УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Наилучшие приближения классов функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности

Данная статья посвящена точному решению задач наилучшего приближения в равномерной и интегральной метриках классов периодических функций, представимых в виде свертки не увеличивающего осцилляцию ядра с функциями, имеющими заданную выпуклую вверх мажоранту модуля непрерывности. В качестве аппроксимирующих множеств используются тригонометрические полиномы в случае равномерной и интегральной метрик и свертки задающего класс ядра с полиномиальными сплайнами в случае интегральной метрики.

Дана стаття присвячена точному розв'язанню задач найкращого наближення у рівномірній та інтегральній метриках класів періодичних функцій, зображених у вигляді згортки ядра, що не збільшує осциляцію, з функціями, які мають задану опуклу догори мажоранту модуля неперервності. Як апроксимуючі множини використовуються тригонометричні поліноми у випадку рівномірної та інтегральної метрик, а також згортки ядра, яке задає клас, з поліноміальними сплайнами у випадку інтегральної метрики.

1. Обозначения и определения. Пусть C и L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — пространства 2π-периодических функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_p}=\|\cdot\|_p$. Если $M\subset\mathbb{Z}$ — конечное центрально-симметричное множество, то через $\mathfrak{N}^T(M)$ обозначим совокупность тригонометрических полиномов вида

$$T(x)=\sum_{m\in M}c_m e^{imx},\quad c_m\in\mathbb{C},\quad c_{-m}=\overline{c}_m$$

(если $M=\varnothing$, то $T\equiv 0$); $\mathfrak{N}^T_{2n-1}=\mathfrak{N}^T(\{-(n-1),\dots,-1,0,1,\dots,n-1\})$, $n\in\mathbb{N}$, — множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$.

Как обычно, свертку $K*\varphi$ функций $K\in L_1$ (ядра свертки) и $\varphi\in L_1$ определим равенством

$$(K*\varphi)(x)=\int_0^{2\pi}K(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Для ядра K положим

$$M(K)=\left\{m\in\mathbb{Z}:\int_0^{2\pi}K(t)\,e^{-imt}dt=0\right\},$$

и будем предполагать, что множество $M(K)$ конечно или пусто. Пусть также $\mu=\mu(K)=1$, если $0\in M(K)$, и $\mu=\mu(K)=0$ — в противном случае.

Если заданы ядро K и множество $F\subset L_1$, то через $K*F$ обозначим класс функций вида $f=T+K*\varphi$, где $T\in\mathfrak{N}^T(M(K))$, $\varphi\in F$, $\varphi\perp\mathfrak{N}^T(M(K))$.

Обозначим через $\omega(f,t)$ модуль непрерывности функции $f\in C$. Если $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, то

$$H^\omega:=\{f\in C:\omega(f;\cdot)\leqslant\omega(\cdot)\}.$$

Будем рассматривать задачи приближения классов типа $K*H^\omega$ тригонометрическими полиномами из $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$, а также функциями из множества $K*\mathfrak{N}^s_{2n,r}$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, где $\mathfrak{N}^s_{2n,r}$ — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами $l\pi/n$, $l\in\mathbb{Z}$.

© В. Ф. БАБЕНКО, 1992

Отмѐтим, что если $K(x) = B_r(x) = \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos(mx - \pi r/2)$, $r \in \mathbb{N}$,— ядро Бернулли, то класс $K*H^{\omega}$ — это стандартный для теории приближений класс $W^r H^{\omega}$ функций f, имеющих заданную мажоранту $\omega(t)$ модулей непрерывности r-х производных (см., например, [1], § 7.2).

Пусть $\nu(g)$ — число перемен знака на периоде у функции g. Через CVD обозначим совокупность непрерывных на $(0,2\pi)$ ядер K, не увеличивающих число перемен знака, т. е. таких, что $\nu(a\mu + K*\varphi) \leqslant \nu(\varphi)$ для любых $a \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C$, $\varphi \perp \mu(K)$. Более общо, через $CVD[\Delta]$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, обозначим совокупность непрерывных на $(0,2\pi)$ ядер K таких, что для любого $\varphi \in C$, $\varphi \perp \mathfrak{N}^T(M(K))$, и любого $T \in \mathfrak{N}^T(M(K))$ из наличия у функций $T + K*\varphi$ нулей в каждом интервале длины Δ следует $\nu(T + K*\varphi) \leqslant \nu(\varphi)$.

CVD и $CVD[\Delta]$ — это весьма широкие и важные совокупности ядер. Очевидно, что $B_r \in CVD$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Если $\mathcal{P}$ — алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами, $\mathcal{P}(d/dx)$ — соответствующий дифференциальный оператор и

$$B(\mathcal{P}; x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{imx}/\mathcal{P}(im)$$

(суммирование в Σ' ведется по таким m, что $\mathcal{P}(im) \neq 0$), то класс $W(\mathcal{P}; H^{\omega}) := \{f \in C : \mathcal{P}(d/dx) f \in H^{\omega}\}$ имеет вид $B(\mathcal{P}, \cdot)*H^{\omega}$. При этом если $\mathcal{P}$ имеет только вещественные корни, то $B(\mathcal{P}; \cdot) \in CVD$. Если же $\mathcal{P}$ имеет и комплексные корни, то $B(\mathcal{P}; \cdot) \in CVD[\Delta]$ при всех достаточно малых $\Delta \in (0, 2\pi]$. Отметим еще, что любое CVD-ядро является также $CVD[\Delta]$-ядром при любом $\Delta \in (0, 2\pi]$. Подробную теорию CVD-ядер можно найти в [2].

