DOI: 10.3842/umzh.v76i5.7915

УДК 512.552.4

Олександр Стрілець[1] (Інститут математики НАН України, Київ)

РЕДУКЦІЯ ОПЕРАТОРА ГРАМА ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ ПІДПРОСТОРІВ

In the investigation of the systems of subspaces with given conditions imposed on the pairs of subspaces, we encounter the problem of nonnegativity of the associated Gram operator. We prove a theorem that enables us to reduce the indicated problem, for some classes of subspaces, to the problem of nonnegativity of the Gram operator of a “smaller” system of subspaces.

При дослідженні систем підпросторів із заданими умовами для пар підпросторів виникає питання про невід’ємність відповідного оператора Грама. Доведено теорему, яка дозволяє для певного класу систем звести це питання до питання невід’ємності оператора Грама „меншої” системи підпросторів.

1. Вступ. У роботі [1] доведено теорему, яка дозволяє звести питання про невід’ємну визначеність матриці Грама системи підпросторів, що пов’язана з уніциклічним графом, для кожного ребра якого задано кут між відповідними підпросторами, до питання про невід’ємну визначеність матриці Грама системи, що пов’язана з циклом. Мета цієї роботи — узагальнити вказаний результат на випадок, коли замість циклу може бути довільний зв’язний граф, а умови для пар підпросторів, що відповідають ребрам цього графа, не обмежуються фіксацією кута між підпросторами. Тобто досліджуються системи підпросторів, що пов’язані з графом, який отримаємо, якщо до кожної вершини вихідного зв’язного графа приєднано якесь дерево (можливо тривіальне для деяких вершин). Для кожної пари вершин, з’єднаних ребром одного з приєднаних дерев, як і у випадку уніциклічного графа, задано кут між відповідними підпросторами.

Питання про невід’ємність оператора Грама системи підпросторів виникає при пошуку критеріїв існування систем підпросторів із заданими умовами на пари підпросторів та розв’язанні задачі опису всіх таких незвідних систем з точністю до унітарної еквівалентності. Ми нагадаємо необхідні означення і розглянемо приклади умов (пункт 2), наведемо означення оператора Грама і нагадаємо, як його можна застосувати до задач пошуку критеріїв існування та опису відповідних систем підпросторів (пункт 3), доведемо основну теорему цієї роботи (пункт 4) і розглянемо приклад її застосування (пункт 5).

2. Системи підпросторів. Із системою підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ гільбертового простору H природним чином пов’язаний набір ортогональних проєкторів на відповідні підпростори $P_i = P_{H_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Такий набір визначає $*$-зображення $*$-алгебри, що породжується самоспряженими ідемпотентами

$$\mathbb{C}\langle\, p_1, \ldots, p_n \,|\, p_i^2 = p_i^* = p_i \,\rangle.$$

Задача класифікації систем підпросторів з точністю до унітарної еквівалентності тотожна задачі опису $*$-зображень цієї алгебри з точністю до унітарної еквівалентності. Вже у випадку $n \geq 3$ задача такого опису незвідних $*$-зображень є $*$-дикою, тобто розглядається як нерозв’язна (див. [2 – 4]). Тому досліджуються системи підпросторів з додатковими умовами, накладеними на пари підпросторів.

Найпростішими прикладами додаткових умов є такі:

[1] E-mail: alexander.strelets@gmail.com.

(Ort) *умова ортогональності:* $P_iP_j = P_jP_i = 0$, тобто підпростори H_i та H_j є ортогональними між собою;

(Com) *умова комутації:* $P_iP_j = P_jP_i$;

(Ang) *умова на кут:* для деякого $\varphi_{ij} \in (0, \pi/2)$, $\tau_{ij} = \cos\varphi_{ij}$, виконуються рівності $P_iP_jP_i = \tau_{ij}^2 P_i$, $P_jP_iP_j = \tau_{ij}^2 P_j$;

(Ang_s) *умова на кути:* для $s = 2r + 1 + \sigma$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, і деякої впорядкованої множини кутів

$$\Phi_{i,j} = \{\varphi_{ij,1} > \ldots > \varphi_{ij,r}\} \subset (0; \pi/2)$$

виконуються співвідношення

$$\prod_{k=1}^{r}(P_iP_jP_i - \tau_{ij,k}^2 P_i)P_j^\sigma = 0, \qquad \prod_{k=1}^{r}(P_jP_iP_j - \tau_{ij,k}^2 P_j)P_i^\sigma = 0,$$

де $\tau_{ij,k} = \cos\varphi_{ij,k}$; очевидно, що для найменшого $s = 3$ ця умова збігається з умовою (Ang).

