

О. М. Шарковський, В. С. Бондарчук¹, А. Г. Сівак (Інститут математики НАН України, Київ)

ЛОКАЛЬНО МАКСИМАЛЬНІ АТРАКТОРИ РОЗТЯГУЮЧИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

We study locally maximal attractors of expanding dynamical systems. Our main result is a representation of these attractors with the help of topological Markov chains corresponding to the Markov partitions of these attractors, which allows to describe the system dynamics on them.

Ya. G. Sinai was the first who constructed and used Markov partitions for Anosov's diffeomorphisms [Funk. Anal. Prilozh., **2**, No 1, 64–89; No 3, 70–80 (1968); *English translation*: Funct. Anal. Appl., **2**, No 1, 61–82; No 3, 245–253 (1968)]. Expanding endomorphisms regarded as the simplest representatives of endomorphisms, were first studied by M. Shub [Amer. J. Math., **91**, No 1, 175–200 (1969)]. To construct Markov partitions for expanding endomorphisms, we modernize Sinai's method in a corresponding way.

A more detailed historical overview can be found in the work by O. M. Sharkovsky [Ukr. Mat. Zh., **74**, No. 12, 1709–1718 (2023); *English translation*: Ukr. Math. J., **74**, No. 12, 1950–1960 (2023)]. There Sharkovsky indicated that the methods used to prove the main results [Dokl. Akad. Nauk SSSR, **170**, No. 6, 1276–1278 (1966); *English translation*: Soviet Math. Dokl., **7**, No. 5, 1384–1386 (1966)] were, in fact, published in the collection of papers “Dynamical systems and the problems of stability of solutions of differential equations” (1973) issued by the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine. This collection is difficult to access and it was never translated into English. However, in the cited paper these methods were applied to somewhat different objects. To the best of the authors' knowledge, there is no information about publications of similar results. Given the outlined history and importance of this approach (based on the Markov partitions and topological Markov chains) for the description of attractors' construction it seems reasonable to republish these results in a new way.

Вивчаються локально максимальні атрактори розтягуючих динамічних систем. Основним результатом роботи є зображення таких атракторів топологічними ланцюгами Маркова, що відповідають марковським розбиттям цих атракторів, яке дозволяє описати динаміку системи на них.

Уперше марковські розбиття побудував Я. Г. Сінай [Функц. анализ и его прил., **2**, № 1, 64–89; № 3, 70–80 (1968); *English translation*: Funct. Anal. and Appl., **2**, № 1, 61–82; № 3, 245–253 (1968)] для дифеоморфізмів Аносова. Розтягуючі ендоморфізми, як найпростіші представники ендоморфізмів, уперше розглянув М. Шуб [Amer. J. Math., **91**, № 1, 175–200 (1969)]. При побудові марковських розбиттів для розтягуючих ендоморфізмів ми відповідним чином модернізуємо метод Я. Г. Сіная.

Більш повна історія є в статті О. М. Шарковського [Укр. мат. журн., **74**, № 12, 1709–1718 (2023); *English translation*: Ukr. Math. J., **74**, № 12, 1950–1960 (2023)]. О. М. Шарковський зазначає, що методи доведення основних результатів [Докл. АН СССР, **170**, № 6, 1276–1278 (1966); *English translation*: Soviet Math. Dokl., **7**, № 5, 1384–1386 (1966)] були фактично опубліковані ще в 1973 році у важкодоступній збірці статей Інституту математики АН України „Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений”, хоча і в застосуванні вже до дещо інших об'єктів, і ніколи не були перекладені англійською мовою. Авторам невідомі аналогічні результати такого роду. Враховуючи таку історію та важливість підходу (на основі марковських розбиттів і топологічних ланцюгів Маркова), для опису побудови атракторів доцільно ці результати по-новому опублікувати.

1. Динамічні системи на компактах. Розглянемо спочатку деякі властивості динамічних систем на довільному компакт X , які породжуються неперервним відображенням $f : X \rightarrow X$. Асимптотична поведінка траєкторії визначається так званою ω -граничною множиною, або, по-іншому, атрактором траєкторії; атрактор будемо позначати A .

Термін „атрактор траєкторії” було запропоновано О. М. Шарковським у його книзі [7].

Основна властивість, яка характеризує динамічну систему на атракторі, — це його динамічна зв'язність, сутність якої розкривається у наступних твердженнях.

¹ Відповідальний за листування, e-mail: milabon1012@gmail.com.

Теорема 1.1 [7, 8]. Нехай A — аттрактор траєкторії. Відображення $f: X \rightarrow X$ на A має таку властивість: якщо $U \subset A$, $U \neq A$ і U є відкритою в A , то замикання $f(U)$ не міститься в U .

У цьому сенсі на будь-якому аттракторі траєкторії спостерігається „відсутність стискання”.

Ця властивість динамічної зв’язності є не тільки необхідною, а й достатньою (!!): якщо на деякій замкненій множині $M \subset X$ задано відображення, яке має вищевказану властивість „відсутності стискання”, то завжди є можливість продовжити це відображення на замкнену множину $M' \supseteq M$ таким чином, що множина M буде аттрактором для динамічної системи на M' . Дану властивість було доведено в [7, с. 42–44] та [8].

Розглянемо ряд наслідків цієї теореми.

Наслідок 1.1. Якщо $U \subset A$ і $f(U) = U$, то U не може бути одночасно відкритою та замкнутою в A .

Наслідок 1.2. Якщо A скінченна, то точки множини A утворюють цикл.

Справді, якщо A є скінченною і $f(A) = A$, то A містить хоча б один цикл (або нерухому точку). Точки цього циклу утворюють відкрито-замкнену множину в A , і, як наслідок, цей цикл містить всі точки множини A .

Наслідок 1.3. Якщо множина A є нескінченною, то кожна точка циклу, який належить A (якщо такий існує), повинна бути граничною для точок множини A .

Це безпосередньо випливає з наслідку 1.1. Якщо мова йде про точки циклу з періодом n , то потрібно розглянути відображення f^n .

Існують і менш тривіальні наслідки теореми 1.1.

Наслідок 1.4. Якщо A не є циклом, то будь-яка відкрита в A нульвимірна множина (якщо така існує) містить хоча б одну точку, яка не належить жодному циклу.

Зауважимо, що у випадку, коли аттрактор A містить відкрити в X підмножину, існує точка $x' \in A$, для якої $A_{x'} = A$, оскільки за вказаних умов для будь-якої точки x має існувати номер i_x такий, що $f^{i_x}x \in A$ для $i > i_x$. Тому, якщо X є відрізком прямої, наслідок 1.4 можна уточнити: якщо множина A на відрізку відрізняється від циклу, то на A мають бути скрізь щільними точки, які не належать циклам. (Справді, якщо множина A є ніде не щільною на відрізку, то це твердження випливає з наслідку 1.4. Якщо ж A містить інтервал, то існує точка $x \in A$, для якої $A_x = A$, і в цьому випадку точки $f^i x$, $i = 0, 1, 2, \dots$, розташовані в A скрізь щільно.)

