УДК 517.9

Г. Л. Кулинич, д-р физ.-мат. наук,
М. У. Мынбаева, асп. (Киев. ун-т)

О пространственном усреднении в параболических уравнениях

При существовании определенных пространственных средних от коэффициентов параболического уравнения в частных производных второго порядка специального вида для решения задачи Коши найден явный вид предельной функции.

При існуванні певних просторових середніх від коефіцієнтів параболічного рівняння в частинних похідних другого порядку спеціального вигляду для розв'язку задачі Коші знайдено явний вигляд граничної функції.

Пусть $u^\varepsilon(t, x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\left[a_1(x_1/\varepsilon) + g(x_2/\varepsilon)\right]\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon}a_2(x_2/\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[b_1^2(x_1/\varepsilon)\frac{\partial^2 u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_1^2} + b_2^2(x_2/\varepsilon)\frac{\partial^2 u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_2^2}\right] = 0 \qquad (1)$$

в области $R_T^2 = \{(t, x): t \in (0, T),\ x = (x_1, x_2) \in R^2\}$, $u^\varepsilon(T, x) = F(x)$, где $F(x)$ ограничена и имеет ограниченные производные до второго порядка включительно, функции $b_i(y), y \in R^1$, непрерывны и $0 < \delta \leqslant b_i(y) \leqslant C$, $i = 1, 2$, функции $a_i(y)$ и $g(y)$ измеримы и ограничены.

Для уравнения (1) при каждом $\varepsilon > 0$ существует ограниченное единственное решение $u^\varepsilon(t, x)$ из класса $W_3^{1,2}(R_T^2)$ [1].

В настоящей работе исследуется сходимость при $\varepsilon \to 0$ решения $u^\varepsilon(t, x)$.

В этом направлении имеются результаты в одномерном случае (R_T^1) при более общей зависимости коэффициентов от параметра [2], а в многомерном случае (R_T^m) при $g(y) \equiv 0$ [3].

Теорема. *Если*

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_1(v)}{b_1^2(v)}\,dv = 0,\quad \lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y\frac{dv}{b_1^2(v)} = b^{-2};$$

2) $$\left|\int_0^y\frac{a_2(v)}{b_2^2(v)}\,dv\right| \leqslant C,\quad \lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y \exp\left\{-2\int_0^u\frac{a_2(v)}{b_2^2(v)}\,dv\right\}du = c_1,$$

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y \exp\left\{2\int_0^u\frac{a_2(v)}{b_2^2(v)}\,dv\right\}b_2^{-2}(u)\,du = c_2;$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\exp\left\{2\int_0^u\frac{a_2(v)}{b_2^2(v)}\,dv\right\}b_2^{-2}(u)\,du = \lambda,$$

то при $\varepsilon \to 0$ $u^\varepsilon(t, x)$ *сходится к функции*

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(y_1, y_2)\,q(T - t, x_1, x_2; y_1, y_2)\,dy_1 dy_2,$$

где

$$q(s, x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{c_2\sqrt{c_1c_2}}{|\lambda|2\pi s^2}\int\limits_{-\infty}^{\frac{y_1-x_1}{b}\operatorname{sgn}\lambda}\left(\frac{1}{\lambda c_1}(y_1-x_1)-\frac{bz}{|\lambda|c_1}+\right.$$

$$\left.+|y_2-x_2|+|x_2|\right)\exp\left\{-\frac{c_2}{2sc_1^{-1}}\left(\left[\frac{1}{\lambda c_1}(y_1-x_1)-\frac{bz}{|\lambda|c_1}+|y_2-x_2|+|x_2|\right]^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(y_2-2x_2)^2+(y_2-x_2)^2\right)\right\}\exp\left\{-\frac{z^2}{2s}\right\}dz. \qquad (2)$$

Доказательство. Решение $u^\varepsilon(t, x)$ задачи Коши уравнения (1) имеет вероятностное представление [1]

$$u^\varepsilon(t, x) = M\{F(\xi^\varepsilon(T))/\xi^\varepsilon(t) = x\},$$

где $\xi^\varepsilon(t) = (\xi_1^\varepsilon(t), \xi_2^\varepsilon(t))$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_1^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[a_1(\xi_1^\varepsilon(t)/\varepsilon) + g(\xi_2^\varepsilon(t)/\varepsilon)]\,dt + b_1(\xi_1^\varepsilon(t)/\varepsilon)\,dW_1(t),$$

$$d\xi_2^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}a_2(\xi_2^\varepsilon(t)/\varepsilon)\,dt + b_2(\xi_2^\varepsilon(t)/\varepsilon)\,dW_2(t),$$

