УДК 517.9

И. Ю. Денисова, асп. (Киев. ун-т)

О достижимости и устойчивости инвариантного множества системы стохастических дифференциальных уравнений

Исследуются вопросы достижимости и устойчивости инвариантного множества линейной системы стохастических дифференциальных уравнений для соответствующей нелинейной системы. Выведены условия, при которых возможна устойчивость по вероятности.

Досліджуються питання досягання та стійкості інваріантної множини лінійної системи стохастичних диференціальних рівнянь для відповідної нелінійної системи. Виведені умови, при яких можлива стійкість за ймовірністю.

Пусть существует решение $\zeta(t) = (\zeta_1(t),\ \zeta_2(t))$ системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\zeta_i(t) = a_i^*(t,\ \zeta(t))\,dt + b_i^*(t, \zeta(t))\,dw(t), \tag{1}$$

$i = 1, 2, w(t)$ — одномерный винеровский процесс, $(x_1^0,\ x_2^0)$ — начальное положение системы, а коэффициенты $a_i^*(t, x)$ и $b_i^*(t, x)$ допускают разложения

$$a_i^*(t, x) = (Ax)_i + \tilde{a}_i(t,\ x), \quad b_i^*(t, x) = (bx)_i + \tilde{b}_i(t, x), \tag{2}$$

где $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ i = 1, 2.$

Линейная система, соответствующая данной нелинейной, имеет вид

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt + B\xi(t)\,dw(t). \tag{3}$$

Определение. *Непустое множество $\Gamma \subset D$, где D — некоторая открытая область, называется «локально инвариантным» (или просто инвариантным) множеством для случайного процесса $\varphi(t)$ до момента первого выхода $\tau_D = \inf\{t : \varphi(t) \notin D\}$ из области D, если*

$$P\{\varphi(t) \in \Gamma \quad \forall t < \tau_D / \varphi(0) \in \Gamma\} = 1.$$

В работе рассматриваются инвариантные множества для системы (3), которые являются линиями уровня некоторой функции $G(x_1,\ x_2)$, т. е. инвариантные множества описываются уравнениями $G(x) = C$, где C —

произвольная постоянная, функция $G(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в области D [1].

Исследуется вопрос недостижимости и устойчивости по вероятности кривых $G(x) = C$ при некотором C для процесса $\zeta(t)$.

Лемма 1. *Пусть линии уровня $G(x) = C$ функции $G(x) \in C^2(D)$ являются инвариантными множествами для системы* (3), *тогда* $\forall x \in D$ *верны тождества*

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}(Ax)_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i \partial x_j}(Bx)_i (Bx)_j = L_1 G(x) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}(Bx)_i = L_2 G(x) = 0.$$

Доказательство. Пусть $(x_1^0, x_2^0) \in D$ и $t < \tau_D$, где τ_D — момент первого выхода из области D процесса $\xi(t)$. По формуле Ито имеем

$$G(\xi(t)) = G(x_1^0, x_2^0) + \int_0^t L_1 G(\xi(s))\, ds + \int_0^t L_2 G(\xi(s))\, dw(s) = C.$$

Отсюда

$$\int_0^t L_1 G(\xi(s))\, ds + \int_0^t L_2 G(\xi(s))\, dw(s) = 0.$$

Поскольку первый интеграл является абсолютно непрерывной функцией а второй — непрерывный с вероятностью единица мартингал, то

$$\int_0^t L_1 G(\xi(s))\, ds = \int_0^t L_2 G(\xi(s))\, d\omega(s) = 0.$$

Из непрерывности подынтегральных выражений

$$L_1 G(\xi(t)) = L_2 G(\xi(t)) = 0. \tag{4}$$

Предположим, что существует точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in D$ такая, что $L_1 G(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \neq$ $\neq 0$. Тогда из дважды непрерывной дифференцируемости функции $G(x)$ получим, что существует $\delta > 0$ такое, что $u_\delta(\hat{x}) \subset D$ и $L_1 G(x) \neq 0$ $\forall x \in$ $\in u_\delta(\hat{x})$.

Выберем начальные условия (x_1^0, x_2^0) в точке $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Тогда для решения $\xi(t)$ верно в силу (4) $L_1 G(\xi(t)) = 0$ $\forall t < \tau$, где τ — момент первого выхода решения $\xi(t)$ из δ-окрестности $u_\delta(\hat{x})$, но это противоречит (5). Таким образом, доказано, что $L_1 G(x) = 0$. Аналогично можно показать, что $L_2 G(x) = 0$.

Далее фиксируем некоторую инвариантную кривую $G(x_1, x_2) = C$ системы (3). Введем новую функцию $G_1(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) - C$. Обозначим через τ_D момент первого выхода процесса $\zeta(t)$ из области D.