Наслідок 1.5. Якщо існує точка $x' \in A$, для якої $A_{x'} = A$, і замкнена множина $F \subset A$ є такою, що $fF = F$, то для будь-якої відкритої в A множини U , $U \cap F = \emptyset$, має існувати точка $x \in \overline{U}$, для якої $f^i x \in A \setminus U$ при $i > 0$.

Зазначимо, що за умови виконання припущень цього наслідку на множині A будуть скрізь щільними точки x , для яких $A_x \neq A$.

Повне доведення теореми 1.1, а також більш повний набір її наслідків містяться у [7, 8].

2. Аттрактори траєкторій розтягуючих динамічних систем на багатовидах. Розглянемо так звані розтягуючі динамічні системи, для яких є можливість отримати низку цікавих результатів саме внаслідок умови розтягування.

Нехай M є компактним диференційовним багатовидом класу C^r , $r \geq 1$, а $f: M \rightarrow M$ — розтягуючим ендоморфізмом, тобто відображенням класу C^1 , для якого при деяких $c > 0$ та

$\lambda > 1$ у деякій метриці Рімана на M виконується нерівність

$$\|Df^m v\| \geq c\lambda^m \|v\| \quad \text{для всіх } m > 0 \quad \text{і} \quad v \in TM,$$

де TM — дотичне розшарування багатовиду M (внаслідок умови компактності M визначення розтягуючого ендоморфізму не залежить від вибору ріманової метрики).

Серед усіх атракторів траєкторій можна вирізнити максимальні та локально максимальні. Атрактор A називається максимальним, якщо не існує атракторів $\tilde{A} \supset A$ (тобто більших за A), і локально максимальним, якщо існує окіл A , в якому немає атракторів $\tilde{A} \supset A$.

В системах із складною динамікою в якості найпростішого прикладу атрактора, який не є ані максимальним, ані локально максимальним, можна розглянути гомоклінічну траєкторію разом із циклом, до якого ця траєкторія прямує.

Далі будемо розглядати такі об'єкти:

$\mathcal{A}(f) = \{A\}$ — множина всіх атракторів f ; у цій роботі в якості атракторів розглядаються ω -граничні множини.

$\mathcal{A}'(f)$ — множина локально максимальних атракторів f , при цьому $\mathcal{A}'(f) \subset \mathcal{A}(f)$.

Наступна теорема дає можливість отримати апроксимацію будь-якого атрактора за допомогою локально максимального.

Теорема 2.1. *Нехай $f: M \rightarrow M$ — розтягуючий ендоморфізм. Тоді для будь-яких атрактора $A \in \mathcal{A}(f)$ та околу $U \supset A$ знайдеться локально максимальний атрактор $A' \in \mathcal{A}'(f)$ такий, що $U \supset A' \supset A$.*

Нехай G є орієнтовним графом із скінченною множиною вершин $\{1, 2, \dots, N\}$ і $\mathbf{P} = \mathbf{P}[G] = (p_{ij})$ — його матриця суміжності: $p_{ij} = 1$, якщо є ребро, що прямує з вершини i у вершину j , і $p_{ij} = 0$, якщо такого ребра не існує. Послідовність $i_1, i_2, \dots, i_n$ називається шляхом графа G з i у j , якщо $i_1 = i$ і $i_n = j$. Нескінченна послідовність $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ називається нескінченним шляхом графа G , якщо $p_{i_k i_{k+1}} = 1$ для $k = 1, 2, \dots$.

Нехай $\mathcal{W}_G$ є множиною всіх нескінченних шляхів графа G , а $\mathcal{W}_N$ — простором усіх нескінченних послідовностей $\{i_k\}$ натуральних чисел з N , у якому визначено слабку топологію. Множина $\mathcal{W}_G$ є замкнутою у $\mathcal{W}_N$ й інваріантною щодо неперервного відображення зсуву, яке переводить послідовність $\{i_k\}$ у $\{i'_k\}$, де $i'_k = i_{k+1}$. Тому $\mathcal{W}_G$ можна розглядати як топологічний простір, у якому зсув, позначений як T_G , буде неперервним відображенням. У цьому випадку T_G називається топологічним ланцюгом Маркова із скінченною множиною станів G [9, 10].

Нехай (G_1, g_1) і (G_2, g_2) — динамічні системи, які визначені на топологічних просторах G_1 і G_2 відповідно за допомогою $g_1: G_1 \rightarrow G_1$ і $g_2: G_2 \rightarrow G_2$. Простір G_2 називають еквіваріантним образом G_1 , якщо існує відображення $\psi: G_1 \rightarrow G_2$, для якого $\psi g_1 = g_2 \psi$.

Наступна теорема надає інформацію про те, як влаштовані локально максимальний атрактор і динамічна система на такому атракторі.

Теорема 2.2. *Нехай $f: M \rightarrow M$ — розтягуючий ендоморфізм. Тоді будь-який локально максимальний атрактор f є еквіваріантним образом простору $\mathcal{W}_G$ деякого топологічного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів G .*

Наслідок 2.1. *У будь-якому локально максимальному атракторі розтягуючого ендоморфізму $f: M \rightarrow M$ множина періодичних точок є щільною.*

Наслідок 2.2. *У будь-якому локально максимальному атракторі розтягуючого ендоморфізму $f: M \rightarrow M$ існує щільна траєкторія.*

Доведення теореми 2.1. Розглянемо метрику Ляпунова на M , тобто метрику, в якій для розтягуючого ендоморфізму $f : M \rightarrow M$ виконується нерівність

$$\|Df v\| > \lambda \|v\|, \quad v \in TM, \quad \lambda > 1.$$

Можливість побудови ляпуновської метрики для розтягуючого ендоморфізму f доводиться аналогічно тому, як це зроблено в [11] для дифеоморфізмів Аносова.

Оскільки f є накриваючим відображенням [3], то для будь-якої точки $x \in M$ знайдеться опуклий відкритий окіл $U_x \subset M$ такий, що його повний прообраз $f^{-1}(U_x)$ складається з l компонент зв'язності, які позначають $\mathfrak{C}_i(f^{-1}(U_x))$, $i = 1, \dots, l$. Якщо неважливо, про яку компоненту йдеться, індекс i вказувати не будемо. Відкрита множина $\mathfrak{C}(f^{-1}(U_x))$ є дифеоморфною околу U_x . Будь-яку відкриту множину $U \subset \mathfrak{C}(f^{-1}(U_x))$ будемо називати оком, у якому ендоморфізм f є локальним дифеоморфізмом.

Лема 2.1. Нехай U — окіл, у якому розтягуючий ендоморфізм $f : M \rightarrow M$ є локальним дифеоморфізмом, і $S \subset U$. Тоді $\text{diam } f(S) \geq \lambda \text{diam } S$, де $\text{diam } S = \sup_{x,y \in S} d(x,y)$.

