УДК 517.9

А. М. Самойленко, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев),
А. А. Бойчук, канд. физ.-мат. наук (Ин-т геофизики АН Украины, Киев)

Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием

Получен критерий разрешимости линейных неоднородных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в общем случае, когда число краевых условий не совпадает с порядком дифференциальной системы (нетеровы задачи). Построен обобщенный оператор Грина таких краевых задач. Показана его связь с обобщенным обратным оператором к оператору исходной краевой задачи.

Одержано критерій розв'язності лінійних неоднорідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у загальному випадку, коли число крайових умов не співпадає з порядком системи (нетерові задачі). Побудовано узагальнений оператор Гріна таких крайових задач. Показано його зв'язок з узагальненим оберненим оператором до оператора вихідної крайової задачі.

1. В настоящей работе установим критерий существования и структуру общего решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [1—3]

$$\dot{z} = A(t)\,z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \qquad \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z + a_i, \tag{1}$$

$$\tau_i \in (a, b), \quad i \in \mathbb{Z},$$

с краевым условием

$$lz = \alpha, \quad \alpha \in R^m, \quad t \in [a, b]. \tag{2}$$

Будем пользоваться предположениями и обозначениями из [1]: $A(t)$, $f(t) \in C([a, b]/\{\tau_i\}_I)$ — $n \times n$-мерные матричные и $n \times 1$-мерные векторные функции соответственно ($C([a, b]/\{\tau_i\}_I)$ — пространство непрерывных или кусочно-непрерывных на $[a, b]$, имеющих разрывы первого рода при $t = \tau_i$, вектор-функций); S_i — $n \times n$-мерные постоянные матрицы такие, что $E + S_i$ невырождены; a_i — n-мерный вектор-столбец констант: $a_i \in R^n$; $-\infty < a < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < b < +\infty$; $l = \operatorname{col}(l_1 \ldots l_m)$ — линейный ограниченный m-мерный векторный функционал; $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1 \ldots \alpha_m) \in R^m$.

Известно [1], что всякое решение $z(t, c) \in C^1([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $z(0, c) = c \in R^n$ ($C^1([a, b]/\{\tau_i\}_I)$ — пространство непрерывно-дифференцируемых по $t \in [a, b]/\{\tau_i\}$, имеющих разрывы первого рода при $t = \tau_i$, вектор-функций) импульсной системы (1) имеет вид

$$z(t, c) = X(t)\,c + \int_a^b K(t, \tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^p \bar{K}(t, \tau_i)\, a_i, \tag{3}$$

где $X(t)$ — нормальная $X(a) = E$ фундаментальная матрица соответствующей (1) однородной системы

$$\dot{z} = A(t)\,z, \quad t \neq \tau_i; \qquad \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z, \quad t \in [a, b], \tag{4}$$

а $K(\bar{t}, \tau)$ — матрица Грина задачи Коши системы (1):

$$K(t, \tau) = \begin{cases} -X(t)\,X^{-1}_{(\tau)}, & a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b, \\ 0 & a \leqslant \tau < t \leqslant b; \end{cases} \quad \bar{K}(t, \tau_i) = K(t, \tau_i - 0)(E + S_i)^{-1}.$$

Для того чтобы (3) было решением импульсной краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы векторная константа $c \in R^n$ удовлетворяла алгебраической системе

$$Qc = \alpha - l\int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau - l\sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i)\, a_i, \tag{5}$$

где $Q = lX(\cdot)$ — $m \times n$-мерная постоянная матрица.

Введем следующие обозначения: P_Q — $n \times n$ матрица (ортопроектор $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$), проектирующая R^n на нуль-пространство (ядро) $N(Q)$ матрицы Q, $P_Q : R^n \to N(Q)$; P_{Q^*} — $m \times m$ матрица (ортопроектор $P_{Q^*}^2 = P_{Q^*} = P_{Q^*}^*$), проектирующая R^m на $N(Q^*)$, $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$; Q^+ — единственная псевдообратная по Муру—Пенроузу к Q $n \times m$-мерная матрица. Для вычисления матриц P_Q, P_{Q^*} и Q^+ существуют хорошо разработанные алгоритмы и формулы [4, 5].