Пусть X есть C или L_p. Для $f \in X$, $\mathfrak{N} \subset X$ положим

$$E(f, \mathfrak{N})_X = \inf\{\|f - u\|_X : u \in \mathfrak{N}\}.$$

Пусть также

$$E(K*F, \mathfrak{N})_X = \sup\{E(f, \mathfrak{N})_X : f \in K*F\}.$$

Введенные величины — это наилучшие приближения функции f и класса $K*F$ множеством $\mathfrak{N}$ в метрике пространства X.

Далее, для $f \in L_p$ и чисел $\alpha, \beta > 0$ положим

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p,$$

где, как обычно, $f_{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$ Если $\mathfrak{N} \subset L_p$, то

$$E(f, \mathfrak{N})_{p;\alpha,\beta} := \inf\{\|f - u\|_{p;\alpha,\beta} : u \in \mathfrak{N}\} \tag{1}$$

— наилучшее (α, β)-приближение функции f множеством $\mathfrak{N}$ в пространстве L_p. Если K и F таковы, что $K*F \subset L_p$, то

$$E(K*F, \mathfrak{N})_{p;\alpha,\beta} := \sup\{E(f, \mathfrak{N})_{p;\alpha,\beta} : f \in K*F\} \tag{2}$$

— наилучшее (α, β)-приближение класса $K*F$ множеством $\mathfrak{N}$ в пространстве L_p. Полагая в (1) и (2) $\alpha = \beta = 1$, получаем обычные наилучшие приближения $E(f, \mathfrak{N})_{L_p} = E(f, \mathfrak{N})_p$ функции f и $E(K*F, \mathfrak{N})_{L_p} = E(K*F, \mathfrak{N})_p$ класса $K*F$. Если $p < \infty$, то устремляя в (1) и (2) α или β к $+\infty$, получаем [3] (см. также [4], теорема 1.4.10) наилучшие приближения сверху (если $\alpha \to +\infty$) и снизу (если $\beta \to +\infty$) функции f и класса $K*F$ (ниже это соответственно $(\infty, 1)$- и $(1, \infty)$-приближения).

2. Наилучшие равномерные приближения классов $K*H^{\omega}$ тригонометрическими полиномами. Пусть $\varphi_n(x) = \operatorname{sgn} \sin nx$, $\psi_n(x) = \dfrac{1}{4n} \varphi_n(x)$ и $G_n(x) = (K(-\cdot)*\psi_n)(x)$. Функция G_n

имеет период $2\pi/n$, $G_n(t+\pi/n) = -G_n(t)$, и если $K \in CVD[\Delta]$, а $n \geqslant 2\pi/\Delta$ и таково, что $\mathfrak{N}^T(M(K)) \subset \mathfrak{N}^T_{2n-1}$, то найдутся точки $a < b < a + \pi/n$ такие, что $G_n(a) = 0$, $G_n(t) > 0$ для $t \in (a, a+\pi/n)$ и $G_n(t)$ строго возрастает на (a, b) и строго убывает на $(b, a+\pi/n)$. Равенством $G_n(x) = G_n(\rho(x))$, $x \in (a, b)$, определим функцию $\rho(x)$, принимающую значения в $(b, a+\pi/n)$, и пусть $\rho^{-1}(x)$ — обратная к $\rho(x)$ функция. Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то положим $f_0(x) = -\int\limits_x^b \omega'(\rho(t)-t)\,dt$, если $a \leqslant x \leqslant b$, и $f_0(x) = \int\limits_b^x \omega'(t - \rho^{-1}(t))\,dt$, если $b \leqslant x \leqslant a + \pi/n$. Пусть число A таково, что $f_0(a) + A = -(f_0(a+\pi/n) + A)$. Для $x \in [a, a+\pi/n]$ положим $f_n(\omega; x) = f_0(x) + A$, и с помощью равенства $f_n(\omega; x+\pi/n) = -f_n(\omega, x)$ продолжим эту функцию на всю числовую ось. Как известно [1] (§ 7.4), $f_n(\omega; \cdot) \in H^\omega$.

Через $\Phi(g, t)$ будем обозначать Σ-перестановку Корнейчука для функции $|g|$ (определение и свойства Σ-перестановок см. в [1] (гл. 6)).

В работе Н. П. Корнейчука [3] (см. также [1], гл. 7) найдены точные значения величин $E(W^r H^\omega, \mathfrak{N}^T_{2n-1})_C$, $n \in \mathbb{N}$, при условии, что $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $n \in N$; $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности; $\Delta \in (0, 2\pi]$; $K \in CVD[\Delta]$. Если $n \geqslant 2\pi/\Delta$ и таково, что $\mathfrak{N}^T(M(K)) \subset \mathfrak{N}^T_{2n-1}$, то*

$$E(K * H^\omega, \mathfrak{N}^T_{2n-1})_C = \| K * f_n(\omega, \cdot) \|_C . \tag{3}$$

Если $K \in CVD$, то (3) *справедливо при всех n.*

Эта теорема анонсирована автором в [4]. При ее доказательстве, как и в работах [1, 3], будем применять метод сравнения Σ-перестановок. Однако техника сравнения Σ-перестановок будет существенно отличаться от той, которая использовалась при $K = B_r$ и опиралась на индукцию по $r \in \mathbb{N}$.