Доведення. Нехай $h_1 : [0, 1] \rightarrow U_{x_1} \supset f(S)$ — шлях, що з'єднує $f(x)$ і $f(y)$ (тобто $h_1(0) = f(x)$ і $h_1(1) = f(y)$), де $x, y \in S$ (припускаємо, що $\mathfrak{C}(f^{-1}(U_{x_1})) \supset U$), а також нехай h_1 має мінімальну довжину. Розглянемо шлях

$$h_0 = f|_{U_{x_1}}^{-1} h_1 : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{C}(f^{-1}(U_{x_1})).$$

Тоді $h_0(0) = x$, $h_0(1) = y$ і для розтягуючого ендоморфізму f маємо

$$d(f(x), f(y)) = \int_0^1 \|h_1'(t)\| dt = \int_0^1 \left\| Df|_{\mathfrak{C}(f^{-1}(U_{x_1}))}^{h_0'(t)} \right\| dt \geq \lambda \int_0^1 \|h_0'(t)\| dt \geq \lambda d(x, y).$$

Тому $\text{diam } f(S) = \sup_{x,y \in S} d(f(x), f(y)) \geq \lambda \sup_{x,y \in S} d(x, y) \geq \lambda \text{diam } S$.

Лему доведено.

Лема 2.2. Існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якої точки $x \in M$ куля $U_\delta(x)$ з центром у точці x і діаметром δ є опуклою множиною, а її повний прообраз $f^{-1}(U_\delta(x))$ складається з l компонент зв'язності $\mathfrak{C}_i(f^{-1}(U_\delta(x)))$, $i = 1, \dots, l$.

Доведення. Нехай $\delta(x)$ — максимальний діаметр кулі $U_{\delta(x)}(x)$, для якої $f^{-1}(U_{\delta(x)}(x))$ є сумою l компонент зв'язності $\mathfrak{C}(f^{-1}(U_{\delta(x)}(x)))$, а кожна з компонент є дифеоморфною $U_{\delta(x)}(x)$. Потрібно довести неперервність $\delta(x)$. Візьмемо точку $y \neq x$ таку, що $y \in U_{\delta(x)}(x)$ і $d(x, y) = \varepsilon$. Вкладення $U_{\delta(x)}(x) \subset U_{\delta(y)}(y)$ неможливе, тому що куля $U_{\delta(x)}(x)$ є максимальною. З іншого боку, $U_{\delta(y)}(y) \supset U_\gamma(y)$, де $\gamma = \delta(x) - \varepsilon$. Тому $|\delta(x) - \delta(y)| < \varepsilon$. Отже, функція $\delta(x)$ неперервна.

Оскільки $\delta(x) > 0$, за теоремою Веєрштрасса існує $\delta_1 > 0$ таке, що $\delta(x) \geq \delta_1$ для всіх $x \in M$. Далі, згідно з [12], існує $\delta_2 > 0$, для якого будь-яка куля $U_{\delta'}(x)$ з діаметром $\delta' \leq \delta_2$ буде опуклою множиною на M . Щоб завершити доведення, можна вибрати $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Зауваження 2.1. Внаслідок лем 2.1 і 2.2 для будь-якого $S \subset U_\delta(x)$ існує $y \in M$ таке, що $\mathfrak{C}(f^{-1}(S)) \subset U_\delta(y)$. Аналогічно, для будь-якого $m > 1$ маємо $\mathfrak{C}(f^{-m}(S)) \subset U_\delta(y)$. Тому за лемою 2.1 для будь-якого $m \geq 1$ отримуємо оцінку

$$\text{diam } \mathfrak{C}(f^{-m}(S)) \leq \frac{1}{\lambda^m} \text{diam } S.$$

Скінченним розбиттям багатovidу M називається скінченне покриття цього багатovidу замкненими підмножинами $\{X_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, якщо

$$\text{int } X_i \neq \emptyset \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

і

$$X_{i'} \cap X_{i''} \subset \partial X_{i'} \cap \partial X_{i''} \quad \text{для будь-яких} \quad i' \neq i'', \quad 1 \leq i', i'' \leq n,$$

де $\partial X = X \setminus \text{int } X$ — межа X .

Для багатovidу M з ендоморфізмом $f: M \rightarrow M$ скінченне розбиття $\mathcal{X} = \{X_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, називається *марковським*, якщо існує таке $m > 0$, що з умови $f^m(\text{int } X_i) \cap \text{int } X_j \neq \emptyset$ випливає $f^m(X_i) \supset X_j$.

Лема 2.3. Нехай $f: M \rightarrow M$ — розтягуючий ендоморфізм. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує марковське розбиття $\mathcal{X} = \{X_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, таке, що $\text{diam } X_i < \varepsilon$ для всіх i й об'єднання меж множин з $\mathcal{X}$ має міру нуль².

Доведення. Нехай $\{U_\beta(x_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, — скінченне покриття багатovidу M замкненими кулями $U_\beta(x_i) = \{x \mid d(x, x_i) \leq \beta\}$, де $\beta \leq \delta$ для δ з леми 2.2.

Скінченне розбиття $\mathcal{X}_\beta = \{X_\beta^j\}$, отримується з покриття $\{U_\beta(x_i)\}$, якщо в якості множин X_β^j розглянути всілякі перетини

$$\bigcap_{i \in I_j} U_\beta(x_i), \quad \text{де} \quad I_j \subset \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{і} \quad \text{int } \bigcap_{i \in I_j} U_\beta(x_i) \neq \emptyset,$$

а також множини

$$U_\beta(x_j) \setminus \bigcup_{i \neq j} U_\beta(x_i), \quad \text{де} \quad \text{int} \left(U_\beta(x_j) \setminus \bigcup_{i \neq j} U_\beta(x_i) \right) \neq \emptyset.$$

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^0 = \{X_i^0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, індукуюється розбиттям $\mathcal{X}_\beta$ і складається з усіх компонент $\mathfrak{C}(f^{-m}(X_\beta^j))$ для прообразів X_β^j щодо f^{-m} . З урахуванням зауваження 1 отримуємо оцінку

$$\text{diam } X_i^0 = \varepsilon' \leq \frac{\beta}{\lambda^m}. \quad (1)$$

Для $\mathcal{X}^0$ розтягуючий ендоморфізм $f: M \rightarrow M$ є локальним дифеоморфізмом у кожній множині $X_i^0 \in \mathcal{X}^0$.

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^1 = \{X_i^1\}$.

Нехай $m > 0$ — достатньо велике (вибір m буде вказано пізніше) і $X_{i_1}^0 \in \mathcal{X}^0$. Визначимо $X_{i_1}^1$ як

$$X_{i_1}^1 = \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_1}} X_k^0 \right) \right), \quad \text{де} \quad \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_1}} X_k^0 \right) \right) \cap X_{i_1}^0 \neq \emptyset$$

і $k \in \mathcal{K}_{i_1}$ лише за умови $f^m(\text{int } X_{i_1}^0) \cap \text{int } X_k^0 \neq \emptyset$. Обернене відображення у цьому випадку є визначеним з урахуванням вибраного $\mathcal{X}^0$.