Лемма 2. *Пусть линия уровня $G_1(x_1, x_2) = 0$ функции $G_1(x) \in C^2(D)$ является инвариантным множеством для системы* (3), *область* $\{G_1(x) >$ $> 0\} \subset D$, $x^0 \in \{G_1(x) > 0\}$. *Если существует $c \geqslant 0$ такое, что* $\forall x \in$ $\in \{G_1(x) > 0\}$

$$G_1(x)\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_i}\tilde{a}_i(t, x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(G_1(x)\frac{\partial^2 G_1(x)}{\partial x_i \partial x_j} - 2\frac{\partial G_1(x)}{\partial x_i}\frac{\partial G_1(x)}{\partial x_j}\right. \times$$

$$\times \left(\tilde{b}_i(t, x)\tilde{b}_j(t, x) + \tilde{b}_i(t, x)(Bx)_j + \tilde{b}_j(t, x)(Bx)_i\right) \geqslant -cG_1^2(x),$$

то множество $G_1(x) = 0$ недостижимо для процесса $\zeta(t)$ до момента τ_D.

Доказательство. Функция $V(t, x) = \dfrac{e^{-ct}}{G_1(x)}$ дважды непрерывно дифференцируема в области $G_1(x) > \delta$ $\forall \delta > 0$. Пусть $(x_1^0, x_2^0) \in \in \{G_1(x) > \delta\}$ и τ_δ — момент первого выхода из области $G_1(x) > \delta$, тогда $\tau_\delta < \tau_D$ $\forall \delta > 0$. Обозначим $\tau_\delta(t) = \min\{\tau_\delta, t\}$. По формуле Ито получим для процесса

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-ct} G_1^{-1}(\zeta(t))$$

соотношение

$$\varphi(\tau_\delta(t)) = G_1^{-1}(x^0) - \int\limits_0^{\tau_\delta(t)} \frac{e^{-cs}}{G_1^3(\zeta(s))} \Bigg(G_1(\zeta(s)) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_i} a_i^*(s, \zeta(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left(G_1(\zeta(s)) \frac{\partial^2 G_1(\zeta(s))}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_i} \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_j} \right) b_i^*(s, \zeta(s)) \times$$

$$\times b_j^*(s, \zeta(s))\, ds - \int\limits_0^{\tau_\delta(t)} \frac{e^{-cs}}{G_1^2(\zeta(s))} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_i} b_i^*(s, \zeta(s))\, dw(s).$$

Используя то, что $G_1(x) = 0$ — инвариантная кривая для системы (3), и способ доказательства леммы 1, можно показать, что

$$G_1(x) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_i} (Ax)_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left(G_1(x) \frac{\partial^2 G_1(x)}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_i} * \right.$$

$$\left. * \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_j} (Bx)_i (Bx)_j = 0. \right.$$

С учетом разложений (2) и этих равенств получим

$$\varphi(\tau_\delta(t)) = G_1^{-1}(x^0) - \int\limits_0^{\tau_\delta(t)} e^{-cs} G_1^{-3}(\zeta(s)) \left(G_1(\zeta(s)) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_i} \tilde{a}_i(s, \zeta(s)) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left(G_1(\zeta(s)) \frac{\partial^2 G_1(\zeta(s))}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_i} \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_j} \right) (\tilde{b}_i(s, \zeta(s)) *$$

$$* \tilde{b}_j(s, \zeta(s)) + \tilde{b}_i(s, \zeta(s)) (B\zeta)_j + \tilde{b}_j(s, \zeta(s)) (B\zeta)_i) + c G_1^2(\zeta(s)))\, ds -$$

$$- \int\limits_0^{\tau_\delta(s)} G_1^{-2}(\zeta(s))\, e^{-cs} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G_1(\zeta(s))}{\partial x_i} \tilde{b}_i(s, \zeta(s))\, dw(s).$$

Возьмем математическое ожидание слева и справа и учтем условия леммы, тогда

$$M \frac{1}{G_1(\zeta(\tau_\delta(t)))} \leqslant \frac{e^{ct}}{G_1(x^0)}.$$

Следовательно,

$$P\{G_1(\zeta(\tau_0(t))) \leqslant \delta\} = P\left\{ \frac{1}{\delta} \leqslant \frac{1}{G_1(\zeta(\tau_\delta(t)))} \right\} \leqslant \delta M \frac{1}{G_1(\zeta(\tau_\delta(t)))} \leqslant \frac{\delta e^{ct}}{G_1(x^0)}.$$

Поскольку $\tau_\delta(t) = \min\{\tau_\delta, t\}$, то $\tau_\delta(t) \to \tau_\delta$ при $t \to \infty$. Так как функция

$G(x)$ и процесс $\zeta(t)$ непрерывны в D, то

$$P\{G_1(\zeta(\tau_\delta))\leqslant\delta\}\leqslant\frac{\delta e^{ct}}{G_1(x^0)}.$$

Устремляя δ к нулю, имеем утверждение леммы.