Доказывая теорему 1, будем, когда это удобно, считать, что ядро K является аналитическим на вещественной оси. Это не уменьшит общности рассуждений, поскольку любое $CVD[\Delta]$-ядро K можно сколь угодно хорошо в смысле метрики L_1 аппроксимировать $CVD[\Delta]$-ядром вида $A_h * K$, где

$$A_h(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx}/\operatorname{ch}(mh), \quad h > 0,$$

которое уже является аналитическим на всей вещественной оси.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 2 (см. [5], теорема 6.1). *Пусть заданы функции f и g, определенные и непрерывно дифференцируемые на всей числовой оси, причем функция f имеет период T, $T > 0$, и для некоторых $d < c < d + T$ интервалы (d, c) и $(c, d+T)$ являются интервалами строгой монотонности f. Предположим, что*

1) $\min\limits_t f(t) < g(x) < \max\limits_t f(t)$, $x \in \mathbb{R}$;

2) *для любого $\tau \in \mathbb{R}$ разность $g(\cdot - \tau) - f(\cdot)$ имеет на периоде функции f ровно две перемены знака.*

Тогда если точки a, $b \in \mathbb{R}$ таковы, что $g(a) = f(b)$ и $g'(a) f'(b) \geqslant 0$, то $|g'(a)| \leqslant |f'(b)|$.

Теорема 3. *Пусть n, Δ, K таковы, как в теореме 1. Тогда для любой функции $g \in L_1$ такой, что $\|g\|_1 \leqslant 1$ и $g \perp \mathfrak{N}^T_{2n-1}$, будут справедливы неравенства*

$$\| B_1 * K(-\cdot) * g \|_1 \leqslant \| K(-\cdot) * \psi_n \|_1 \tag{4}$$

и

$$\bigvee_0^{2\pi} (B_1 * K(-\cdot) * g) \leqslant \bigvee_0^{2\pi} (K(-\cdot) * \psi_n). \tag{5}$$

Доказательство теоремы 3. Известно (см., например, [1, с. 79]), что для любого ядра K и для любой функции $g \in L_1$ такой, что $\|g\|_1 \leqslant 1$ и $g \perp \mathfrak{N}_{2n-1}^T$

$$\|K*g\|_1 \leqslant E(K, \mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{L_1}. \tag{6}$$

Вместе с тем ([5] (теорема 5.1)), если n, Δ и K таковы, как в теореме 1, то

$$E(K, \mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{L_1} = \|K*\varphi_n\|_C. \tag{7}$$

Учитывая, что если $K \in CVD[\Delta]$, то и $B_1*K(-\cdot) \in CVD[\Delta]$, и применяя (6), (7) к ядру $B_1*K(-\cdot)$, получаем

$$\|B_1*K(-\cdot)*g\|_1 \leqslant \|B_1*K(-\cdot)*\varphi_n\|_C = \frac{1}{4n}\bigvee_0^{2\pi}(B_1*K(-\cdot)*\varphi_n) =$$

$$= \|K(-\cdot)*\psi_n\|_1,$$

и (4) доказано. Применяя (6), (7) к ядру $K(-\cdot)$, имеем

$$\bigvee_0^{2\pi}(B_1*K(-\cdot)*g) = \|K(-\cdot)*g\|_1 \leqslant \|K(-\cdot)*\varphi_n\|_C = \frac{1}{4n}\bigvee_0^{2\pi}(K(-\cdot)*\varphi_n) =$$

$$= \bigvee_0^{2\pi}(K(-\cdot)*\psi_n),$$

и (5) доказано.

Основную роль в доказательстве теоремы 1 будет играть следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть n, Δ и K таковы, как в теореме 1, и K является аналитическим на всей вещественной оси. Тогда для любой функции $g \in L_1$ такой, что $\|g\|_1 \leqslant 1$ и $g \perp \mathfrak{N}_{2n-1}^T$, при всех $x \in [0, 2\pi]$ будет*

$$\int_0^x \Phi(B_1*K(-\cdot)*g, t)\,dt \leqslant \int_0^x \Phi(G_n, t)\,dt. \tag{8}$$

Это утверждение в случае $K = B$ доказано Н. П. Корнейчуком [3] (см. также [1], теорема 6.7.3).

Доказательство теоремы 4. Положим $G = B_1*K(-\cdot)*g$ и напомним, что $G_n = K(-\cdot)*\psi_n$. Для доказательства (8) покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ и всех $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^x \Phi(G, t)\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\int_0^x \Phi(G_n, t)\,dt. \tag{9}$$

В силу теоремы 3 $\int_0^{2\pi} \Phi(G, t)\,dt < (1+\varepsilon)\int_0^{2\pi}\Phi(G_n, t)\,dt$ и $\Phi(G, 0) < (1+\varepsilon) \times \Phi(G_n, 0)$. Поэтому для доказательства (9) достаточно показать, что разность

$$\delta(x) = (1+\varepsilon)\,\Phi(G_n, x) - \Phi(G, x)$$

либо неотрицательна на $(0, 2\pi)$, либо меняет знак с положительного на отрицательный один раз. В свою очередь, для этого достаточно убедиться в том, что если для некоторого $x_0 \in (0, \pi/n)$

$$\Phi(G, x_0) = (1+\varepsilon)\,\Phi(G_n, x_0), \tag{10}$$

то

$$|\Phi'_{\text{пр}}(G, x_0)| \leqslant (1+\varepsilon)\,|\Phi'(G_n, x_0)| \tag{11}$$

(здесь $f'_{\text{пр}}$ — правая производная).