Перебудуємо розбиття $\mathcal{X}^0 = \{X_i^0\}$, щоб отримати нове розбиття $\mathcal{X}_{i_1}^0 = \{\tilde{X}_i^0\}$. Нехай

²Міра, яка породжується рімановою метрикою багатovidу M .

$$U(X_{i_1}^1) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} X_k^0,$$

де $k \in \mathcal{K}$ лише за умови $\text{int } X_j^0 \cap X_{i_1}^1 \neq \emptyset$. Поза множиною $U(X_{i_1}^1)$ елементи розбиття $\mathcal{X}^0$ залишимо без змін (тобто $\tilde{X}_i^0 = X_i^0$, якщо $i \notin \mathcal{K}$), а для інших покладемо $\tilde{X}_{i_1}^0 = X_{i_1}^1$ і $\tilde{X}_i^0 = \overline{X_i^0 \setminus X_{i_1}^1}$. В результаті отримаємо розбиття $\mathcal{X}_{i_1}^0 = \{\tilde{X}_i^0\}$, де елемент $\tilde{X}_{i_1}^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ має таку властивість:

$$\text{якщо } f^m(\text{int } \tilde{X}_{i_1}^0) \cap \text{int } X_j^0 \neq \emptyset, \quad \text{то } f^m(\tilde{X}_{i_1}^0) \supset X_j^0.$$

Нехай $\tilde{X}_{i_2}^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ і $\tilde{X}_{i_2}^0 \neq X_{i_1}^1 = \tilde{X}_{i_1}^0$. З розбиттям $\mathcal{X}_{i_1}^0$ та елементом $\tilde{X}_{i_2}^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ будемо діяти за алгоритмом, який є аналогічним описаному вище для розбиття $\mathcal{X}^0$ та елемента $X_{i_1}^0 \in \mathcal{X}^0$. Отримаємо нове розбиття $\mathcal{X}_{i_1 i_2}^0$, до того ж елемент $X_{i_1}^1$ не буде перебудований, тому $X_{i_1}^1 \in \mathcal{X}_{i_1 i_2}^0$. Справді, припустимо, що $\text{int } X_{i_1}^1 \cap \text{int } \tilde{X}_{i_2}^1 \neq \emptyset$, де $\tilde{X}_{i_2}^1$ визначається аналогічно $X_{i_1}^1$:

$$\tilde{X}_{i_2}^1 = \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i_2}} \tilde{X}_k^0 \right) \right).$$

Тут $\tilde{X}_k^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ і $k \in \mathcal{K}_{i_2}$ лише за умови $f^m(\text{int } \tilde{X}_{i_2}^0) \cap \text{int } \tilde{X}_k^0 \neq \emptyset$. Тоді існує елемент $\tilde{X}_i^0 \in \mathcal{X}_{i_1}^0$ такий, що

$$f^m(\text{int } X_{i_1}^1) \cap \text{int } \tilde{X}_i^0 \neq \emptyset \quad \text{і} \quad f^m(\text{int } \tilde{X}_{i_2}^1) \cap \text{int } \tilde{X}_i^0 \neq \emptyset,$$

а це неможливо, оскільки у такому випадку

$$f^m(\text{int } \tilde{X}_{i_1}^0) \cap \text{int } \tilde{X}_i^0 \neq \emptyset \quad \text{і} \quad f^m(\text{int } \tilde{X}_{i_2}^0) \cap \text{int } \tilde{X}_i^0 \neq \emptyset, \quad (2)$$

що суперечить умові $\tilde{X}_{i_1}^0, \tilde{X}_{i_2}^0 \in \mathcal{X}^0$. (У зв'язній множині $\tilde{X}_{i_1}^0 \cup \tilde{X}_{i_2}^0$ розтягуючий ендоморфізм $f: M \rightarrow M$ є локальним дифеоморфізмом, тому з (2) випливає, що $\text{int } \tilde{X}_{i_1}^0 \cap \text{int } \tilde{X}_{i_2}^0 \neq \emptyset$.)

Елемент $\tilde{X}_{i_2}^1$ має таку властивість:

$$\text{якщо } f^m(\text{int } \tilde{X}_{i_2}^1) \cap \text{int } X_k^0 \neq \emptyset, \quad \text{то } f^m(\tilde{X}_{i_2}^1) \supset X_k^0.$$

Якщо продовжити процедуру перебору елементів, то за скінченне число кроків будуть вичерпані всі елементи вихідного розбиття, і в результаті отримаємо розбиття

$$\mathcal{X}^1 = \mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_n}^0 = \{X_i^1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

елементи якого мають таку властивість по відношенню до елементів $X_j^0 \in \mathcal{X}^0$:

$$\text{якщо } f^m(\text{int } X_i^1) \cap \text{int } X_j^0 \neq \emptyset, \quad \text{то } f^m(X_i^1) \supset X_j^0.$$

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^2 = \{X_i^2\}$.

Перехід від $\mathcal{X}^1$ до $\mathcal{X}^2$ здійснюється аналогічно переходу від $\mathcal{X}^0$ до $\mathcal{X}^1$. Нехай

$$f^m(X_i^1) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^0, \quad \text{де } \mathcal{K}_i \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

Оскільки при деякому $m > 0$ (яке буде вибране нижче) маємо $\text{int } X_i^1 \cap \text{int } X_i^0 \neq \emptyset$ для будь-якого $i = 1, 2, \dots, n$, можна визначити

$$X_i^2 = \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \right) \right)$$

так, що

$$\mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \right) \right) \cap \text{int } X_i^1 \neq \emptyset.$$

Сім'я $\mathcal{X}^2$ є покриттям.

Справді, нехай $x \in M$ і $x \notin X_i^2$ для $i = 1, 2, \dots, n$, де $X_i^2 \in \mathcal{X}^2$. За побудовою точка $x \in X_i^0$ для деякого $X_i^0 \in \mathcal{X}^0$. Маємо

$$f^m(x) \in f^m(X_i^0) \subset \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^0,$$

тому

$$x \in X_i^1 = \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^0 \right) \right).$$

З урахуванням визначення X_i^2 , якщо припустити, що $f^m(x) \in X_k^1$ для деякого $k \in \mathcal{K}_i$, прийдемо до суперечності, оскільки тоді $x \in X_i^2$, тому що f^m — локальний дифеоморфізм X_k^1 . Якщо ж $f^m(x) \notin X_k^1$ для всіх $k \in \mathcal{K}_i$, то існує ціле l таке, що $f^m(x) \in X_k^1$ для деякого $k \in \mathcal{K}_l$, до того ж

$$\left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \right) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_l} X_k^1 \right) \neq \emptyset \quad \text{і} \quad \text{int} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \right) \cap \text{int} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_l} X_k^1 \right) = \emptyset.$$

Відображення f^m є дифеоморфізмом у $(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1) \cup (\bigcup_{k \in \mathcal{K}_l} X_k^1)$, а множини $\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1$ і $\bigcup_{k \in \mathcal{K}_l} X_k^1$ перетинаються тільки по межі, тому за визначенням X_l^2 точка x належить X_l^2 . При цьому

$$\text{int} \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \right) \right) \cap X_i^1 \neq \emptyset.$$

Отже, $\mathcal{X}^2$ — покриття.