Возвращаясь теперь к системе (5), находим, что необходимое и достаточное условие ее разрешимости относительно $c \in R^n$ состоит в требовании принадлежности правой части (5) ортогональному дополнению к ядру сопряженной к Q матрицы $Q^* = Q^T$:

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau - l\sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i)\, a_i\right\} = 0. \tag{6}$$

При этом и только при этом условии уравнение (5) имеет решение в виде

$$c = Q^{+}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau)\,d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\,a_i\right\} + P_Q c. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получаем

$$z(t,c) = X(t)P_Q c + X(t)Q^{+}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau)\,d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\,a_i\right\} +$$
$$+ \int_a^b K(t,\tau) f(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{p}\bar{K}(t,\tau_i)\,a_i. \qquad (8)$$

Так как $\operatorname{rank} P_{Q^*} = m - \operatorname{rank} Q^* = m - n_1 = d$ $(\operatorname{rank} Q^* = \operatorname{rank} Q = n_1 \leqslant \leqslant \min(n,m))$, то условие (6) состоит из d линейно-независимых условий. Поэтому $m \times m$-мерную матрицу P_{Q^*} можно заменить $d \times m$-мерной матрицей $P_{Q_d^*}$, строки которой — d линейно-независимые строки P_{Q^*}. Далее, так как $\operatorname{rank} P_Q = n - \operatorname{rank} Q = n - n_1 = r$, то в первом слагаемом в (8) r произвольных постоянных. Поэтому его можно заменить слагаемым $X_r(t)c_r$, где $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $n \times r$-мерная матрица, столбцы которой составлены из r линейно-независимых столбцов матрицы P_Q; c_r — произвольный вектор-столбец из R^r.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть импульсная краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет указанным выше условиям. Если* $\operatorname{rank} Q = n_1$, *то соответствующая* (1), (2) *однородная* ($f(t) = 0$, $a_i = 0$, $\alpha = 0$) *краевая задача имеет* $r = n - n_1$ *и только* r *линейно-независимых решений. Неоднородная краевая задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда* $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \in R^n$ *и* $\alpha \in R^m$ *удовлетворяют условию*

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau)\,d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\,a_i\right\} = 0 \quad (d = m - n_1), \qquad (9)$$

и при этом имеет в $C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I)$ *r-параметрическое семейство решений*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^{+}\alpha, \qquad (10)$$

где

$$\left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\int_a^b K(t,\tau)*d\tau - X(t)Q^{+}l\int_a^b K(\cdot,\tau)*d\tau,\ \sum_{i=1}^{p}\bar{K}(t,\tau_i)* -$$
$$- X(t)Q^{+}l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)*\Big]\begin{bmatrix} f(\tau) \\ a_i \end{bmatrix} \qquad (11)$$

— обобщенный оператор Грина исходной краевой задачи.

2. Построенный обобщенный оператор Грина (11) краевой задачи (1), (2) тесно связан с обобщенным обратным оператором [5] к оператору исходной краевой задачи. Действительно, представим аналогично [3, 4] импульсную краевую задачу (1), (2) в операторном виде

$$\Lambda z = y,$$

где

$$\Lambda\cdot \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{col}\left[\frac{d\cdot}{dt} - A\cdot,\ \Delta\cdot|_{t=\tau_i} - S_i\cdot,\ l\cdot\right] \qquad (12)$$

— линейный оператор, действующий из $C^1([a,b]/\{\tau_i\}_I)$ в $C([a,b]/\{\tau_i\}_I) \times \times R^n \times R^m$; $y = \operatorname{col}[f(t), a_i, \alpha]$. Причем, Λ — нетеров [6] оператор, индекс которого равен

$$\operatorname{ind}\Lambda = \dim\ker\Lambda - \dim\ker\Lambda^* = \operatorname{ind} Q = r - d < \infty.$$

(В случае $m = n \to$ $r = d$ Λ — фредгольмов $\operatorname{ind}\Lambda = 0$.)

Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор

$$\Lambda^{-} * \stackrel{\text{def}}{=} \left[G \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}, \; XQ^{+} * \right], \tag{13}$$

действующий из $C([a, b]/\{\tau_i\}_I) \times R^n \times R^m$ в $C^1([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, является ограниченным обобщенным обратным к Λ оператором, удовлетворяющим его определяющим [3] свойствам

$$\Lambda^{-}\Lambda\Lambda^{-} = \Lambda^{-}, \quad \Lambda\Lambda^{-}\Lambda = \Lambda.$$

Конструкция (13) обобщенного обратного оператора Λ^{-} основана на использовании свойств дифференциальной системы. С использованием [7, 8] можно строить Λ^{-}, исходя из информации о ядре оператора Λ.

