УДК 512.55

Ю. А. Дрозд, д-р физ.-мат. наук,
Л. В. Изюмченко, асп. (Киев ун-т)

Представления $\mathfrak{D}$-видов

Приведен критерий модульной ограниченности одного класса полунаследственных колец — тензорных алгебр $\mathfrak{D}$-видов.

Наведено критерій модульної обмеженості одного класу напівспадкових кілець — тензорних алгебр $\mathfrak{D}$-видів.

Н. М. Губарени [1] получила критерий ограниченности модульного типа для одного класса полусовершенных нетеровых справа наследственных колец — тензорных алгебр K — $\mathfrak{D}$-видов ($\mathfrak{D}$ — локальное кольцо главных идеалов). В настоящей статье мы расширяем этот класс, отказываясь от условия полусовершенности. Оказалось, что при этом возникают неожиданные эффекты в случае, когда основное кольцо — простое.

Далее $\mathfrak{D}$ обозначает (двусторонне) нетерово наследственное кольцо без делителей нуля, D — его тело частных (существующее по теореме Голди [2]). Если $A = M_n(D)$, то $\mathfrak{D}$-порядком в A назовем нетерово подкольцо $\Lambda \subset A$, для которого A является классическим кольцом частных, причем в простом правом A-модуле содержится $\mathfrak{D}$ — Λ-подбимодуль, конечнорожденный и как левый $\mathfrak{D}$-, и как правый Λ-модуль. Нетрудно убедиться, что это определение лево-право-симметрично.

Если $A = M_n(D)$, $B = M_m(D)$, то A — B-бимодуль назовем согласованным, если его левая и правая размерности над D конечны и равны. D-видом назовем конечный набор $S = (A_i, V_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, где $A_i = M_{n_i}(D)$, а V_{ij} есть согласованный A_i — A_j-бимодуль. Схемой D-вида S назовем граф $\Gamma(S)$, точки которого — числа $1, \ldots, n$, а из точки i в точку j ведет d_{ij} стрелок, где $d_{ij} = (\dim_D V_{ij}) / (n_i n_j)$ (это определение не совпадает с данным в [3], где не предусмотрены кратные стрелки).

Согласованным семейством порядков относительно D-вида S назовем семейство $(\Lambda_i / i = 1, \ldots, n)$, где Λ_i — $\mathfrak{D}$-порядок в A_i, причем в V_{ij} есть

© Ю. А. ДРОЗД, Л. В. ИЗЮМЧЕНКО, 1992

Λ_i — Λ_j-подбимодуль M_{ij}, конечнопорожденный как левый Λ_i- и правый Λ_j-модуль, причем $A_i M_{ij} = M_{ij} A_j = V_{ij}$.

Пусть дано согласованное семейство наследственных порядков (Λ_i) относительно D-вида S. Тогда $\mathfrak{D}$-видом назовем набор $\Sigma = (B_i, V_{ij})$, где для каждого номера i либо $B_i = A_i$, либо $B_i = \Lambda_i$. В последнем случае i назовем отмеченной точкой. Схемой $\Gamma(\Sigma)$ $\mathfrak{D}$-вида Σ назовем схему $\Gamma(S)$. Пополнением схемы $\Gamma(\Sigma)$ назовем схему $\hat{\Gamma}(\Sigma)$, которая получается из $\Gamma(S)$ заменой каждой отмеченной точки бесконечной цепочкой, начинающейся в этой точке (и не имеет никаких дополнительных связей с другими точками схемы).

Напомним [3], что тензорной алгеброй $T(\Sigma)$ вида Σ называется тензорная алгебра бимодуля $V = \bigoplus_{ij} V_{ij}$ над кольцом $B = \prod_i B_i$. Из результатов [3] следует, что $\mathfrak{D}$-вид Σ всегда полунаследствен, т. е. $T(\Sigma)$ — полунаследственное кольцо.

Говорят, что кольцо Λ модульно ограниченно (или модульно-ограниченного типа), если существует такое натуральное число N, что всякий неразложимый конечнопредставимый Λ-модуль порождается N элементами. $\mathfrak{D}$-вид Σ назовем модульно-ограниченным, если таковым является кольцо $T(\Sigma)$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. *$\mathfrak{D}$-вид Σ модульно ограничен тогда и только тогда, когда:*

1) *либо $\mathfrak{D}$-простое кольцо и любая связная компонента схемы $\Gamma(\Sigma)$ есть схема Дынкина;*

2) *либо кольцо $\mathfrak{D}$ не просто и любая связная конечная часть пополненной схемы $\hat{\Gamma}(S)$ есть схема Дынкина.*

Замечания. 1. Утверждение (1) теоремы можно переформулировать так: если колчан (в смысле работы [4]) имеет конечный представленческий тип над некоторым полем, то он имеет модульно-ограниченный тип над любым простым нетеровым наследственным кольцом. По-видимому, аналогичное утверждение имеет место и для более широкого класса матричных задач (представлений свободных боксов в смысле работы [5]), однако в настоящее время мы не можем дать точного определения соответствующего класса.