Покриття $\mathcal{X}^2$ є розбиттям.

Потрібно довести, що $\text{int } X_i^2 \cap \text{int } X_j^2 = \emptyset$ для $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Якщо $x \in \text{int } X_i^2 \cap \text{int } X_j^2$, то знайдеться $X_l^1 \in \mathcal{X}^1$ таке, що

$$X_l^1 \subset \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \quad \text{і} \quad X_l^1 \subset \bigcup_{k \in \mathcal{K}_j} X_k^1, \quad \text{де} \quad f^m(x) \in \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^1 \quad \text{і} \quad f^m(x) \in \bigcup_{k \in \mathcal{K}_j} X_k^1,$$

тому $l \in \mathcal{K}_i$ і $l \in \mathcal{K}_j$, а тоді

$$\text{int } X_i^1 \cap \text{int } X_j^1 = \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^0 \right) \right) \cap \mathfrak{C} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}_j} X_k^0 \right) \right) \neq \emptyset,$$

що неможливо, оскільки $i \neq j$. Отже, $\mathcal{X}^2$ — розбиття.

Розбиття $\mathcal{X}^2 = \{X_i^2\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, має таку властивість:

$$\text{якщо } f^m(\text{int } X_i^2) \cap \text{int } X_j^1 \neq \emptyset, \quad \text{то } f^m(X_i^2) \supset X_j^1.$$

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^3$, як і всі наступні розбиття у цьому ланцюзі побудов, одержуємо аналогічно.

Послідовність скінченних розбиттів $\mathcal{X}^k = \{X_i^k, i = 1, 2, \dots, n\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, яку отримуємо в результаті, має таку властивість:

$$\text{якщо } f^m(\text{int } X_i^k) \cap X_j^{k-1} \neq \emptyset, \quad \text{то } f^m(X_i^k) \supset X_j^{k-1}.$$

Розглянемо метричний простір 2^M , елементами якого є замкнені множини багатovidу M , із визначеною на ньому метрикою

$$\text{dist}(X_1, X_2) = \max \left\{ \sup_{y \in X_1} \inf_{x \in X_2} d(x, y), \sup_{y \in X_2} \inf_{x \in X_1} d(x, y) \right\} \quad \text{для } X_1, X_2 \in 2^M.$$

Простір 2^M є компактним [13] і, як наслідок, повним.

Для побудованої послідовності розбиттів $\mathcal{X}^k = \{X_i^k, i = 1, 2, \dots, n\}$ треба довести, що при кожному i послідовність $\{X_i^k, k = 0, 1, \dots\}$ є фундаментальною в метриці простору 2^M . Для цього оцінимо відстань $\text{dist}(X_i^k, X_i^{k+1})$. Враховуючи зауваження 1, маємо

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}) &:= \max_{i=1,2,\dots,n} \text{dist}(X_i^k, X_i^{k+1}) \\ &= \max_{i=1,2,\dots,n} \text{dist} \left(f^{-m} \left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} X_j^{k-1} \right), f^{-m} \left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} X_j^k \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda^m} \max_{i=1,2,\dots,n} \text{dist} \left(\bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} X_j^{k-1}, \bigcup_{j \in \mathcal{K}_i} X_j^k \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda^m} \max_{i=1,2,\dots,n} \text{dist}(X_j^{k-1}, X_j^k) = \frac{1}{\lambda^m} \Delta(\mathcal{X}^{k-1}, \mathcal{X}^k). \end{aligned}$$

З (1) випливає, що $\Delta(\mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}) \leq \frac{1}{\lambda^m} \Delta(\mathcal{X}^{k-1}, \mathcal{X}^k)$, $k = 1, 2, \dots$, і $\Delta(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^0) \leq \frac{\varepsilon'}{\lambda^m}$ за побудовою множин X_i^1 . Таким чином,

$$\Delta(\mathcal{X}^k, \mathcal{X}^{k+1}) \leq \frac{\varepsilon'}{\lambda^{m(k-1)}} \quad (3)$$

і тоді

$$\text{dist}(X_i^k, X_i^{k+l}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} \text{dist}(X_i^{k+j}, X_i^{k+j+1}) \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{\lambda^{m(k+j+1)}}. \quad (4)$$

Отже, послідовність $\{X_i^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ є фундаментальною, тому

$$X_i^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} X_i^\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При цьому множини X_i^∞ будуть замкнені.

Скінченне розбиття $\mathcal{X}^\infty = \{X_i^\infty\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для доведення того, що це розбиття, визначимо деякі поняття [13]. Точка s належить до нижньої границі послідовності множин $S_1, S_2, \dots$ (це позначається як $s \in \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$), якщо будь-який окіл точки s , починаючи з деякого n , перетинається з усіма множинами S_n . Точка s належить до верхньої границі послідовності множин $S_1, S_2, \dots$ (це позначається як $s \in \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$), якщо будь-який окіл точки s перетинається з нескінченним числом множин S_n . Послідовність множин $\{S_n\}$ називається збіжною до множини S (це позначається як $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$), якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \bigcap_{n=0}^\infty \overline{\bigcup_{k=0}^\infty S_{n+k}}$.

Топологія, яка задається збіжністю у сенсі даного означення, є еквівалентною топології, яка задається вказаною вище метрикою у просторі 2^M [13].

У розглядуваному випадку $X_i^\infty = \bigcap_{n=0}^\infty \overline{\bigcup_{k=0}^\infty X_i^{n+k}}$.

Сім'я $\mathcal{X}^\infty$ є покриттям.

Справді, нехай існує точка $x \in M$, для якої $x \notin X_i^\infty$ при всіх i . Позначимо

$$\tilde{X}_i^q = \bigcup_{k=0}^\infty X_i^{q+k}.$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ знайдеться таке q_i , що $x \notin \tilde{X}_i^{q_i}$. Тоді $x \notin X_i^j$ при будь-якому $j \geq q_i$. Нехай $Q = \max_{i=1,2,\dots,n} q_i$. Тоді $x \notin X_i^Q$ при будь-якому i , що неможливо, оскільки $\{X_i^Q\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, — розбиття.

Покриття $\mathcal{X}^\infty$ є розбиттям.

Якщо це не так, то існують елементи $X_i^\infty, X_j^\infty \in \mathcal{X}^\infty$ такі, що $\text{int } X_i^\infty \cap \text{int } X_j^\infty \neq \emptyset$. Відкриту кулю з діаметром ε позначимо U_ε і зауважимо, що існує $U_\varepsilon \subset \text{int } X_i^\infty \cap \text{int } X_j^\infty$. Оскільки

$$\text{int } X_i^\infty = \text{int } \bigcap_{q=0}^\infty \tilde{X}_i^q \quad \text{і} \quad \tilde{X}_i^{q+1} \subset \tilde{X}_i^q,$$

маємо

$$\text{int } \bigcap_{q=0}^\infty \tilde{X}_i^q \subset \bigcap_{q=0}^\infty \text{int } \tilde{X}_i^{q+1}.$$

Отже,

$$U_\varepsilon \subset \bigcap_{q=0}^\infty \text{int } \tilde{X}_i^{q+1},$$

тобто $U_\varepsilon \subset \text{int } \tilde{X}_i^q$ для кожного $q = 1, 2, \dots$. Так само маємо $U_\varepsilon \subset \text{int } \tilde{X}_j^q$ для кожного $q = 1, 2, \dots$.