Із системою підпросторів пов'язують скінченний граф $\Gamma = (V, E)$, де вершинам $V = (1, \ldots, n)$ відповідають підпростори. При цьому дві вершини пов'язані ребром $\gamma_{ij} \in E$ тоді й лише тоді, коли для пари підпросторів H_i та H_j не накладено умову (Ort). Через E^{Com}, E^{Ang}, E^{Ang_s} будемо позначати множини ребер γ_{ij} таких, що на відповідні підпростори H_i та H_j накладено умови (Com), (Ang) або (Ang_s) відповідно.

3. Оператор Грама. З системою підпросторів пов'язано оператор Грама

$$G = (G_{ij}) : \tilde{H} \to \tilde{H}, \qquad \tilde{H} = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i, \qquad G_{ij} : H_j \to H_i : x \mapsto P_i x,$$

де $\tilde{H}$ — зовнішня пряма сума просторів H_i.

Наведемо деякі властивості оператора Грама:

1) G є самоспряженим невід'ємним оператором;

2) $G_{ii} = I_{H_i}$;

3) $G_{ij} = G_{ji}^*$;

4) $G_{ij} = 0$ тоді й лише тоді, коли виконується умова (Ort);

5) $\tau_{ij}^{-1} G_{ij}$ є унітарним тоді й лише тоді, коли виконується умова (Ang);

6) спектр оператора $G_{ij}G_{ji}$ є підмножиною множини $\cos^2\Phi_{ij} = \{\cos^2\varphi \,|\, \varphi \in \Phi_{ij}\}$ тоді й лише тоді, коли виконується умова (Ang_s), s — непарне число.

Навпаки, нехай задано оператор

$$B = (B_{ij}) \colon \bigoplus_{i=1}^{n} \tilde{H}_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} \tilde{H}_i$$

такий, що B є самоспряженим невід'ємним оператором і $B_{ii} = I_i = I_{\tilde{H}_i}$. Тоді за допомогою так званої G-конструкції можна побудувати систему підпросторів (див. [5]) $S = \mathcal{G}(\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_n; B)$. При цьому було показано, що правильним є таке твердження.

Твердження 1. *Нехай G — оператор Грама системи підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ такої, що сума підпросторів $H_1 + \ldots + H_n$ щільна у просторі H. Тоді система $\mathcal{G}(H_1, \ldots, H_n; G)$ є унітарно еквівалентною системі S.*

Отже, нехай розглядається задача опису систем підпросторів, на які задано певні умови. Відповідно до умов будують граф Γ та записують відповідний оператор $B_\Gamma: B_{ii} = I_i,\ B_{ij} = B_{ji}^*,\ B_{ij} = 0$ тоді й лише тоді, коли вершини i та j не поєднано ребром. Крім того, якщо, наприклад, додатково визначено множину E^{Ang}, то $\tau_{ij}^{-1} B_{ij}$ є унітарним оператором тоді й лише тоді, коли $\gamma_{ij} \in E^{\mathrm{Ang}}$, і т. д. Для того щоб за таким оператором можна було побудувати систему підпросторів, необхідно і достатньо знайти при яких значеннях параметрів, що задають умови на підпростори, оператор B_Γ є невід'ємним. Це питання може бути досить нетривіальним. Запропонована нижче техніка дозволяє у певних випадках звести його до питання про те, чи є невід'ємним оператор, що побудований для „меншої” системи підпросторів.

4. Редукція. ***4.1.*** Розглянемо такий клас систем, що відповідний граф $\Gamma = (V, E)$ має вигляд

$$\Gamma = (\Gamma_0; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m), \quad m \in \mathbb{N},$$

де $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$ — зв'язний граф; графи $\Gamma_k = (V_k, E_k),\ k = 1, \ldots, m$, є деревами, $E_k \subset E^{\mathrm{Ang}}$, множини V_k попарно не перетинаються і їхнє об'єднання збігається з множиною V; $V_0 = \{i_1, \ldots, i_m\},\ i_k \in V_k,\ k = 1, \ldots, m,\ E = \cup_{k=0}^m E_k$.

Інакше кажучи, граф Γ отримується „приєднанням” дерев Γ_k до кожної вершини зв'язного графа Γ_0.

Зауважимо, що випадок $m = 1$ є тривіальним: $\Gamma = \Gamma_1$. У подальшому будемо завжди вважати, що Γ_0 містить принаймні 2 вершини.

4.2. Для того щоб сформулювати основну теорему, нам знадобляться такі означення.