где $W_1(t)$, $W_2(t)$ — независимые одномерные винеровские процессы, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Из работы [4] вытекает слабая сходимость при $\varepsilon \to 0$ процесса $\xi^\varepsilon(t)$ к процессу $\hat\xi(t) = (\hat\xi_1(t), \hat\xi_2(t))$, где

$$\hat\xi_1(t) = \varphi(t) + b\hat W_1(t), \quad \hat\xi_2(t) = \sqrt{\frac{c_1^{-1}}{c_2}}\hat W_2(t),$$

$$\varphi(t) = 2\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\left[\beta(\hat W_2(t))\hat W_2(t) - \int\limits_0^t \beta(\hat W_2(s))\,d\hat W_2(s)\right],$$

$\hat W_1(t)$, $\hat W_2(t)$ — независимые одномерные винеровские процессы,

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_1 = \int\limits_0^{+\infty} g(u)\exp\left\{2\int\limits_0^u \frac{a_2(v)}{b_2^2(v)}\,dv\right\}b_2^{-2}(u)\,du, & y > 0,\\ \beta_2 = \int\limits_0^{-\infty} g(u)\exp\left\{2\int\limits_0^u \frac{a_2(v)}{b_2^2(v)}\,dv\right\}b_2^{-2}(u)\,du, & y < 0.\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\varphi(t) = 2\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\left[\left(\beta(\hat W_2(t)) - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\hat W_2(t) - \int\limits_0^t\left(\beta(\hat W_2(s)) - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, d\hat W_2(s)\right] = \lambda\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\left[|\hat W_2(t)| - \int\limits_0^t \operatorname{sgn}\hat W_2(s)\,d\hat W_2(s)\right] = \lambda\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,\tau(t, 0),$$

где [5]

$$\frac{1}{2}\tau(t, a) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t I_{[a, a+\varepsilon)}(\hat W_2(s))\,ds$$

— стандартное локальное время процесса $\hat W_2(t)$ в точке a за время t.

Поэтому $u^\varepsilon(t, x)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к

$$u(t, x) = M\{F(\hat{\xi}(T)) | \hat{\xi}(t) = x\}.$$

Процесс $\hat{\xi}(t)$ является марковским как предел марковских процессов $\xi^\varepsilon(t)$. Для доказательства теоремы осталось найти переходную плотность процесса $\hat{\xi}(t)$. Используя свойства $\tau(t, a)$ [6] и независимость процессов $\hat{W}_1(t)$, $\hat{W}_2(t)$, получаем

$$P(t, x_1, x_2; t+s, y_1, y_2) = P\{\hat{\xi}_1(t+s) < y_1, \hat{\xi}_2(t+s) < y_2 | \hat{\xi}_1(t) = x_1, \hat{\xi}_2(t) =$$

$$= x_2\} = P\{\hat{\xi}_1(t+s) - \hat{\xi}_1(t) < y_1 - x_1, \hat{\xi}_2(t+s) - \hat{\xi}_2(t) < y_2 - x_2 / \hat{\xi}_1(t) =$$

$$= x_1, \hat{\xi}_2(t) = x_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{\lambda \sqrt{c_1/c_2}\,[\tau(t+s, 0) - \tau(t, 0)] < y_1 - x_1 -$$

$$- bz, \hat{\xi}_2(t+s) - \hat{\xi}_2(t) < y_2 - x_2 | \hat{\xi}_2(t) = x_2\} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2s}\right\} dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{(y_2 - x_2)\sqrt{c_2 c_1}} P\{\lambda \sqrt{c_1/c_2}\,\tau(s, -x_2\sqrt{c_2 c_1}) < y_1 - x_1 - bz / \hat{W}_2(s) = \right.$$

$$\left. = z_1 - x_2\sqrt{c_2 c_1}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2s}\right\} dz_1 \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2s}\right\} dz.$$