Далі, існує $q_1 > 0$ таке, що $\Delta(\mathcal{X}^{q+1}, \mathcal{X}^q) < \varepsilon$ для будь-якого $q > q_1$. Тоді знайдеться куля $U_{\varepsilon_1} \subset U_\varepsilon$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, така, що $U_{\varepsilon_1} \subset X_i^q$ для кожного $q > q_1$.

Аналогічні міркування щодо $U_{\varepsilon_1} \subset \tilde{X}_j^k$ дають можливість дійти висновку, що існує куля $U_{\varepsilon_2} \subset U_{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, така, що $U_{\varepsilon_2} \subset X_j^q$ для кожного $q > q_2$.

Отже, для кожного $q > \max(q_1, q_2)$ є куля U_{ε_3} така, що $U_{\varepsilon_3} \subset X_i^q$ і $U_{\varepsilon_3} \subset X_j^q$, але це неможливо, якщо X_i^q і X_j^q є різними елементами розбиття $\mathcal{X}^q$.

Розбиття $\mathcal{X}^\infty$ є марковським.

З визначення $\mathcal{X}^l$ випливає, що кожне $X_i^l \in \mathcal{X}^l$ можна подати у вигляді

$$f^m(X_i^l) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^{l-1}.$$

Переходячи до границі, маємо

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^m(X_i^l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^{l-1}.$$

З урахуванням властивостей такої границі [13], із неперервності $f^m : 2^M \rightarrow 2^M$ випливає, що

$$f^m(X_i^\infty) = f^m\left(\lim_{l \rightarrow \infty} X_i^l\right) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} \lim_{l \rightarrow \infty} X_k^{l-1} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_i} X_k^\infty.$$

Оцінімо величину $\text{diam } X_i^\infty$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Маємо $X_i^k \subset U_d(X_i^{k-1})$, де $U_d(X_i^{k-1})$ — d -окіл множини X_i^{k-1} для $d = \text{dist}(X_i^k, X_i^{k-1})$, тобто

$$U_d(X_i^{k-1}) = \bigcup_{x \in X_i^{k-1}} U_d(x),$$

де $U_d(x)$ — відкрита куля з радіусом d й центром у x . Аналогічно $X_i^{k-1} \subset U_d(X_i^k)$.

Таким чином,

$$\text{diam } X_i^k \leq \text{diam } X_i^{k-1} + 2d \quad \text{і} \quad \text{diam } X_i^{k-1} \leq \text{diam } X_i^k + 2d,$$

або

$$\text{diam } X_i^{k-1} - 2d \leq \text{diam } X_i^k \leq \text{diam } X_i^{k-1} + 2d.$$

Відповідно до (3), (4),

$$\varepsilon' - 2\varepsilon' \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{\lambda^m}\right)^j \leq \text{diam } X_i^k \leq \varepsilon' + 2\varepsilon' \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{\lambda^m}\right)^j,$$

і в граничному випадку отримуємо

$$\varepsilon' - 2\varepsilon' \frac{1}{\lambda^m - 1} \leq \text{diam } X_i^\infty \leq \varepsilon' + 2\varepsilon' \frac{1}{\lambda^m - 1}. \quad (5)$$

Якщо вибрати m достатньо великим, можна зробити $\text{diam } X_i^\infty$ як завгодно близьким до ε' ; при цьому мається на увазі, що $\varepsilon' < \varepsilon$.

Доведемо, що

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n \partial X_i^\infty\right) = 0,$$

де $\mu(E) = \int_E g_{ij} dx_i \wedge dx_j$ — міра, породжена рімановою метрикою g_{ij} багатовиду M . Міра μ є неперервним відображенням простору 2^M в R^1 . При цьому $\mu(\partial X_i^k) = 0$ для будь-яких $i = 1, 2, \dots, n$ і $k = 1, 2, \dots$. Внаслідок неперервності μ на 2^M маємо

$$\mu(\partial X_i^\infty) = \mu(\lim_{k \rightarrow \infty} \partial X_i^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\partial X_i^k) = 0.$$

Лему доведено.

Зауваження 2.2. Відомий стандартний процес переходу від марковського розбиття $\mathcal{X}^\infty = \{X_i^\infty\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, з числом $m > 1$ до марковського розбиття $\mathcal{X} = \{X_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, з числом $m = 1$. Кожна множина має вигляд

$$X_j = X_{i_1}^\infty \cap f(X_{i_2}^\infty) \cap f^2(X_{i_3}^\infty) \cap \dots \cap f^{m-1}(X_{i_m}^\infty),$$

де індекси $i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$ повинні бути такими, що $\text{int } X_j \neq \emptyset$. Тоді

$$f(X_j) = f(X_{i_1}^\infty) \cap f^2(X_{i_2}^\infty) \cap \dots \cap f^{m-1}(X_{i_{m-1}}^\infty) \cap f^m(X_{i_m}^\infty),$$

і якщо використати формулу

$$f^m(X_{i_m}^\infty) = \bigcup_{i_k \in \mathcal{K}_{i_m}} X_{i_k}^\infty,$$

то

$$f(X_j) = \bigcup_{i_k \in \mathcal{K}_{i_m}} \left(X_{i_k}^\infty \cap f(X_{i_1}^\infty) \cap f^2(X_{i_2}^\infty) \cap \dots \cap f^{m-1}(X_{i_{m-1}}^\infty) \right),$$

де $\mathcal{K}_{i_m}$ — скінченна множина індексів.

Зауваження 2.3. Розглянемо простір $\mathfrak{X}$ скінченних розбиттів $\mathcal{X}_\mu = \{X_k^{(\mu)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, з однаковою кількістю елементів. У просторі $\mathfrak{X}$ визначимо метрику

$$\Delta(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \max_{i=1,2,\dots,n} \text{dist}(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}).$$

З оцінки (5) випливає, що $\mathcal{X}^\infty \in \mathfrak{X}$ неперервно залежить від вибору $\mathcal{X}^0 \in \mathfrak{X}$.