Для довільної вершини $i \in V_k,\ k = 1, \ldots, m$, існує єдиний шлях без повторів l у дереві Γ_k з вершини i у вершину $i_k \in V_0 \cap V_k$. Означимо відстань $d(i)$ від вершини i до графа Γ_0 як довжину цього шляху. Для довільної вершини $i \notin V_0$, однозначно визначено „попередню” вершину $j = p(i)$, а саме це є вершина, що належить шляху l, така, що $d(j) = d(i) - 1$. Навпаки, для кожної вершини j визначено множину „наступних” вершин у графі Γ (можливо порожню):

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{\Gamma,j} = \{i \in V \mid p(i) = j\}, \quad j \in V.$$

Множину всіх вершин V можна розділити на шари

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_{\Gamma,r} = \{i \in V \mid d(i) = r\}, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

що не перетинаються. При цьому $\mathcal{L}_0 = V_0$, і, починаючи з деякого r, всі $\mathcal{L}_r$ є порожніми множинами. Зауважимо, що виконуються рівності

$$\mathcal{L}_r = \bigsqcup_{j \in \mathcal{L}_{r-1}} \mathcal{V}_j, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\Gamma = (\Gamma_0; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m),\ m \geq 2$. *Оператор* $B_\Gamma = (B_{ij})$ *є невід'ємним тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови*:

(i) *для всіх вершин* $j \in V$ *числа*

$$\nu_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_j} \frac{\tau_{ij}^2}{\nu_i} \tag{1}$$

є додатними;

(ii) *оператор* $\hat{B}_{\Gamma_0} = (\hat{B}_{ij})$, *де*

$$\hat{B}_{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{\nu_i \nu_j}}, \quad i, j \in V_0,\, i \neq j, \qquad \hat{B}_{ii} = B_{ii} = I_i, \quad i \in V_0,$$

є невід'ємним.

Зауважимо, що формула (1) коректно визначає числа ν_j. Справді, зважаючи на те, що множини $\mathcal{V}_j$ є порожніми, якщо $j \in \mathcal{L}_d$, $d = \max\{r \,|\, \mathcal{L}_r \neq \varnothing\}$, за формулою (1) отримуємо $\nu_j = 1$ для вершин шару $\mathcal{L}_d$. Далі за цією формулою визначаємо ν_j для вершин шару $\mathcal{L}_{d-1}$, потім для вершин шару $\mathcal{L}_{d-2}$ і так далі. Обчислити ν_j для кожного наступного шару можливо, якщо всі ν_j, що отримані для попереднього шару, є додатними.

4.3. Доведення теореми базується на двох лемах. Перша з них дозволяє перейти від графа Γ до графа, який можна отримати з Γ, якщо прибрати кілька вершин, що належать зовнішньому шару, тобто до множини $\mathcal{L}_d$.

Лема 1. *Нехай для графа* $\Gamma = (V, E)$ *існують непорожня підмножина вершин* $\mathcal{V}$ *і вершина* k, *що не належить множині* $\mathcal{V}$, *такі, що кожну вершину* $i \in \mathcal{V}$ *з'єднано ребром, що належить* E^{Ang}, *з вершиною* k, *і лише з нею.*

Якщо $V \neq \mathcal{V} \cup \{k\}$, *то оператор* B_Γ *є невід'ємним тоді й лише тоді, коли одночасно виконуються дві умови*:

(i) $\nu = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}} \tau_{ik}^2 > 0$;

(ii) *оператор* $B'_{\Gamma'} = (B'_{ij})$,

$$\Gamma' = (V', E'), \quad V' = V \setminus \mathcal{V}, \quad E' = E \setminus \{\gamma_{ik}\}_{i \in \mathcal{V}},$$

$$B'_{ij} = \begin{cases} I_k, & i = j = k, \\ B_{ij}, & i \neq k, \quad j \neq k, \\ \nu^{-1/2} B_{ij}, & i = k \quad \text{або} \ j = k, \quad i \neq j, \end{cases}$$

є невід'ємним.

Доведення. 1. Припустимо, що оператор B_Γ є невід'ємним. Покажемо, що в цьому випадку $\nu > 0$.

Оскільки граф Γ є зв'язним, існує хоча б одна вершина $j \in V'$, $j \neq k$, така, що $\gamma_{kj} \in E$. Розглянемо дерево $\hat{\Gamma} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} = \mathcal{V} \cup \{k, j\}$, $\hat{E} = \{\gamma_{ik}\}_{i \in \mathcal{V} \cup \{j\}}$. Тоді оператор $B_{\hat{\Gamma}}$ є невід'ємним.

