УДК 519.21

О. М. Кинаш, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Асимптотическое поведение переходной вероятности однородного марковского процесса с конечным числом состояний в схеме серий

Изучено асимптотическое поведение переходных вероятностей $P_{ij}^{(n)}(t/\varepsilon_n)$ для однородного стохастически непрерывного марковского процесса с конечным множеством состояний E, где E представимо в виде $E=E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_r$, E_0 — множество несущественных состояний, E_k, $k=1, \ldots, r$, — эргодические классы.

Вивчено асимптотичну поведінку перехідних імовірностей $P_{ij}^{(n)}(t/\varepsilon_n)$ для однорідного стохастично неперервного марковського процесу зі скінченною множиною станів E, де E представляється у вигляді $E=E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_r$, E_0 — множина несуттєвих станів, E_k, $k=1, \ldots, r$, — ергодичні класи.

Пусть для каждого натурального n $X_n(t)$ — однородный стохастически непрерывный марковский процесс с конечным множеством состояний E; $P_{ij}^{(n)}(t)$ — переходная вероятность за время $t \geqslant 0$ из состояния $i \in E$ в состояние $j \in E$.

Пусть для всех $t \geqslant 0$, $i, j \in E$ существуют пределы

$$P_{ij}(t) = \lim_{N \to \infty} P_{ij}^{(n)}(t),$$

и фазовое пространство E представимо в виде объединения непересекающихся подмножеств $E = E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_r$, где E_0 — множество несущественных состояний, E_k, $k = 1, \ldots, r$, — классы эргодических состояний, т. е. таких состояний, где ограничение предельного процесса $X(t)$ на каждое из множеств E_k, $k = 1, \ldots, r$, является эргодическим процессом со стационарными распределениями $\pi_i^{(k)}$, $k = 1, \ldots, r$, причем $P_{ij}(t) = 0$ при $i \in E_k$, $j \in E_l$, $k \neq l$, $k, l = 1, \ldots, r$; если предельный процесс попадает в одно из множеств E_k, $k = 1, \ldots, r$, то он не выходит за пределы этих множеств.

В настоящей статье будем исследовать асимптотическое поведение переходных вероятностей процесса $X_n(t)$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим вначале случай, когда $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, где $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$.

В работе [1] рассмотрен случай, когда $E_0 = \varnothing$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и последовательность матриц

$$C_n = (c_{kl}^{(n)})_{k,l=1}^r$$

такие, что

$$\lim_{n \to \infty} \{P_{ij}^{(n)}(t/\varepsilon_n) - q_{\alpha\beta}^{(n)} \pi_j^{(\beta)}\} = 0$$

при $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, где $q_{\alpha\beta}^{(n)}(t)$ — (α, β)-й элемент матрицы $\exp\{tC_n\}$.

Несложный анализ доказательства из [1] показывает, что случай $E_0 \neq \varnothing$ не вносит существенных изменений. Это позволяет утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При* $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$, *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$[P_{ij}^{(n)}(t/\varepsilon_n) - q_{\alpha\beta}^{(n)}(t)\, \pi_j^{(\beta)}] \to 0.$$

В случае, когда $i \in E_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$, $j \in E_0$, очевидно, что

$$P_{ij}^{(n)}(t/\varepsilon_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда $i \in E_0$, $j \in E_\beta$, $\beta = 1, \ldots, r$. Обозначим $\zeta_n = \inf\{t \geqslant 0 : X_n(t) \in E_0\}$ — момент первого выхода процесса $X_n(t)$ из E_0.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *При* $i \in E_0$, $j \in E_\beta$, $\beta = 1, \ldots, r$,

$$\lim_{n \to \infty} \left\{P_{ij}^{(n)}(t/\varepsilon_n) - \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} q_{k\beta}^{(n)}(t)\, \pi_j^{(\beta)}\right\} = 0,$$

где

$$\alpha_{ik} = \mathbf{P}_i\{X(\zeta) \in E_k\}, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$P_{ij}^{(n)}(t) = \mathbf{P}_i\{X_n(t) = j, t < \zeta_n\} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l \in E_k} \int_0^t \mathbf{P}_i\{\zeta_n \in du, X_n(\zeta_n) = l\} \times$$

$$\times P_{lj}^{(n)}(t - u). \tag{1}$$

Очевидно, $\mathbf{P}_i\{X_n(t) = j, t < \zeta_n\} = 0$. Легко видеть, что

$$\left[P_{lj}^{(n)}\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - u\right) - q_{\alpha\beta}^{(n)}(t)\, \pi_j^{(\beta)}\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{2}$$

равномерно по $u \in [0, T]$ для всякого $T > 0$. Заменим в (1) t на t/ε_n и представим интеграл в правой части (1) в виде

$$\int_0^T \mathbf{P}_i \{\zeta_n \in du, X_n(\zeta_n) = l\} P_{lj}^{(n)}(t/\varepsilon_n - u) + \int_T^{t/\varepsilon_n} \mathbf{P}_i \{\zeta_n \in du, X_n(\zeta_n) = l\} P_{lj}^{(n)}(t/\varepsilon_n - u). \tag{3}$$

Первый интеграл здесь в силу (2) с точностью до бесконечно малого слагаемого равен

$$\mathbf{P}_i \{\zeta_n \leqslant T, X(\zeta_n) = l\} q_{\alpha\beta}^{(n)}(t) \pi_j^{(\beta)}. \tag{4}$$

Второе слагаемое в (3) не больше, чем

$$\mathbf{P}_i \{\zeta_n \geqslant T\}. \tag{5}$$

По теореме 4 из [2, с. 508] для всех u, v, i, l

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_i \{\zeta_n \in [u, v], X(\zeta_n) = l\} = \mathbf{P}_i \{\zeta \in [u, v], X(\zeta) = l\}.$$

Поэтому выражение (4) с точностью до бесконечно малого слагаемого равно

$$\mathbf{P}_i \{\zeta \leqslant T, X(\zeta) = l\} q_{\alpha\beta}^{(n)}(t) \pi_j^{(\beta)}, \tag{6}$$

а вероятность (5) сходится при $n \to \infty$ к

$$\mathbf{P}_i \{\zeta \geqslant T\}.$$

Выражение (6) при большом T как угодно мало отличается от $\alpha_{ik} q_{\alpha\beta}^{(n)} \pi_j^{(\beta)}$, а вероятность $\mathbf{P}_i \{\zeta \geqslant T\}$ выбором T можно сделать сколь угодно малой в силу того, что $\mathbf{P}_i \{\zeta < \infty\} = 1$ для всех i. Теорема доказана.

Аналогичные результаты, полученные другими методами, содержатся в [3, 4].

1. *Шуренков В. М., Кинаш О. М.* О существовании малого параметра // Бесконечномерный стохастический анализ. Сборник научных трудов.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 114—117.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М.: Наука, 1973.— Т. 2.— 460 с.
3. *Анисимов В. В.* Описание многомерных предельных законов для конечных цепей Маркова в схеме серий // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1973.— Вып. 9.— С. 8—23; 1974.— Вып. 10.— С. 29—38; Вып. 11.— С. 3—10.
4. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев: Наук. думка, 1978.— 220 с.

Получено 03.10.91