крім того, при побудові наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння (8), на відміну від статті [2], на кожному кроці забезпечено точне виконання умов розв'язності, які гарантують відсутність вікових членів.

Запропоновані у статті умови розв'язності та схема побудови розв'язків нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку з використанням методу декомпозиції Адомяна конструктивні та можуть бути перенесені на нелінійні матричні крайові задачі [17], нелінійні автономні крайові задачі [1, 5, 18, 19], а також на нелінійні гібридні різницево-диференціальні крайові задачі [20, 21].

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Олександр Бойчук є членом редколегії „Українського математичного журналу”. Відповідальним редактором з розгляду цієї статті був інший член редколегії. Стаття пройшла належне таємне рецензування. Олександр Бойчук не був залучений до процесу рецензування і прийняття рішення щодо публікації цієї статті.

Фінансування. Дослідження Микити Попова частково підтримано грантом Simons Foundation (Award 1160640, Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants, Popov M).

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2th ed., De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. A. A. Boichuk, *Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations*, Ukr. Math. J., **50**, № 2, 186 – 195 (1998).
3. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
4. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Model., **69**, 287 – 300 (2019).
5. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
6. A. A. Boichuk, S. M. Chuiko, *On approximate solutions of nonlinear boundary-value problems by the Newton – Kantorovich method*, J. Math. Sci., **258**, № 5, 594 – 617 (2021).
7. A. A. Boichuk, S. M. Chuiko, *On approximate solutions of weakly nonlinear boundary-value problems by the Newton – Kantorovich method*, J. Math. Sci., **261**, № 2, 228 – 240 (2022).
8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
9. Ю. Д. Шлапак, *О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной*, Укр. мат. журн., **26**, № 6, 850 – 854 (1974).
10. A. M. Samoilenko, S. M. Chuiko, O. V. Starkova, *Nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative*, Ukr. Mat. Zh., **72**, № 8, 1280 – 1293 (2020).
11. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. and Appl., **135**, 501 – 544 (1988).
12. G. Adomian, *Polynomial nonlinearities in differential equations*, J. Math. Anal. and Appl., **109**, 90 – 95 (1985).
13. G. Adomian, *Convergent series solution of nonlinear equations*, J. Comput. and Appl. Math., **11**, 225 – 230 (1984).
14. M. Mac, C. S. Leung, T. Harko, *A brief introducion to the Adomian decomposition method*, Roman. Astron. J., **1**, № 1, 1 – 41 (2019).
15. S. M. Chuiko, O. S. Chuiko, M. V. Popov, *Adomian decomposition method in the theory of nonlinear boundary-value problems*, J. Math. Sci., **277**, № 2, 338 – 351 (2023).
16. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
17. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary-value problem*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 236 – 244 (2017).
18. O. Vejvoda, *On perturbed nonlinear boundary-value problems*, Czech. Math. J., № 11, 323 – 364 (1961).
19. S. M. Chuiko, O. V. Starkova, *On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the least square method*, Nonlinear Oscillations, **12**, № 4, 556 – 573 (2009).
20. A. Boichuk, O. Strakh, *Linear Fredholm boundary-value problems for dynamical systems on a time scale*, J. Math. Sci., **208**, № 5, 487 – 497 (2015).
21. A. Samoilenko, A. Boichuk, S. Chuiko, *Hybrid difference differential boundary-value problem*, Miskolc Math. Notes, **18**, № 2, 1015 – 1031 (2017).

Одержано 26.10.23