Припустимо, що $\nu \leq 0$. Тоді для довільного $\hat{x} = (x_i)_{i \in \hat{V}}$

$$\begin{aligned} \langle B_{\hat{\Gamma}} \hat{x}, \hat{x} \rangle &= \|x_k\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{V} \cup \{j\}} \|x_i\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{V} \cup \{j\}} 2 \operatorname{Re} \langle B_{ik} x_k, x_i \rangle \\ &= \|x_k\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{V} \cup \{j\}} \big(\|x_i + B_{ik} x_k\|^2 - \|B_{ik} x_k\|^2 \big) \\ &= \nu \|x_k\|^2 - \|B_{jk} x_k\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{V} \cup \{j\}} \|x_i + B_{ik} x_k\|^2. \end{aligned}$$

Ми скористалися тим, що $\|\tau_{ik}^{-1} B_{ik} x_k\| = \|x_k\|$, $i \in \mathcal{V}$, а отже,

$$\|x_k\|^2 - \sum_{i\in\mathcal{V}} \|B_{ik}x_k\|^2 = \|x_k\|^2 - \sum_{i\in\mathcal{V}} \tau_{ik}^2 \|x_k\|^2 = \nu \|x_k\|^2.$$

Таким чином, якщо взяти довільний ненульовий x_k, що не належить ядру оператора B_{jk}, і покласти $x_i = -B_{ik}x_k$, $i \in \mathcal{V} \cup \{j\}$, то для відповідного $\hat{x}$ отримаємо нерівність $\langle B_{\hat{\Gamma}}\hat{x}, \hat{x}\,\rangle = \nu\|x_k\|^2 - \|B_{jk}x_k\|^2 < 0$, а це суперечить тому, що оператор $B_{\hat{\Gamma}}$ є невід'ємним. З отриманої суперечності випливає, що $\nu > 0$.

2. Нехай $\nu > 0$. Покажемо, що для довільного вектора $x = (x_i)_{i\in V}$ виконується рівність

$$\langle\, B_\Gamma\, x, x\,\rangle = \langle\, B'_{\Gamma'} x', x'\,\rangle + \sum_{i\in\mathcal{V}} \|x_i + B_{ik}x_k\|^2, \tag{2}$$

де вектор $x' = (x_i')_{i\in V'}$ визначено рівністю

$$x_i' = \begin{cases} x_i, & i \in V' \setminus \{k\}, \\ \nu^{1/2} x_i, & i = k. \end{cases}$$

Для зручності запису позначимо

$$\Delta_{\gamma_{ij}} = \langle\, B_{ij}x_j, x_i\,\rangle + \langle\, B_{ji}x_i, x_j\,\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, B_{ij}x_j, x_i\,\rangle.$$

Безпосередньо перевіряється, що для довільного ребра $\gamma_{ij} \in E'$ виконується рівність $\langle\, B_{ij}x_j, x_i\,\rangle = \langle\, B'_{ij}x'_j, x'_i\,\rangle$, отже, $\Delta_{\gamma_{ij}} = \langle\, B'_{ij}x'_j, x'_i\,\rangle + \langle\, B'_{ji}x'_i, x'_j\,\rangle$, якщо $\gamma_{ij} \in E'$. Враховуючи, що

$$\|x'_k\|^2 = \nu\|x_k\|^2 = \|x_k\|^2 - \sum_{i\in\mathcal{V}} \tau_{ik}^2 \|x_k\|^2 = \|x_k\|^2 - \sum_{i\in\mathcal{V}} \|B_{ik}x_k\|^2,$$

отримуємо рівності

$$\begin{aligned}
&\langle\, B_\Gamma\, x, x\,\rangle - \langle\, B'_{\Gamma'}\, x', x'\,\rangle \\
&\quad= \left(\sum_{i\in V} \|x_i\|^2 + \sum_{\gamma_{ij}\in E} \Delta_{\gamma_{ij}}\right) - \left(\sum_{i\in V'} \|x'_i\|^2 + \sum_{\gamma_{ij}\in E'} \Delta_{\gamma_{ij}}\right) \\
&\quad= \|x_k\|^2 - \|x'_k\|^2 + \sum_{i\in\mathcal{V}} \|x_i\|^2 + \sum_{i\in\mathcal{V}} \Delta_{\gamma_{ik}} \\
&\quad= \sum_{i\in\mathcal{V}} \bigl(\|B_{ik}x_k\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\, B_{ik}x_k, x_i\,\rangle + \|x_i\|^2\bigr) \\
&\quad= \sum_{i\in\mathcal{V}} \|x_i + B_{ik}x_k\|^2.
\end{aligned}$$

3. Нехай $\nu > 0$ і оператор $B'_{\Gamma'}$ є невід'ємним. Тоді для довільного вектора x права частина рівності (2) невід'ємна, а отже оператор B_Γ є невід'ємним.