Докажем последнее утверждение. В условиях теоремы функция G будет аналитической на вещественной оси и число $\nu(G)$ конечно. Пусть

d — какой-нибудь нуль функции G и $G = \sum_l g_l$ — разложение сужения G на отрезок $[d, d+2\pi]$ в сумму простых функций g_l (см. [1], § 6.3); (α_l, β_l) — основные интервалы функций g_l; $[\alpha'_l, \beta'_l]$ — отрезки, на которых

$$|g_l(x)| = \max_t |g_l(t)|, \quad \delta_l = \beta_l - \alpha_l, \quad \delta'_l = \beta'_l - \alpha'_l, \quad \delta = \sup_l \delta_l.$$

Пусть еще для $x \in (0, \delta)$

$$s_1(x) = \{l : \delta'_l \leqslant x < \delta_l\}, \quad s_2(x) = \{l : x < \delta'_l\}$$

и для $l \in s_1(x)$ интервалы $(t_l, \tau_l) \subset (\alpha_l, \beta_l)$ таковы, что $\tau_l - t_l = x$ и $|g(t_l)| = |g(\tau_l)|$.

Пусть (η_j, θ_j), $j = 1, \ldots, m$, — это интервалы (t_l, τ_l), перенумерованные слева направо, и пусть $\eta_{m+1} = \eta_1 + 2\pi$, $\theta_{m+1} = \theta_1 + 2\pi$. Если $\operatorname{sgn} G(\eta_j) = \operatorname{sgn} G(\eta_{j+1})$ при некотором $j = 1, \ldots, m$ и на отрезке $[\theta_j, \eta_{j+1}]$ функция G не меняет знак, то через ξ'_j и ξ''_j обозначим точку абсолютного минимума $|G(t)|$ на $[\theta_j, \eta_{j+1}]$ (ясно, что $G'(\xi'_j) = G'(\xi''_j) = 0$). Если же $\operatorname{sgn} G(\eta_j) = \operatorname{sgn} G(\eta_{j+1})$ и G меняет знак на отрезке $[\theta_j, \eta_{j+1}]$, то через ξ'_j обозначим такую точку из $[\theta_j, \eta_{j+1}]$, что $G(\xi'_j) = 0$ и $\operatorname{sgn} G(t) = -\operatorname{sgn} G(\eta_j)$ для всех $t > \xi'_j$ и достаточно близких к ξ'_j, а через ξ''_j — такую точку из $[\theta_j, \eta_{j+1}]$, что $G(\xi''_j) = 0$ и $\operatorname{sgn} G(t) = -\operatorname{sgn} G(\eta_j)$ для всех $t < \xi''_j$ и достаточно близких к ξ''_j. Точки η_j, $j = 1, \ldots, m$, и ξ'_j, перенумерованные слева направо, обозначим через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2p}$, а точки θ_j, $j = 1, \ldots, m$, и ξ''_j, перенумерованные слева направо,— через $y_1, \ldots, y_{2p}$. Определим функции

$$\overline{G}(x) = \sum_{l=1}^{2p} (-1)^l G(x + (x_l - x_1)), \quad \overline{\overline{G}}(x) = \sum_{l=1}^{2p} (-1)^l G(x + (y_l - y_1)),$$

$$\overline{g}(x) + \sum_{l=1}^{2p} (-1)^l B_1 * g(x + (x_l - x_1)), \quad \overline{\overline{g}}(x) = \sum_{l=1}^{2p} (-1)^l B_1 * g(x - (y_. - y_1))$$

(для определенности будем считать, что $G(x_1) > 0$).

Нетрудно проверить, что $\overline{G} = K(-\cdot) * \overline{g}$ и $\overline{\overline{G}} = K(-\cdot) * \overline{\overline{g}}$. Нетрудно также убедиться в том, что для всех x

$$|\overline{G}(x)| \leqslant \frac{1}{2} \bigvee_0^{2\pi} (G), \quad |\overline{\overline{G}}(x)| \leqslant \frac{1}{2} \bigvee_0^{2\pi} (G) \tag{12}$$

и

$$|\overline{g}(x)| \leqslant \frac{1}{2} \bigvee_0^{2\pi} (B_1 * g) \leqslant \frac{1}{2}, |\overline{\overline{g}}(x)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Обозначим через η и θ такие две точки, что $\theta - \eta = x_0$ и $G_n(\eta) = G_n(\theta) > 0$. Из условия (10) и определения функции $\overline{G}$ следует

$$\overline{G}(x_1) = \Phi(G, x_0) = (1+\varepsilon)\Phi(G_n, x_0) = (1+\varepsilon) 2nG_n(\eta). \tag{14}$$

Учитывая (12) и (13), теорему 3, определение функции G_n, а также то обстоятельство, что $\overline{G} = K(-\cdot) * \overline{g}$ и $K \in CVD[\Delta]$, видим, что к паре функций $\overline{G}$ и $(1+\varepsilon) 2nG_n$ применима теорема 2. Отсюда и из (14) следует

$$|\overline{G}'(x_1)| < 2n(1+\varepsilon)|G'_n(\eta)|. \tag{15}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$|\overline{\overline{G}}'(y_1)| < 2n(1+\varepsilon)|G'_n(\theta)|. \tag{16}$$