Если функционал l такой, что справедливо соотношение

$$l \int_a^b K(\cdot, \tau) * d\tau = \int_a^b lK(\cdot, \tau) * d\tau,$$

то

$$\left(G \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right)(t) = \left[\int_a^b G_0(t, \tau) * d\tau, \; \sum_{i=1}^{p} \bar{G}_0(t, \tau_i) * \right] \begin{bmatrix} f(\tau) \\ a_i \end{bmatrix},$$

где $G_0(t, \tau)$ — обобщенная матрица Грина краевой задачи (1), (2) без импульсов, имеющая вид [4]

$$G_0(t, \tau) = K(t, \tau) - X(t) Q^{+} lK(\cdot, \tau), \quad \bar{G}_0(t, \tau_i) = G_0(t, \tau_i - 0)(E + S_i)^{-1}.$$

3. В качестве примера рассмотрим задачу о регуляризации с помощью импульсного воздействия не всюду разрешимой краевой задачи [9]. Пусть при некоторых $f_0(t) \in C([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i^0 \in R^n$, $\alpha_0 \in R^m$ краевая задача (1), (2) неразрешима, т. е. условие (9) не выполнено. Введем в эту задачу в момент времени $t = \bar{\tau}_1$ импульсное воздействие

$$\Delta z|_{t=\bar{\tau}_1} = \bar{S}_1 z + \bar{a}_1, \quad \tau_i \neq \bar{\tau}_1 \in]a, b[, \quad \exists (E + \bar{S}_1)^{-1}. \tag{14}$$

Величину $\bar{a}_1$ будем выбирать из критерия типа (9)

$$P_{Q_d^*} l\bar{K}_0(\cdot, \bar{\tau}_1)\bar{a}_1 = P_{Q_d^*} \left\{ \alpha_0 - l \int_a^b K_0(\cdot, \tau) f_0(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}_0(\cdot, \tau_i) \alpha_i^0 \right\} \tag{15}$$

разрешимости полученной импульсной краевой задачи (1), (2), (14) так, чтобы она стала разрешимой при $f_0(t) \in C([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i^0 \in R^n$, $\alpha_0 \in R^m$; $K_0(t, \tau)$ — матрица Грина задачи Коши (1), (14).

Обозначим через $S = P_{Q_d^*} l \bar{K}_0(\cdot, \bar{\tau}_1)$ $d \times n$-мерную матрицу, S^{+} — псевдообратную к S $n \times d$-мерную матрицу; P_{S^*} — $d \times d$-мерную матрицу (ортопроектор), проектирующую R^d на $N(S^*)$; P_S — $n \times n$-мерную матрицу (ортопроектор), проектирующую R^n на $N(S)$. Тогда из доказанной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *Не всюду разрешимую краевую задачу* (1), (2) *можно дополнить, добавляя к не еще одно импульсное воздействие, до разрешимой при* $\forall f_0(t) \in C([a, b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i^0 \in R^n$, $\alpha_0 \in R^m$ *тогда и только тогда, когда*

$$P_{S^*} P_{Q_d^*} = 0.$$

При этом величину дополнительного (регуляризующего) импульса $\bar{a}_1$ *нужно выбирать в виде*

$$\bar{a}_1 = S^{+} P_{Q_d^*} \left\{ \alpha_0 - l \int_a^b K_0(\cdot, \tau) f_0(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}_0(\cdot, \tau_i) a_i^0 \right\} + P_S c, \quad \forall c \in R^n.$$

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища шк., 1987.— 287 с.
2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н., Дрозденко С. Е.* Динамические системы с импульсной структурой.— Свердловск: Сред. Урал. кн. изд-во, 1983.— 112 с.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 309 с.
4. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач.— Киев: Наук. думка, 1990.— 96 с.
5. *Generalized* inverses and applications / Edited by M. Z. Nashed.— New York; San Francisco; London: Acad. Press.— 1967.— 1054 p.
6. *Максимов В. П.* Нетеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения.— 1974.— 10, № 12.— С. 2288—2291.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 8.— С. 6—9.
8. *Bojchuk A., Juravliov V.* Generalized inverses for Noether's operators in Banach spases // 5-th Conf. on numeric. methods. Hungary.— 1990.— P. 11.
9. *Рахматуллина Л. Ф.* О регуляризации линейных краевых задач // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 7.— С. 37—43.

Получено 29.12.90