Навпаки, нехай оператор B_Γ є невід'ємним. Ми вже показали в п. 1, що в цьому випадку $\nu > 0$. Розглянемо довільний вектор x' і визначимо вектор x формулою

$$x_i = \begin{cases} x'_i, & i \in V' \setminus \{k\}, \\ \nu^{-1/2} x'_k, & i = k, \\ -B_{ik} x_k, & i \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Тоді, відповідно до доведеної в п. 2 рівності, маємо

$$\langle\, B'_{\Gamma'} x', x' \,\rangle = \langle\, B_\Gamma \, x, x \,\rangle \geq 0.$$

Отже, оператор $B'_{\Gamma'}$ є невід'ємним.

Лему 1 доведено.

4.4. Друга лема є безпосереднім наслідком леми 1. Вона дозволяє перейти від графа Γ до такого, який отримаємо, якщо прибрати зовнішній шар графа Γ цілком.

Лема 2. *Нехай* $\Gamma = (\Gamma_0; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$, $m \geq 2$, *і* $d = d(\Gamma) = \max_{i \in V} d(i) > 0$.

Оператор B_Γ *невід'ємний тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови*:

(i) *числа*

$$\nu_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_j} \tau_{ij}^2, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1},$$

є додатними;

(ii) *невід'ємним є оператор* $B'_{\Gamma'}$, *де граф* $\Gamma' = (V', E')$ *отримуємо з графа* Γ *шляхом видалення усіх вершин шару* $\mathcal{L}_d$ *і відповідних ребер, а* B'_{ij} *визначено на решті ребер рівністю*

$$B'_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & i, j \notin \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_j^{-1/2} B_{ij}, & i \notin \mathcal{L}_{d-1}, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_i^{-1/2} B_{ij}, & j \notin \mathcal{L}_{d-1}, \quad i \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_i^{-1/2} \nu_j^{-1/2} B_{ij}, & i, j \in \mathcal{L}_{d-1}. \end{cases}$$

Доведення. Зауважимо, що $\nu_j = 1$ у випадку, коли $\mathcal{V}_j$ є порожньою множиною. Твердження леми отримаємо, якщо для кожної вершини $j \in \mathcal{L}_{d-1}$ такої, що множина $\mathcal{V}_j$ не є порожньою, по черзі (не важливо в якому порядку) застосуємо лему 1 ($\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$, $k = j$, $V \neq \mathcal{V} \cup \{j\}$, бо $m \geq 2$).

***4.5. Доведення теореми* 1.** Випадок, коли граф Γ збігається з Γ_0, тобто всі Γ_k складаються з однієї точки k, де $k = 1, \ldots, m$, є тривіальним, бо для всіх $j \in V$ виконуються рівності $\nu_j = 1$ і $B_\Gamma = \hat{B}_{\Gamma_0}$.

Отже, далі розглядаємо випадок $d = \max_{i \in V} d(i) > 0$.

Доведемо твердження теореми індукцією по d.

Базис індукції: $d = 1$. Твердження теореми є безпосереднім наслідком леми 2.

Крок індукції. Нехай теорема є правильною для довільного графа Γ такого, що $d(\Gamma) = d - 1 > 0$.

За лемою 2 оператор B_Γ невід'ємний тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови:

(i) числа

$$\nu_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \tau_{ij}^2 = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \frac{\tau_{ij}^2}{\nu_i}, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1},$$

є додатними;

(ii) невід'ємним є оператор $B'_{\Gamma'}$, де граф $\Gamma' = (V', E')$ отримуємо з графа Γ шляхом видалення всіх вершин шару $\mathcal{L}_d$ і відповідних ребер, а $B'_{\Gamma'}$ визначено на решті ребер рівністю

$$B'_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & i, j \notin \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_j^{-1/2} B_{ij}, & i \notin \mathcal{L}_{d-1}, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \nu_i^{-1/2} B_{ij}, & i \in \mathcal{L}_{d-1}, \quad j \notin \mathcal{L}_{d-1}. \end{cases}$$

Наслідком означення B'_{ij} є той факт, що ребро γ_{ij} належить E'^{Ang} тоді й лише тоді, коли $\gamma_{ij} \in E^{\mathrm{Ang}} \cap E'$, до того ж

$$\tau'_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}, & i, j \notin \mathcal{L}_{d-1}, \\ \tau_{ij} \nu_j^{-1/2}, & i \notin \mathcal{L}_{d-1}, \quad j \in \mathcal{L}_{d-1}, \\ \tau_{ij} \nu_i^{-1/2}, & i \in \mathcal{L}_{d-1}, \quad j \notin \mathcal{L}_{d-1}. \end{cases}$$

З іншого боку, за індуктивним припущенням оператор $B'_{\Gamma'}$ є невід'ємним тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови:

(i) для всіх вершин $j \in V'$ числа

$$\nu'_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma',j}} \frac{\tau'^2_{ij}}{\nu'_i}$$

є додатними;

(ii) оператор $\hat{B}'_{\Gamma_0}$, де $\hat{B}'_{ij}$ визначено на ребрах E_0 рівністю

$$\hat{B}'_{ij} = \frac{B'_{ij}}{\sqrt{\nu'_i \nu'_j}},$$

є невід'ємним.