Из определения Σ-перестановки и точек t_l и τ_l легко следует такой аналог соотношения (2.2) из [6] (теорема 7.2.1)

$$|\Phi'_{\text{пр}}(G, x_0)| = \sum_l \left| \frac{1}{G'(t_l)} - \frac{1}{G'(\tau_l)} \right|^{-1} = \sum_l \frac{|G'(t_l)|\,|G'(\tau_l)|}{|G'(t_l)| + |G'(\tau_l)|}. \quad (17)$$

Применяя к правой части (17) справедливое для любого конечного набора $a_l > 0$ и $b_l > 0$ неравенство

$$\sum_l \frac{a_l b_l}{a_l + b_l} \leqslant \frac{\sum\limits_l a_l \sum\limits_l b_l}{\sum\limits_l a_l + \sum\limits_l b_l},$$

имеем

$$|\Phi'_{\text{пр}}(G, x_0)| \leqslant \frac{\sum\limits_l |G'(t_l)| \sum\limits_l |G'(\tau_l)|}{\sum\limits_l |G'(t_l)| + \sum\limits_l |G'(\tau_l)|}. \quad (18)$$

В силу определения функций $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$

$$\sum_l |G'(t_2)| \leqslant |\overline{G}'(x_1)|, \quad \sum_l |G'(\tau_l)| \leqslant |\overline{\overline{G}}(y_1)|. \quad (19)$$

Кроме того, если $0 < a < a'$ и $0 < b < b'$, то, очевидно,

$$\frac{ab}{a+b} < \frac{a'b'}{a'+b'}. \quad (20)$$

Учитывая (19), (15), (16) и (20), из (18) получаем

$$|\Phi'_{\text{пр}}(G, x_0)| < \frac{2n(1+\varepsilon)|G'_n(\eta)| \cdot 2n(1+\varepsilon)|G'_n(\theta)|}{2n(1+\varepsilon)(|G'_n(\eta)| + |G'_n(\theta)|)} =$$

$$= 2n(1+\varepsilon)\frac{|G'_n(\eta)|\,|G'_n(\theta)|}{|G'_n(\eta)| + |G'_n(\theta)|} = (1+\varepsilon)|\Phi'(G_n, x_0)|.$$

Неравенство (11), а с ним и неравенство (9), доказаны. Таким образом, доказана и теорема 4.

Теперь докажем теорему 1. Пусть $f \in K*H^\omega$ и $f = T + K*\varphi$, где $T \in \mathfrak{N}^T(M(K))$, $\varphi \in H^\omega$, $\varphi \perp \mathfrak{N}^T(M(K))$. Учитывая теорему двойственности С. М. Никольского [6] (теорема 2.2.1), то, что $\mathfrak{N}^T_{2n-1} \supset \mathfrak{N}^T(M(K))$ и $\varphi \perp \mathfrak{N}^T(M(K))$, имеем

$$E(f, \mathfrak{N}^T_{2n-1})_G = \sup_{\left\{\substack{\|g\|_1 \leqslant 1 \\ g \perp \mathfrak{N}^T_{2n-1}}\right\}} \int_0^{2\pi} (T + K*\varphi)\, g\, dt = \sup_{\left\{\substack{\|g\|_1 \leqslant 1 \\ g \perp \mathfrak{N}^T_{2n-1}}\right\}} \int_0^{2\pi} (K(-\cdot)*g)\, \varphi\, dx.$$

Отсюда в силу теоремы 7.5.1 из [1], поскольку $\varphi \in H^\omega$ и $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, получаем

$$E(f, \mathfrak{N}^T_{2n-1})_C \leqslant \sup_{\left\{\substack{\|g\|_1 \leqslant 1 \\ g \perp \mathfrak{N}^T_{2n-1}}\right\}} \int_0^{2\pi} \Phi(B_1 * K(-\cdot)*g, t)\, \omega'(t)\, dt. \quad (21)$$

Применяя теорему 4 и предложение 5.4.7 из [6], из (21) выводим неравенство

$$E(f, \mathfrak{N}^T_{2n-1})_C \leqslant \int_0^{2\pi} \Phi(G_n, t)\, \omega'(t)\, dt = \| K*f_n(\omega; \cdot) \|_C.$$

Следовательно,

$$E(f, \mathfrak{N}_{2n-1}^T)_C \leqslant \| K * f_n(\omega; \cdot) \|_C. \tag{22}$$

Поскольку $f_n(\omega; \cdot) \in H^\omega$, $f_n(\omega; \cdot) \perp \mathfrak{N}_{2n-1}^T$ и $E(K*f_n(\omega; \cdot), \mathfrak{N}_{2n-1}^T)_C = \| K*f_n(\omega; \cdot)\|_C$, видим, что в (22) справедливо равенство. Теорема 1 доказана.

3. Наилучшие приближения в среднем классов $K*H^\omega$. Для классов W^rH^ω с выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(t)$ наилучшие L_1-приближения тригонометрическими полиномами и сплайнами найдены Н. П. Корнейчуком в работах [3; 7]. Наилучшие односторонние приближения классов W^rH^ω, $r = 2, 4, \ldots$, найдены в [8], а наилучшие (α, β)-приближения — в [9, 10]. Распространим эти результаты на случай классов $K*H^\omega$, где K — произвольное $CVD[\Delta]$-ядро; $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. О некоторых других результатах по наилучшим L_1-приближениям классов $K*F$ сверток с $CVD[\Delta]$-ядрами см. [5], где имеются ссылки на других авторов.