Следовательно,

$$q(t, x_1, x_2; t+s, y_1, y_2) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} P(t, x_1, x_2; t+s, y_1, y_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi s} \sqrt{\frac{c_2}{c_1^{-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_1} P\left\{\lambda \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\, \tau\left(s, -x_2 \sqrt{\frac{c_2}{c_1^{-1}}}\right) < y_1 - x_1 - \right.$$

$$\left. - bz / \hat{W}_2(s) = (y_2 - 2x_2) \sqrt{\frac{c_2}{c_1^{-1}}}\right\} \exp\left\{-\frac{c_2(y_2 - x_2)^2}{2sc_1^{-1}}\right\} \exp\left\{-\frac{z^2}{2s}\right\} dz.$$

Далее, используя явный вид условной вероятности [7], получаем

$$q(t, x_1, x_2; t+s, y_1, y_2) = \frac{\sqrt{c_2}}{2\pi s^2 \sqrt{c_1^{-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left((y_1 - x_1 - bz) \frac{\sqrt{c_2}}{\lambda \sqrt{c_1}} + \right.$$

$$\left. + |y_2 - x_2| \sqrt{\frac{c_2}{c_1^{-1}}} + |x_2| \sqrt{\frac{c_2}{c_1^{-1}}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2s}\left(\frac{c_2}{c_1^{-1}}\left[(y_1 - x_1 - bz) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \frac{1}{\lambda c_1} + |y_2 - x_2| + |x_2|\right]^2 - (y_2 - 2x_2)^2 \frac{c_2}{c_1^{-1}}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{c_2(y_2 - x_2)^2}{2sc_1^{-1}}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{z^2}{2s}\right\} dz \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} = \frac{c_2 \sqrt{c_1 c_2}}{|\lambda| 2\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda c_1}(y_1 - x_1 - bz) + \right.$$

$$\left. + |y_2 - x_2| + |x_2|\right) \exp\left\{-\frac{c_2}{2sc_1^{-1}} \left(\left[\frac{1}{\lambda c_1}(y_1 - x_1 - bz) + |y_2 - x_2| + |x_2|\right]^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (y_2 - 2x_2)^2\right)\right\} \exp\left\{-\frac{c_2(y_2 - x_2)^2}{2sc_1^{-1}}\right\} \exp\left\{-\frac{z^2}{2s}\right\} dz = \frac{c_2 \sqrt{c_1 c_2}}{|\lambda| 2\pi s^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda c_1} (y_1 - x_1 - bz) + |y_2 - x_2| + |x_2| \right) \exp \left\{ - \frac{c_2}{2sc_1^{-1}} \times \right.$$

$$\times \left(\left[\frac{1}{\lambda c_1} (y_1 - x_1 - bz) + |y_2 - x_2| + |x_2| \right]^2 - (y_2 - 2x_2)^2 + (y_2 - x_2)^2 \right) \Bigg\} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{z^2}{2s} \right\} dz.$$

Учитывая неотрицательность величины $\tau(s, a)$, убеждаемся в справедливости (2).

З а м е ч а н и е. При $\lambda = 0$ $u^\varepsilon(t, x)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи Коши

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[b^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_1^2} + \frac{c_1^{-1}}{c_2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_2^2} \right] = 0$$

в области R_T^2, $u(T, x) = F(x)$.

1. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М. : Наука, 1977.— 398 с.
2. *Алмазов М., Кулинич Г. Л.* Предельные теоремы для одномерных неоднородных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 4.— С. 435—443.
3. *Кулинич Г. Л.* Асимптотическое поведение неустойчивых решений систем стохастических диффузионных уравнений // Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 25—30 ноября 1974 г.).— Вильнюс, 1974.— С. 169—201.
4. *Диалло М. А.* Асимптотическое поведение неустойчивых решений стохастических дифференциальных уравнений со случайным коэффициентом сноса: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1985.— 117 с.
5. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.— М. : Наука, 1986.— 445 с.
6. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М. : Мир, 1968.— 394 с.
7. *Бородин А. Н.* Броуновское локальное время // Успехи мат. наук.— 1989.— **44**, вып. 2 (266).— С. 7—48.

Получено 05.04.91