Для вершин j з шару $\mathcal{L}_{d-1}$ множини $\mathcal{V}_{\Gamma',j}$ є порожніми, таким чином, $\nu'_j = 1$. Тоді для $j \in \mathcal{L}_{d-2}$ маємо

$$\nu'_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma',j}} \tau'^2_{ij} = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \frac{\tau_{ij}^2}{\nu_i} = \nu_j,$$

а за умови $d > 2$ для вершин $j \in \mathcal{L}_{d-3} \cup \ldots \cup \mathcal{L}_0$ рекурентно отримуємо

$$\nu'_j = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma',j}} \frac{\tau'^2_{ij}}{\nu'_i} = 1 - \sum_{i \in \mathcal{V}_{\Gamma,j}} \frac{\tau_{ij}^2}{\nu_i} = \nu_j.$$

Тоді

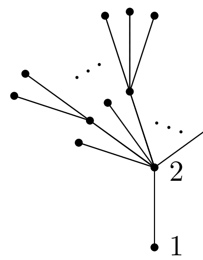
$$\hat{B}'_{ij} = \frac{B'_{ij}}{\sqrt{\nu'_i \nu'_j}} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{\nu_i \nu_j}} = \hat{B}_{ij}.$$

Теорему доведено.

5. Приклади.

***Приклад* 1.** Нехай Γ — дерево і $E = E^{\mathrm{Ang}}$. В роботі [6] показано, що якщо відповідна незвідна система існує, то вона є скінченновимірною, всі підпростори одновимірні, і з точністю до унітарної еквівалентності вона єдина. Необхідною і достатньою умовою існування такої системи є невід'ємна визначеність її оператора Грама B_Γ. Навіть у цьому випадку питання про невід'ємність оператора Грама не є тривіальним. Застосуємо доведену теорему до цього випадку.

В найпростішому випадку, коли підпросторів всього два, відповідний оператор Грама є невід'ємним тоді й лише тоді, коли $\tau_{12}^2 \le 1$. Якщо підпросторів більше ніж два, то відповідне дерево можна записати у вигляді $\Gamma = (\Gamma_0; \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $V_0 = \{1, 2\}$, $E_0 = \{\gamma_{12}\}$, $V_1 = \{1\}$ (тобто Γ_1 є тривіальним), $V_2 = V \setminus \{1\}$.



Твердження 2. *Оператор Грама B_Γ є невід'ємним тоді й лише тоді, коли числа*

$$c_j = \sum_{i \in \mathcal{V}_j} \frac{\tau_{ij}^2}{1 - c_i}, \quad j \in V \setminus \{1\},$$

є меншими за одиницю, а

$$c_1 = \frac{\tau_{12}^2}{1 - c_2} \le 1.$$

Доведення. За теоремою 1 оператор Грама B_Γ невід'ємний тоді й лише тоді, коли

$$\nu_j > 0, \quad j \in V, \qquad (\tau'_{12})^2 = \frac{\tau_{12}^2}{\nu_1 \nu_2} \le 1.$$

За означенням c_j та ν_j пов'язані рівністю $c_j + \nu_j = 1$, якщо $j \in V \setminus \{1\}$. Отже,

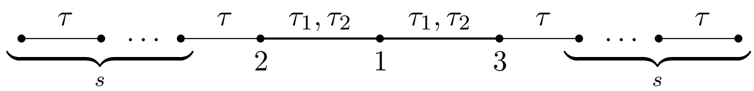
$$\nu_j > 0 \iff c_j < 1, \quad j \in V \setminus \{1\}.$$

Враховуючи, що $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1 - c_2$, за означенням отримуємо $c_1 = (\tau'_{12})^2$.

***Приклад* 2.** Розглянемо граф $\hat{\Gamma}_s = (\Gamma_0; \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, для якого виконано такі умови:

$E_0 = \{\gamma_{12}, \gamma_{13}\} = E^{\mathrm{Ang}_5}$, пари кутів для цих двох ребер збігаються і задані своїми косинусами $\tau_1, \tau_2 \in (0;1), \tau_1 < \tau_2$.