2. Примерами простых наследственных нетеровых колец являются алгебры Вейля $A_1(K)$ (K — поле характеристики 0), различные кольца косых многочленов и т. п.

3. K — $\mathfrak{D}$-виды в смысле работы [1] попадают в область действия пункта 2) этой теоремы. Легко проверить, что приведенный в [1] список схем с отмеченными точками — это в точности такие схемы, пополнения которых удовлетворяют условию пункта 2).

Доказательство. Пусть $\Lambda = T(\Sigma)$. Предположим вначале, что кольцо $\mathfrak{D}$ простое. Тогда нетрудно убедиться, что всякий наследственный $\mathfrak{D}$-порядок Морита-эквивалентен кольцу $\mathfrak{D}$. Очевидно, если заменить каждое кольцо B_i Морита-эквивалентным, то и тензорная алгебра Λ заменится на Морита-эквивалентное кольцо. Поэтому можно считать, что каждое B_i есть либо D, либо $\mathfrak{D}$.

Рассмотрим кольцо $A = T(S)$. Описание A-модулей — это задача о представлениях колчана S над телом D в смысле [4]. Из результатов [4] следует, что A модульно ограниченное тогда и только тогда, когда $\Gamma(S)$ — несвязное объединение Дынкина. Очевидно, это необходимо и для того, чтобы кольцо Λ было модульно ограниченным. С другой стороны, описание $\mathfrak{D}$-модулей аналогично [1] также сводится к представлениям колчана, с тем отличием, что если точка i отмечена, то соответствующие строки (или столбцы) матриц, задающих представление, приводятся элементарными преобразованиями не над D, а над $\mathfrak{D}$.

Воспользуемся далее техникой «представлений боксов» (см., например, [5]) как методом формализации матричных задач. Как известно [5], если колчан S—конечного типа, то к нему применим алгоритм приведения матриц Клейнера — Ройтера, который в конечное число шагов перерабатывает S в некоторый тривиальный бокс $\mathfrak{B}$.

Применим алгоритм приведения матриц к описанию Λ-модулей. Из [6] следует, что элементарными преобразованиями над $\mathfrak{D}$ матрицу с коэффициентами из D можно привести к диагональному виду, причем поскольку $\mathfrak{D}$ простое, все диагональные элементы, кроме, возможно, одного — нули и единицы. Очевидно, если матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($a \in D$, E — единичная матрица), то пары матриц (Y, Z) такие, что $YX = XZ$, имеют следующий вид:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & aZ_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} a^{-1}Y_{11}a & Z_{12} & 0 \\ Y_{21}a & Y_{22} & 0 \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix}.$$

Первые горизонтальные и вертикальные полосы в Y и Z содержат одну строку или столбец и это все, чем эта пара матриц отличается от пар, перестановочных с матрицей $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, возникающей при приведении X над телом D. Поэтому здесь применим аналог алгоритма Клейнера—Ройтера: в конечное число шагов получится бокс $\mathfrak{B}'$, который отличается от $\mathfrak{B}$ лишь конечным числом точек, причем во всех представлениях этим точкам соответствует свободный $\mathfrak{D}$-модуль с одним образующим. Очевидно, эта добавка не влияет на модульную ограниченность, что и доказывает п. 1) теоремы.

Доказательство п. 2) аналогично соответствующему доказательству работы [1] с несложными изменениями, связанными с нелокальностью кольца $\mathfrak{D}$ (при этом также удобно использовать результаты работы [6]).

1. *Губарени Н. М.* Наследственные справа кольца модульно-ограниченного типа.— Киев 1977.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т электродинамики; 148).
2. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца.— М. : Мир, 1972.— 192 с.
3. *Дрозд Ю. А.* Строение наследственных колец // Мат. сб. 1980.— **113**, № 1.— С. 161—172.
4. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I // Manus. Math.— 1972.— **6**, N 1.— P. 71—103.
5. *Ройтер А. В.* Матричные задачи и представления боксов // Представления и квадратичные формы.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 3—38.
6. *Дрозд Ю. А.* Модули над наследственными порядками // Мат. заметки.— 1981.— **29**, № 6.— С. 813—816.

Получено 29.06.90