Для $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi_{n;\alpha,\beta}(x) = \alpha \operatorname{sgn}\left(\cos nx - \cos\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\right)_+ - \beta \operatorname{sgn}\left(\cos nx - \cos\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\right)_-,$$

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n;1,1}(x), \bar{G}_{n;\alpha,\beta}(x) = B_1 * K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}, \text{ и } \bar{G}_n = \bar{G}_{n;1,1}.$$

Функция $\bar{G}_{n;\alpha,\beta}$ имеет период $2\pi/n$ и если $K \in CVD[\Delta]$, а $n \geqslant 2\pi/\Delta$ и таково, что $\mathfrak{N}^T(M(K)) \subset \mathfrak{N}_{2n-1}^T$, то найдутся точки $a < b < a + 2\pi/n$ такие, что на интервалах (a, b) и $(b, a + 2\pi/n)$ функция $\bar{G}_{n;\alpha,\beta}$ строго монотонна (и, следовательно, имеет на периоде ровно два нуля).

Функция $\bar{G}_n$ обладает следующим свойством: $\bar{G}_n(x + \pi/n) = -\bar{G}_n(x)$. Пусть c и $d\,(d - c = \pi/n)$ — два соседних нуля этой функции, на интервале (c, d) функция $\bar{G}_n(x)$ положительна, и пусть $\gamma \in (c, d)$ — точка максимума $\bar{G}_n(x)$. Равенством

$$\bar{G}_n(x) = \bar{G}_n(\rho(x)), \quad x \in (c, \gamma),$$

определим функцию $\rho(x)$, принимающую значения в интервале (γ, d), и пусть $\rho^{-1}(x)$ — обратная к $\rho(x)$ функция. Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то положим

$$\bar{f}_0(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_x^\gamma \omega'(\rho(t) - t)\,dt, & c \leqslant x \leqslant \gamma, \\ \displaystyle\int_\gamma^x \omega'(t - \rho^{-1}(t))\,dt, & \gamma \leqslant x \leqslant d. \end{cases} \tag{23}$$

Выберем число A так, чтобы $\bar{f}_0(c) + A = -\bar{f}_0(d) - A$, и для $t \in [c, d]$ положим $\bar{f}_n(\omega; x) = \bar{f}_0(x) + A$. Затем с помощью равенства $\bar{f}_n(\omega; x + \pi/n) = -\bar{f}_n(\omega; x)$ продолжим эту функцию на всю числовую ось. Как известно [1] (§ 7.4) $\bar{f}_n(\omega; \cdot) \in H^\omega$.

Пусть теперь ядро K является четной функцией. Тогда $K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}$ также является четной функцией, а $\bar{G}_{n;\alpha,\beta}$ — нечетная функция. Пусть, для определенности, $\bar{G}_{n;\alpha,\beta}(x) > 0$ для $x \in (0, \pi/n)$ и пусть $\gamma \in (0, \pi/n)$ — точка максимума $\bar{G}_{n;\alpha,\beta}$. Равенством

$$\bar{G}_{n;\alpha,\beta}(x) = \bar{G}_{n;\alpha,\beta}(\rho(x)), \quad x \in (0, \gamma),$$

определим функцию $\rho(x)$ со значениями в $(\gamma, \pi/n)$, и пусть $\rho^{-1}(x)$ — обратная функция. Если снова $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то равенством (23) (в котором $c = 0$, $d = \pi/n$) определим функцию

$\overline{f}_0(x)$. Пусть A — среднее значение $\overline{f}_0$ на отрезке $[0, \pi/n]$. Для $x \in [0, \pi/n]$ положим $\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega; x) = \overline{f}_0(x) - A$. Для $x \in [-\pi/n, 0)$ положим $\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega; x) = \overline{f}_0(-x) - A$. Затем функцию $\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega; x)$, определенную для $x \in [-\pi/n, \pi/n]$, продолжим с периодом $2\pi/n$ на всю числовую ось. Ясно, что $\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega; \cdot) \in H^\omega$. При $\max(\alpha, \beta) = +\infty$ функции $\overline{G}_{n;\alpha,\beta}$ и $\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega; \cdot)$ определим с помощью предельного перехода.

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности; $\Delta \in (0, 2\pi]$; $K \in CVD[\Delta]$; $\mathfrak{N}$ есть $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ или $K*\mathfrak{N}^s_{2n,r}$. Если $n \geqslant 2\pi/\Delta$ и таково, что $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}^T(M(K))$, то для $\alpha = \beta$ в случае произвольного ядра K и для всех $\alpha, \beta \in (0, +\infty]$ $(\min(\alpha, \beta) < +\infty)$, если K является четной функцией*

$$E(K*H^\omega, \mathfrak{N})_{1;\alpha,\beta} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \| K*\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega; \cdot) - \lambda \|_{1;\alpha,\beta} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi(B_1*K(-\cdot)*\varphi_{n;\alpha,\beta}; t)\, \omega'(t)\, dt. \qquad (24)$$

Если $K \in CVD$, то (24) *справедливо для всех n.*

Через $\mathfrak{N}^\perp_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}}$ будем обозначать множество функции $g \in L_\infty$ таких, что $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leqslant 1$ и $g \perp \mathfrak{N}$.