Нехай A — атрактор розтягуючого ендоморфізму $f: M \rightarrow M$, а U — окіл множини A . За лемою 2.3 існує марковське розбиття $\mathcal{X} = \{U_1, \dots, U_n\}$ з такою властивістю: якщо $U_i \cap A \neq \emptyset$, то $U_i \subset U$. Існує точка $x_1 \in M$, для якої $A_{x_1} = A$ (тут і далі через A_x позначено атрактор траєкторії точки x). Нехай $\mathcal{X}_U = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_m}\}$, де $U_{i_j} \in \mathcal{X}_U$, якщо існує (ціле) $t_j > 0$ таке, що $f^{t_j}(x_1) \in U_{i_j}$ і $U_{i_j} \cap A \neq \emptyset$. Також для кожної точки $y \in A$ знайдеться множина $U_{i_j} \in \mathcal{X}_U$ така, що $y \in U_{i_j}$. Нехай $\Theta(x_1) = \{f^p(x_1), f^{p+1}(x_1), \dots, f^{p+q}(x_1)\}$ — скінченний відрізок траєкторії точки x_1 . Виберемо його настільки великим, що якщо $y \in A$ і $y \in \text{int } U_{i_j}$, то існує $t_j < q$ таке, що $f^{p+t_j}(x_1) \in \text{int } U_{i_j}$, а якщо $y \in \partial U_{i_j}$, то існує $t_{j'} < q$ таке, що $f^{p+t_{j'}}(x_1) \in U_{i_{j'}}$. Відрізок $\Theta(x_1)$ можна вибрати так, щоб $f^p(x_1) \in U_{i_1}$ і $f^{p+q}(x_1) \in U_{i_1}$.

Розглянемо скінченний впорядкований набір множин $U_{i'_0}, U_{i'_1}, \dots, U_{i'_q}$ із властивостями

$$f^p(x_1) \in U_{i'_0}, \quad f^{p+1}(x_1) \in U_{i'_1}, \quad \dots, \quad f^{p+q}(x_1) \in U_{i'_q} = U_{i'_0},$$

де $U_{i'_k} \in \mathcal{X}_U$, і в цьому наборі зустрічаються всі множини з $\mathcal{X}_U$. Нехай для i'_{k_1} виконується умова

$$f^{p+k_1-j}(x_1) \cap \text{int } U_{i'_{k_1-j}} \neq \emptyset \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \dots, k_1 \quad \text{і} \quad f^{p+k_1}(x_1) \cap \text{int } U_{i'_{k_1}} = \emptyset.$$

Тоді точка $f^{p+k_1}(x_1)$ належить межі множини $U_{i_{j_1}}$.

Позначимо $d_1 = \max_{j=0,\dots,k_1-1} d(f^{p+j}(x_1), \partial U_{i'_{j'}})$.

Множина $\{x \in M \mid A_x = A\}$ є щільною в M .

Справді, нехай $V \subset M$ є відкритою. За умови розтягування для будь-якої точки $y_1 \in M$ такої, що $A_{y_1} = A$, існує $m > 0$, для якого $f^m(V) \ni y_1$. Тому знайдеться точка $x \in V$, для якої

$f^m(x) = y_1$, і тоді $A_x = A$. Далі, знайдеться точка x_2 така, що $d(x_2, x_1) \leq \frac{d_1}{\lambda^{p+k_1}}$ і $A_{x_2} = A$, до того ж точку x_2 можна вибрати так, що $f^{p+j}(x_2) \in \text{int } U_{i_j}$, $j = 0, 1, \dots, k_1$. Тому відрізок траєкторії $\Theta(x_2)$ буде належати до внутрішніх частин перших k_1 множин $U_{i'_1}, U_{i'_2}, \dots, U_{i'_{k_1}}$. Серед решти, можливо, будуть множини $U_{i'_j}$, $j > k_1$, до яких $\Theta(x_2)$ не потрапить. Ці множини поки що вилучимо із розгляду і отримаємо новий набір множин $\mathcal{X}_U^{(2)} = \{U_{i'_j}^{(2)}\} \subset \mathcal{X}$. Для $\mathcal{X}_U^{(2)}$ аналогічно отримаємо точку x_3 та новий набір $\mathcal{X}_U^{(3)}$ такі, що $f^{p+k}(x_3) \in \text{int } U_{i_j}^{(3)}$ для $j \leq k_2$. За скінченне число кроків прийдемо до розбиття $\tilde{\mathcal{X}}_U = \{\tilde{U}_{i_1}, \dots, \tilde{U}_{i_l}\}$, для якого існує точка $\tilde{x} \in M$ така, що $A_{\tilde{x}} = A$ і $f^{p+j}(\tilde{x}) \in \text{int } \tilde{U}_{i_j}$ для $j = 1, 2, \dots, l$.

У процесі побудови могли бути вилучені множини $U_{i_j} \in \mathcal{X}_U$, які мають точку з A на своїй межі, але не всередині. Нехай $U_{i_{j_1}}$ — вилучена множина. Існує така точка x_{j_1} , що $f^m(x_{j_1}) \in \text{int } U_{i_{j_1}}$ при деякому $m \geq 0$, до того ж $A_{x_{j_1}} = A$. Марковське розбиття $\mathcal{X}$ можна вибрати так, щоб існував елемент $\tilde{U} \in \mathcal{X}_U$, який містить деяку точку $y \in A$, і при цьому $y \in \text{int } \tilde{U}$. Справді, вихідне розбиття $\mathcal{X}^0$ можна вибрати так, щоб процедура із зауваження 2.2 приводила до розбиття $\mathcal{X}_0$, для якого $y \in \text{int } X$, де $X \in \mathcal{X}_0$. Розбиття $\mathcal{X}^\infty$ неперервно залежить від $\mathcal{X}^0$, тому $\mathcal{X}$ теж неперервно залежить від $\mathcal{X}_0$, так що можна вважати, що в марковському розбитті $\mathcal{X}$ є елемент $\tilde{U}$ такий, що $y \in \text{int } \tilde{U}$. З умов $y \in A$ і $y \in \text{int } \tilde{U}$ випливає, що відрізок траєкторії точки x_{j_1} також пройде через $\text{int } \tilde{U}$, оскільки множина $\text{int } \tilde{U}$ є відкритою.

Таким чином, будь-які дві множини з $\mathcal{X}_U$ можна зв'язати скінченним відрізком траєкторії так, щоб ця траєкторія проходила по внутрішніх частинах множин $U_j \in \mathcal{X}_U$.

Розбиття $\mathcal{X}_U$ назовемо марковським розбиттям для атрактора A в околі U .

Нехай $G = G(\mathcal{X}_U)$ — скінченний орієнтовний граф з вершинами, які задані елементами множини $\mathcal{X}_U$, за припущення, що для $U_i, U_j \in \mathcal{X}_U$ ребро (U_i, U_j) існує тоді й лише тоді, коли $f(U_i) \supset U_j$.

Лема 2.4. Граф $G = G(\mathcal{X}_U)$ є зв'язним.

Доведення. Зв'язність графа $G = G(\mathcal{X}_U)$ випливає з того, що будь-які дві множини $U_{i'}, U_{i''} \in \mathcal{X}_U$ можна зв'язати скінченними відрізками траєкторій, які проходять через внутрішні частини множин $U_i \in \mathcal{X}_U$.

Лема 2.5. Якщо граф G є зв'язним, то періодичні точки його марковського ланцюга T_G щільні у просторі $\mathcal{W}_G$ всіх нескінченних шляхів графа.