Дерево Γ_1 складається з єдиної вершини, а дерева Γ_2 та Γ_3 є ланцюгами довжини s з одним і тим самим кутом між підпросторами, що поєднані ребром. Відповідний кут заданий своїм косинусом τ.



Системи, що відповідають графу $\hat{\Gamma}_s$, є окремим випадком систем, які було досліджено в роботі [7]. Зокрема, в ній було показано, що всі такі незвідні системи є скінченновимірними, до того ж розмірності всіх підпросторів однакові і не перевищують 2. Крім того, якщо підпростори одновимірні, то для ребер Γ_0 виконуються більш сильні умови

$$P_1P_2P_1 = \hat{\tau}_2^2 P_1, \quad P_2P_1P_2 = \hat{\tau}_2^2 P_2, \qquad P_1P_3P_1 = \hat{\tau}_3^2 P_1, \quad P_3P_1P_3 = \hat{\tau}_3^2 P_3, \tag{3}$$

де $\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3 \in \{\tau_1, \tau_2\}$.

Системи, для яких не виконуються умови (3), було названо власними (proper), для них було наведено оператор Грама, параметризований кутами та додатковим параметром $\eta \in (0;1)$, і показано, що питання існування відповідної системи зводиться до питання невід'ємності відповідного оператора Грама. Але необхідних та достатніх умов на параметри, за яких відповідний оператор є невід'ємним, отримано не було.

В роботі [8] (див. приклад 3, твердження 11) розглядалися системи, відповідні графу $\hat{\Gamma}_0 = \Gamma_0$. Для них було отримано повну класифікацію. Зокрема, було показано, що власні системи існують тоді й лише тоді, коли

$$\tau_1^2 < \frac{1}{2}, \qquad \tau_1^2 + \tau_2^2 < 1.$$

При цьому, якщо $\tau_2^2 \le 1/2$, то для кожного $\eta \in (0;1)$ існує відповідна власна система і всі вони попарно не еквівалентні, а у випадку $\tau_2^2 > 1/2$ параметр η не повинен перевищувати

$$\eta_0 = \frac{1 - \tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}.$$

Застосуємо теорему 1, щоб знайти умови на τ_1, τ_2 та τ, за яких існують власні системи, відповідні графу $\hat{\Gamma}_s$ для довільного параметра s.

Твердження 3. *Власні системи, що відповідають графу $\hat{\Gamma}_s$, існують для довільного s тоді й лише тоді, коли*

$$\tau \le \frac{1}{2}, \qquad \tau_1^2 \le \frac{q}{2}, \qquad \tau_1^2 + \tau_2^2 \le q, \qquad \text{де} \quad q = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2}. \tag{4}$$

Доведення. 1. Легко бачити, що в розглядуваному випадку $\nu_1 = 1$, всі інші числа ν_j, $j \in V \setminus \{1\}$, залежать лише від відстані вершини до Γ_0:

$$\nu_j = \hat{\nu}_{s-d(j)}, \qquad \text{де} \quad \hat{\nu}_0 = 1, \quad \hat{\nu}_r = 1 - \frac{\tau^2}{\hat{\nu}_{r-1}}, \quad r = 1, \ldots, s,$$

а τ_1' і τ_2' — від довжини ланцюжків

$$\tau_k' = \frac{\tau_k}{\sqrt{\hat{\nu}_s}}, \quad k = 1, 2.$$

2. Позначимо $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Аналогічно тому, як це було зроблено в роботі [9], для фіксованого $\tau > 0$ задамо зростаючу послідовність $c_j = c_j(\tau)$ рекурентними співвідношеннями

$$c_0 = 0, \qquad c_{j+1} = f_\tau(c_j), \quad j \in \Lambda_\tau,$$

де

$$f_\tau(x) = \frac{\tau^2}{1-x}, \qquad \Lambda_\tau = \Big\{ j \in \mathbb{N}_0 \,|\, c_k < 1, k \in \{0, \ldots, j\} \Big\}.$$

Було показано (лема 1), що за умови $s \in \Lambda_\tau$ виконуються рівності

$$\hat{\nu}_r = 1 - c_r, \quad r \in \{0, \ldots, s\}.$$

Таким чином, щоб відповідні системи існували для довільного s, необхідно, щоб множина Λ_τ збігалася з $\mathbb{N}_0$. Також було показано (лема 2), що $\Lambda_\tau = \mathbb{N}_0$ тоді й лише тоді, коли $\tau \in (0; 1/2]$. До того ж за цієї умови існує границя

$$c = \lim_{j \to \infty} c_j = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2}.$$

Зауважимо, що

$$c \cdot q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau^2}}{2} = \tau^2.$$