Для доказательства теоремы 5 нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Если $f \in L_1$ и $f \geqslant 0$ почти всюду, то через $P(f, t)$ обозначим убывающую перестановку сужения f на период. Из теорем 7.1 и 6.2 из работы [5] (см. также [5], теорема 8.3) следует такая теорема.

Теорема 6. *Пусть n, r, Δ, α, β, K, $\mathfrak{N}$ таковы, как в теореме* 5 *и $g \in \mathfrak{N}^\perp_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$. Тогда найдется полином $T_g \in \mathfrak{N}^T(M(K) \cup \{0\})$ такой что для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 2\pi]$, справедливы неравенства*

$$\int_0^x P((B_1*K(-\cdot)*g - T_g - \lambda)_\pm, t)\, dt \leqslant \int_0^x P((\overline{G}_{n;\alpha,\beta} - \lambda)_\pm, t)\, dt, \qquad (25)$$

$$\int_0^x P((K(-\cdot)*g - T'_g - \lambda)_\pm, t)\, dt \leqslant \int_0^x P((\overline{G}'_{n;\alpha,\beta} - \lambda)_\pm, t)\, dt. \qquad (26)$$

Основную роль при доказательстве теоремы 5 будет играть следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть n, r, Δ, K, $\mathfrak{N}$, α, β таковы, как в теореме* 5. *Тогда для любой функции $g \in \mathfrak{N}^T_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ найдется полином $T_g \in \mathfrak{N}^T(M(K) \cup \{0\})$ такой, что при всех $x \in [0, 2\pi]$ будет*

$$\int_0^x \Phi(B_1*K(-\cdot)*g - T_g; t)\, dt \leqslant \int_0^x \Phi(\overline{G}_{n;\alpha;\beta}; t)\, dt. \qquad (27)$$

Эта теорема в случае $K = B_r$ и $\alpha = \beta$ установлена Н. П. Корнейчуком [3; 7], при $K = B_r$ и $\max(\alpha, \beta) = \infty$ — В. Г. Дорониным и А. А. Лигуном [8].

Доказательство теоремы. 7. Пусть задана функция $g \in \mathfrak{N}^\perp_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ и T_g — полином, соответствующий ей в силу теоремы 6. Учитывая (25), легко понять, что неравенство (27) достаточно доказать только для таких $x \in (0, \pi/n)$, что

$$\Phi(B_1*K(-\cdot)*g - T_g; x) = \Phi(\overline{G}_{n;\alpha,\beta}; x). \qquad (28)$$

Положим $G = B_1*K(-\cdot)*g - T_g$ и пусть $G(x) = \sum_l g_l(x)$ — представление функции G в виде суммы простых функций g_l (см. [1], § 6.3), $(\alpha_l,$

$\beta_l)$ — основные интервалы функций g_l, $[\alpha_l', \beta_l']$ — отрезки, на которых $|g_l(x)| = \max\limits_x |g_l(x)|$, $\delta_l = \beta_l - \alpha_l$, $\delta_l' = \beta_l' - \alpha_l'$, $\delta = \sup\limits_l \delta_l$. Пусть еще для $x \in (0, \delta)$

$$s_1(x) = \{l : \delta_l' \leqslant x < \delta_l\},\ s_2(x) = \{l : x < \delta_l'\}$$

и для $l \in s_1(x)$ интервалы $(t_l, \tau_l) \subset (\alpha_l, \beta_l)$ таковы, что $\tau_l - t_l = x$ и $|G(t_l)| = |G(\tau_l)|$. Тогда для функции $\Phi(G; x)$ справедливо представление [1, с. 146]

$$\Phi(G; x) = \frac{1}{2} \int\limits_{A_1 \cup A_2} |G'(t)|\, dt, \tag{29}$$

где

$$A_1 = A_1(x) = \bigcup_{l \in s_1(x)} [(\alpha_l, t_l) \cup (\tau_l, \beta_l)],$$

$$A_2 = A_2(x) = \bigcup_{l \in s_2(x)} [(\alpha_l, \alpha_l') \cup (\beta_l', \beta_l)].$$

Не уменьшая общности можем считать, что $G(0) = 0$. Покажем, что если выполнено (28), то необходимо

$$\operatorname{mes}\{[0,2\pi] \setminus (A_1 \cup A_2)\} \leqslant 2nx. \tag{30}$$

Положим $(A_1 \cup A_2)_\pm = \{t \in A_1 \cup A_2 : \pm G'(t) > 0\}$. Учитывая, что

$$\int\limits_{(A_1 \cup A_2)_\pm} [G'(t)]_\pm dt = \frac{1}{2} \int\limits_{A_1 \cup A_2} |G'(t)|\, dt, \tag{31}$$

$$\int\limits_E |h(t)|\, dt \leqslant \int\limits_0^{\operatorname{mes} E} P(|h|, t)\, dt,$$

получаем, что найдутся точки x_1^+ и x_1^- такие, что $x_1^\pm \leqslant \operatorname{mes}(A_1 \cup A_2)_\pm$ и

$$\int\limits_{(A \cup A_2)_\pm} [G'(t)]_\pm dt = \int\limits_0^{x_1^\pm} P([G']_\pm, t)\, dt. \tag{32}$$

Отсюда и из (26) вытекает, что найдутся точки $x_2^\pm \leqslant x_1^\pm$ такие, что

$$\int\limits_0^{x_1^\pm} P([G']_\pm, t)\, dt = \int\limits_0^{x_2^\pm} P([K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}]_\pm, t)\, dt. \tag{33}$$