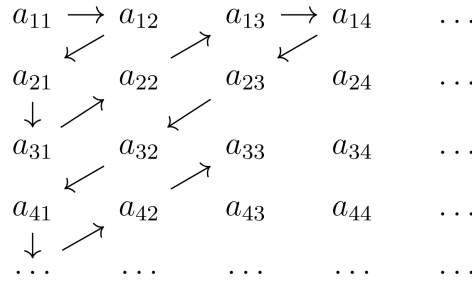
Доведення. Розглянемо точку $(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \in \mathcal{W}_G$ і послідовність

$$x_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\},$$

де замість крапок між i_n і i_1 кожен раз вписується один і той самий шлях, що йде з i_n до i_1 , який існує через те, що G є зв'язним. Зазначена послідовність є періодичною точкою марковського ланцюга T_G . При цьому n можна вибирати як завгодно великим, і тоді $x_n \rightarrow x$, що доводить лему.

Лема 2.6. Якщо граф G є зв'язним, то його марковський ланцюг T_G має скрізь щільну траєкторію.

Доведення. За лемою 2.5 достатньо побудувати траєкторію, яка є щільною на замиканні множини періодичних точок марковського ланцюга T_G . Багатовид M є компактним, тому марковський ланцюг має зліченну кількість періодичних точок. Занумеруємо їх натуральними числами і складемо з них таку таблицю:



У цій таблиці k -й рядок відповідає k -й періодичній точці $(i_1, i_2, \dots, i_{n_k}, i_1, i_2, \dots, i_{n_k}, \dots)$. Елемент a_{kl} позначає шлях $a_{kl} = (i_1, \dots, i_{n_k}, i_1, \dots, i_{n_k}, \dots, i_1, \dots, i_{n_k})$, в якому послідовність $i_1, i_2, \dots, i_{n_k}$ повторюється l разів. Відповідно до стрілок в таблиці складемо шлях

$$(a_{11} b_1 a_{12} b_2 a_{21} b_3 a_{31} b_4 a_{22} b_5 a_{13} b_6 \dots), \quad (6)$$

де b_n — шлях, що з'єднує останню вершину шляху a_{ij} зліва від b_n з першою вершиною шляху $a_{i'j'}$ справа від b_n ; шлях b_n існує внаслідок зв'язності G . Шлях (6) містить як завгодно великий відрізок будь-якої періодичної траєкторії, тому відповідна цьому шляху (6) траєкторія буде скрізь щільною у $\mathcal{W}_G$.

Розглянемо множину

$$\tilde{A} = \{x \mid x \in \mathcal{X}'_U, f^m(x) \in \mathcal{X}'_U \text{ для кожного } m > 0\},$$

де

$$\mathcal{X}'_U = \{U'_{i_1}, \dots, U'_{i_m}\}, \quad U'_{i_j} = \left(\text{int} \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \right) \cap U_{i_j}, \quad U_{i_l} \in \mathcal{X}_U.$$

Кожному нескінченному шляху $(i_1, i_2, \dots)$ графа $G = G(\mathcal{X}_U)$ відповідає єдина точка $x \in \tilde{A}$ така, що

$$x = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))},$$

де $\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))$ — компонента зв'язності повного прообразу $f^{-m}(U_{i_m})$, для якої

$$\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m})) \cap U_{i_1} \neq \emptyset.$$

Те, що $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))}$ складається з однієї точки, випливає із зауваження 2.1.

Таким чином, ми отримали відображення $\psi: \mathcal{W}_G \rightarrow \tilde{A}$ таке, що $\psi(\mathcal{W}_G) = \tilde{A}$ і $\psi(i_1, i_2, \dots) = x$. При цьому ψ є неперервним. Справді, нехай

$$x_n = (i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots) \quad \text{і} \quad y_n = (i_1, i_2, \dots, i'_n, i'_{n+1}, \dots)$$

є близькими точками простору $\mathcal{W}_G$. Тоді $\psi(x_n), \psi(y_n) \in \bigcap_{m=1}^n \mathfrak{C}(f^{-m}(U_{i_m}))$ і неперервність ψ також випливає із зауваження 2.1.

У підсумку $\tilde{A}$ — інваріантна замкнена множина, $\tilde{A} \supset A$ і $\tilde{A}$ — еквіваріантний образ простору $\mathcal{W}_G$ топологічного марковського ланцюга T_G зі скінченною кількістю станів G . Граф G є зв'язним, тому (за лемою 2.6) на множині $\tilde{A}$ існує скрізь щільна траєкторія. Отже, $\tilde{A}$ є

атрактором. З побудови видно, що множина $\tilde{A}$ в околі $\text{int } \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ є локально максимальним аттрактором, який містить A .

Теорему доведено.

Доведення теореми 2.2 повторює доведення теореми 2.1, але потрібно виходити з того, що A є локально максимальним аттрактором.

Доведення наслідків 2.1 і 2.2 випливає з лем 2.5, 2.6 і теореми 2.2.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. Я. Г. Синай, *Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы*, Функц. анализ и его прил., **2**, № 1, 64–89 (1968); **English translation**: Funct. Anal. Appl., **2**, № 1, 61–82 (1968).
2. Я. Г. Синай, *Построение марковских разбиений*, Функц. анализ и его прил., **2**, № 3, 70–80 (1968); **English translation**: Funct. Anal. Appl., **2**, № 3, 245–253 (1968).
3. M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Amer. J. Math., **91**, № 1, 175–200 (1969).
4. О. М. Шарковський, *Дескриптивна теорія детермінованого хаосу*, Укр. мат. журн., **74**, № 12, 1709–1718 (2023); **English translation**: Ukr. Math. J., **74**, № 12, 1950–1960 (2023).
5. А. Н. Шарковский, *Частично упорядоченная система притягивающих множеств*, Докл. АН СССР, **170**, № 6, 1276–1278 (1966); **English translation**: Soviet Math. Dokl., **7**, № 5, 1384–1386 (1966).
6. А. Н. Шарковский, В. С. Бондарчук, *О частично упорядоченной системе ω -предельных множеств растягивающих эндоморфизмов*, Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, Институт математики АН УССР, 128–164 (1973).
7. А. Н. Шарковский, *Аттракторы траекторий и их бассейны*, Наук. думка, Киев (2013).
8. А. Н. Шарковский, *Об ω -предельных множествах дискретных динамических систем*, Дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Киев (1966).
9. В. М. Алексеев, *Квазислучайные динамические системы*, Мат. сб., **76(118)**, № 1, 72–134 (1968); **English translation**: Math. USSR-Sb., **5**, № 1, 73–128 (1968).
10. В. М. Алексеев, *Перроновские множества и топологические цепи Маркова*, Укр. мат. журн., **24**, № 5, 227–228 (1969).
11. Д. Б. Каток, *Динамические системы с гиперболической структурой*, Девятая летняя математическая школа, Институт математики АН УССР, 125–212 (1972).
12. Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, Москва (1971); **translation from German**: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer (1968).
13. К. Куратовский, *Топология*, т. 1, 2, Мир, Москва (1966–1969); **translation from English**: K. Kuratowski, Topology, Vols. 1, 2, Academic Press (1968).

Одержано 09.11.23