Теорема. *Пусть линия уровня $G_1(x)$ функции $G_1(x)\in C^2(D)$ является инвариантным множеством для системы* (3). *Предположим, что $G_1(x^0)>0$. Если для любого $\varepsilon_1\geqslant 0$ существует $\varepsilon>0$ такое, что в области $0<G_1(x)<\varepsilon$ верно неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G_1(x)}{\partial x_i}\tilde a_i(t,x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 G_1(x)}{\partial x_i\partial x_j}(\tilde b_i(t,x)\tilde b_j(t,x)+\tilde b_i(t,x)(Bx)_j+$$

$$+\tilde b_j(t,x)(Bx)_i\leqslant-\varepsilon_1 G_1(x)$$

и выполняются условия леммы 2, *то кривая $G_1(x)=0$ устойчива по вероятности для системы* (1).

Доказательство. Пусть $G_1(x^0)>0$. Тогда по лемме 2 $\forall t<\tau_D$ $\varphi(t)=G_1(\zeta(t))>0$ и по формуле Ито

$$d\varphi(t)=\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G_1(\zeta(t))}{\partial x_i}a_i^*(t,\zeta(t))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial G_1(\zeta(t))}{\partial x_i\partial x_j}b_i^*(t,\zeta(t)*\right.$$

$$\left.*b_j^*(t,\zeta(t))\right)dt+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G_1(\zeta(t))}{\partial x_i}b_i^*(t,\zeta(t))\,dw(t).$$

С учетом разложений (2) верно соотношение

$$d\varphi(t)=\left(L_1G_1(\zeta(t))+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G_1(\zeta(t))}{\partial x_i}\tilde a_i(t,\zeta(t))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 G_1(\zeta(t))}{\partial x_i\partial x_j}*\right.$$

$$\left.*(\tilde b_i(t,\zeta(t))\tilde b_j(t,\zeta(t))+\tilde b_i(t,\zeta(t))(B\zeta)_j+\tilde b_j(t,\zeta(t))(B\zeta)_i\right)dt+$$

$$+\left(L_2G_1(\zeta(t))+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G_1(\zeta(t))}{\partial x_i}\tilde b_i(t,\zeta(t))\right)dw(t)=(L_1G_1(\zeta(t))+$$

$$+L_1^*G_1(\zeta(t)))\,dt+(L_2G_1(\zeta(t))+L_2^*G_1(\zeta(t))\,d\omega(t).$$

На основании леммы 1 $L_1G_1(\zeta(t))=0$ и $L_2G_1(\zeta(t))=0$. Пусть $u_\varepsilon=\{x:0<G_1(x)<\varepsilon\}$ — ε-окрестность множества $G_1(x)=0$ и для любого $r<\varepsilon$ r-окрестность этого множества содержится в его ε-окрестности. Допустим, что $(x_1^0,x_2^0)\in u_r$. Пусть τ_r — момент первого достижения границы области u_r, а $\tau_r(t)=\min\{\tau_r,t\}$. Тогда

$$\varphi(\tau_r(t))=G_1(x^0)+\int_0^{\tau_r(t)}L_1^*G_1(\zeta(s))\,ds+\int_0^{\tau_r(t)}L_2^*G_1(\zeta(s))\,dw(s).$$

Поскольку из условий теоремы $L_1^*G_1(\zeta(t))=0$, а

$$M\int_0^{\tau_r(t)}L_2^*G_1(\zeta(s))\,dw(s)=0,$$

то

$$MG_1(\zeta(\tau_r(t)))\leqslant G_1(x_1^0,x_2^0).$$

Отсюда

$$P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} G_1(\zeta(s)) > \varepsilon\} \leqslant P\{G_1(\zeta(\tau_r(t))) \geqslant r\} \leqslant \frac{1}{r} MG_1(\zeta(\tau_r(t))) \leqslant \frac{G_1(x_1^0, x_2^0)}{r}.$$

При $t \to \infty$ имеем

$$P\{\sup_{t\geqslant 0} G_1(\zeta(t)) > \varepsilon\} \leqslant \frac{G_1(x^0)}{r}.$$

В силу непрерывности функции $G_1(x)$ для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\rho > 0$ такое, что при $G_1(x_1^0, x_2^0) \leqslant \rho$: $G_1(x^0)/r \leqslant \varepsilon_1$. Следовательно, $\rho = r\varepsilon_1$.

1. *Бабчук В. Г.* Инвариантные множества системы линейных стохастических диффузионных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1978.— 11 с.
2. *Бабчук В. Г., Кулинич Г. Л.* Об одном методе нахождения инвариантных множеств стохастических дифференциальных уравнений Ито // Теория вероятностей и ее применения.— 1978.— 2, вып. 18.— С. 454—456.
3. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зим. шк. по теории вероятностей и мат. статистике.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964.— С. 41—86.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 368 с.

Получено 15.01.90