За умови $s \in \Lambda_\tau$ підрахуємо τ_k':

$$\tau_k' = \frac{\tau_k}{\sqrt{\nu_s}} = \frac{\tau_k}{\sqrt{1 - c_s}} = \frac{\tau_k}{\tau} \frac{\tau}{\sqrt{1 - c_s}} = \frac{\tau_k}{\tau} \sqrt{f_\tau(c_s)} = \frac{\tau_k}{\tau} \sqrt{c_{s+1}}, \quad k = 1, 2.$$

3. Нехай нерівності (4) виконуються. Тоді $\Lambda_\tau = \mathbb{N}_0$, існує границя c і для довільного параметра s

$$(\tau_1')^2 = c_{s+1} \frac{\tau_1^2}{\tau^2} < c \, \frac{\tau_1^2}{\tau^2} \le c \, \frac{q}{2\tau^2} = \frac{1}{2},$$

$$(\tau_1')^2 + (\tau_2')^2 = c_{s+1} \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau^2} < c \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau^2} \le c \frac{q}{\tau^2} = 1.$$

Отже, за теоремою 1 оператор Грама $B_{\hat{\Gamma}_s}$ є невід'ємним для довільного параметра s.

4. Ми вже показали, що умова $\tau \le 1/2$ є необхідною.

Припустимо, що $\tau_1^2 > q/2$, тоді

$$\varepsilon = c - \frac{\tau^2}{2\tau_1^2} = \frac{c}{\tau_1^2} \Big(\tau_1^2 - \frac{q}{2} \Big) > 0$$

й існує s_0 таке, що для довільного $s > s_0$ маємо $c_{s+1} > c - \varepsilon$. Отже,

$$c_{s+1} > \frac{\tau^2}{2\tau_1^2} \quad \Rightarrow \quad (\tau_1')^2 = c_{s+1} \frac{\tau_1^2}{\tau^2} > \frac{1}{2}.$$

Таким чином, прийшли до суперечності з необхідністю умови $(\tau_1')^2 < 1/2$.

Припустимо, що $\tau_1^2 + \tau_2^2 > q$, тоді

$$\varepsilon = c - \frac{\tau^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \frac{c}{\tau_1^2 + \tau_2^2}(\tau_1^2 + \tau_2^2 - q) > 0$$

й існує s_0 таке, що для довільного $s > s_0$ маємо $c_{s+1} > c - \varepsilon$. Отже,

$$c_{s+1} > \frac{\tau^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad \Rightarrow \quad (\tau_1')^2 + (\tau_2')^2 = c_{s+1}\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau^2} > 1.$$

Таким чином, прийшли до суперечності з необхідністю умови $(\tau_1')^2 + (\tau_2')^2 < 1$.

Твердження доведено.

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Це дослідження підтримано грантом Simons Foundation (1030291, 1290607, O.S.).

Література

1. Н. Д. Попова, О. В. Стрілець, *Про системи підпросторів гільбертового простору, що пов'язані з уніциклічним графом*, Збірник праць Інституту математики НАН України, **1**, № 1, 166 – 177 (2015).
2. S. A. Kruglyak, Yu. S. Samoĭlenko, *On complexity of description of representations of $*$-algebras generated by idempotents*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**, № 6, 1655 –1664 (2000).
3. V. L. Ostrovskyi, Yu. S. Samoĭlenko, *Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. I*, Representations by bounded operators, Harwood Acad. Publ., Amsterdam (1999).
4. С. А. Кругляк, Ю. С. Самойленко, *Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов*, Функц. анализ и его прил., **14**, № 1, 60 – 62 (1980).
5. А. В. Стрелец, И. С. Фещенко, *О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на угол или коммутации для каждой пары подпространств*, Алгебра и анализ, **24**, № 5, 181 – 214 (2012).
6. Ю. С. Самойленко, А. В. Стрелец, *О простых n-ках подпространств гильбертова пространства*, Укр. мат. журн., **61**, № 12, 1668 – 1703 (2009).
7. N. D. Popova, A. V. Strelets, *On $*$-representations of a class of algebras with polynomial growth related to Coxeter graphs*, Methods Funct. Anal. and Topology, **17**, № 3, 252 – 273 (2011).
8. A. V. Strelets, *On the graph $K_{1,n}$ related configurations of subspaces of a Hilbert space*, Methods Funct. Anal. and Topology, **23**, № 3, 285 – 300 (2017).
9. Н. Д. Попова, О. В. Стрілець, *Критерії існування систем підпросторів, що пов'язані з певним класом уніциклічних графів*, Укр. мат. журн., **73**, № 4, 556 – 565 (2021).

Одержано 08.11.23