Сопоставляя (31) — (33), видим, что

$$\int\limits_0^{x_2^+} P([K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}]_+, t)\, dt = \int\limits_0^{x_2^-} P([K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}]_-, t)\, dt,$$

и ввиду (29) и (31) получаем

$$\Phi(G; x) = \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_0^{x_2^+} P([K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}]_+, t)\, dt + \int\limits_0^{x_2^-} P([K(-\cdot) * \varphi_{n;\alpha,\beta}]_-, t)\, dt \right\} =$$

$$= \Phi\left(\overline{C}_{n;\alpha,\beta};\ \frac{\pi}{n} - \frac{x_2^+ + x_2^-}{2n}\right). \tag{34}$$

В силу (28) и (34) имеем $x = \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{x_2^+ + x_2^-}{2n}$, откуда $x_2^+ + x_2^- = 2\pi - 2nx$.

По выбору точек $x_2^{\pm}$, $\operatorname{mes}(A_1 \cup A_2) \geqslant x_2^{\pm}$. Поэтому в результате получаем

$$\operatorname{mes}\{[0, 2\pi] \setminus (A_1 \cup A_2)\} = 2\pi - \operatorname{mes}(A_1 \cup A_2) \leqslant 2\pi - x_2^{+} - x_2^{-} = 2nx$$

и неравенство (30) доказано.

Теперь покажем, что из (30) следует (27) для x таких, что выполняется (28). Пусть $B = [0, 2\pi] \setminus (A_1 \cup A_2)$; $B_{\pm} = \{t \in B : G_{\pm}(t) > 0\}$. Очевидно, что

$$\int_0^x \Phi(G, t)\, dt \leqslant \int_B |G(t)|\, dt = \int_{B_+} G_+(t)\, dt + \int_{B_-} G_-(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\operatorname{mes} B_+} P(G_+, t)\, dt + \int_0^{\operatorname{mes} B_-} P(G_-, t)\, dt.$$

Применяя к правой части неравенства (25), получаем

$$\int_0^x \Phi(G, t)\, dt \leqslant \int_0^{\operatorname{mes} B_+} P([\overline{G}_{n;\alpha,\beta}]_+, t)\, dt + \int_0^{\operatorname{mes} B_-} P([\overline{G}_{n;\alpha,\beta}]_-, t)\, dt. \qquad (35)$$

Из (35), учитывая свойства функции $\overline{G}_{n;\alpha,\beta}$ и то, что в силу (30) $\operatorname{mes} B_+ + \operatorname{mes} B_- \leqslant 2nx$, имеем

$$\int_0^x \Phi(G, t)\, dt \leqslant \int_0^x \Phi(\overline{G}_{n;\alpha,\beta}, t)\, dt,$$

и теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Учитывая теорему двойственности для наилучших (α, β)-приближений (см. например, [11] предложение 1.4.9), и теорему 7.5.1 из [1], для любой функции $f = T + K * \varphi \in K * H^{\omega}$ $(T \in \mathfrak{N}^T(M(K))$, $\varphi \in H^{\omega}$, $\varphi \perp \mathfrak{N}^T(M(K))$ можем написать

$$E(f, \mathfrak{N})_{1;\alpha,\beta} = \sup_{g \in \mathfrak{N}^{\perp}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \int_0^{2\pi} (T + K * \varphi)\, g dt =$$

$$= \sup_{g \in \mathfrak{N}^{\perp}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \int_0^{2\pi} (K(-\cdot) * g - T'_g)\, \varphi dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g \in \mathfrak{N}^{\perp}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \int_0^{2\pi} \Phi(B_1 * K(-\cdot) * g - T_g;\, t)\, \omega'(t)\, dt,$$

где T_g — полином из теоремы 7. Учитывая теорему 7 и предложение 5.4.7 из [6], имеем

$$E(K * H^{\omega}, \mathfrak{N})_{1;\alpha,\beta} \leqslant \int_0^{2\pi} \Phi(\overline{G}_{n;\alpha,\beta}, t)\, \omega'(t)\, dt =$$

$$= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \| K * \overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega;\, \cdot) - \lambda \|_{1;\alpha,\beta}.$$

Учитывая, что $\overline{f}_{n;\alpha,\beta}(\omega;\, \cdot) \in H^{\omega}$, нетрудно убедиться в том, что справедливо и неравенство противоположного смысла. Теорема 5 доказана.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Karlin S.* Total positivity. Vol. 1.— Stanford; Calif.: Stanford univ. press., 1968.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1971.— 35, № 1.— С. 93—124.
4. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности // Докл, АН СССР.— 1988.— 298, № 6.— С. 1296—1299.

5. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн.— 1987.— 28, № 5.— С. 6—21.
6. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями.— Киев : Наук. думка, 1982.— 250 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L // Мат. заметки.— 1976.— **20**, № 5.— С. 655—664.
8. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О наилучшем одностороннем приближении классов $W^r H^\omega$ // Там же.— 1977.— **21**, № 3.— С. 313—327.
9. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 4.— С. 409—416.
10. *Бабенко В. Ф.* О несимметричных приближениях классов $W^r H^\omega$ тригонометрическими полиномами и сплайнами // Исслед. по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1983.— С. 3—11.
11. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.

Получено 20.02.91