УДК 517.9

О. В. Вышенская, канд. физ.-мат. наук (Киев. автомоб.-дор. ин-т),
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Интегральные множества одного класса разрывных динамических систем

Исследуется вопрос существования интегральных множеств одного класса систем дифференциальных уравнений, подвергающихся импульсному воздействию в дискретные моменты времени.

Досліджується питання існування інтегральних множин одного класу систем диференціальних рівнянь, що зазнають імпульсного збурення в дискретні моменти часу.

Значительные достижения в качественной теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием принадлежат киевской школе нелинейной механики, деятельность которой связана с именами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского. Основные результаты исследований по этой теме отражены в работах [1—5].

В настоящей работе исследуется вопрос существования интегральных множеств одного класса систем дифференциальных уравнений, подвергающихся импульсному воздействию в дискретные моменты времени.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$d\varphi/dt = a(t, \varphi, x), \quad dx/dt = F(t, \varphi, x), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = \mathcal{G}_i(\varphi, x), \tag{1}$$

в которой правые части непрерывны по своим переменным, определены в области

$$t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m, \quad \|x\| \leqslant h \tag{2}$$

и являются периодическими по φ_γ, $\gamma = \overline{1, m}$, с периодом 2π, а моменты импульсного воздействия τ_i таковы, что $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$ и $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$, и существует конечный предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p, \tag{3}$$

где $i(t, t+T)$ — количество точек τ_i на отрезке $[t, t+T]$.

Вопрос о существовании интегральных множеств систем такого вида будем решать в рамках теории возмущений, предполагая определенную малость величин

$$\|a(t, \varphi, x) - a(t, \varphi, 0)\|, \quad \|F(t, \varphi, x) - F(t, \varphi, 0)\|,$$
$$\|\mathcal{G}_i(\varphi, x) - \mathcal{G}_i(\varphi, 0)\|$$

в области (2).

Для этого представим уравнения (1) в виде

$$d\varphi/dt = a(t, \varphi, x), \quad dx/dt = A(t, \varphi, x) + f(t, \varphi), \quad t \neq \tau_i, \tag{4}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi, x)x + I_i(\varphi),$$

где

$$A(t, \varphi, x) = \int_0^1 \frac{\partial F(t, \varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau, \qquad f(t, \varphi) = F(t, \varphi, 0),$$

$$B_i(\varphi, x) = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{G}(\varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau, \qquad I_i(\varphi) = \mathcal{G}_i(\varphi, 0).$$

Интегральное множество уравнений (4) будем искать итерационным путем.

Обозначим через C^- класс кусочно-непрерывных по t с разрывами первого рода в точках τ_i и непрерывных по $\varphi \in \mathcal{T}^m$, 2π-периодических по φ_γ, $\gamma = \overline{1, m}$, ограниченных при $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ n-мерных вектор-функций и зададим начало итерационного процесса, т. е. функцию $u^0(t, \varphi) \in C^-$ такую, что $\|u^0(t, \varphi)\| \leqslant h$ при всех $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Определим последовательность множеств

$$x = u^{(j+1)}(t, \varphi), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

каждое из которых является интегральным множеством системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(t, \varphi, u^{(j)}(t, \varphi)),$$
$$dx/dt = A(t, \varphi, u^{(j)}(t, \varphi))x + f(t, \varphi), \qquad t \neq \tau_i, \tag{6}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi, u^{(j)}(\tau_i, \varphi))x + I_i(\varphi).$$

Лемма 1. *Пусть функции* $a(t, \varphi, x)$, $A(t, \varphi, x)$, $B_i(\varphi, x)$, $f(t, \varphi)$, $I_i(\varphi)$ — *кусочно-разрывны по* t *с разрывами первого рода в точках* $t = \tau_i$, *непрерывны по* φ *и* x *и являются периодическими по* φ_γ, $\gamma = \overline{1, m}$, *с периодом* 2π. *Предположим, что для любого* $j = 0, 1, \ldots$ *система уравнений* (6) *имеет интегральное множество* $x = u^{(j+1)}(t, \varphi)$, *принадлежащее области* (2).

Если

$$\lim_{j\to\infty} u^{(j)}(t, \varphi) = u(t, \varphi)$$

равномерно по $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$, *то предельная функция* $u(t, \varphi)$ *определяет интегральное множество системы уравнений* (4).

Доказательство леммы 1 повторяет доказательство леммы 1 из [4, с. 214].

Для реализации приведенного процесса линеаризации системы уравнений (4) требуется выяснение условий, при выполнении которых система уравнений

$$d\varphi/dt = a(t, \varphi) + a_1(t, \varphi),$$
$$dx/dt = (A(t, \varphi) + A_1(t, \varphi))x + f(t, \varphi), \quad t \neq \tau_i, \tag{7}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = (B_i(\varphi) + B_i'(\varphi))x + I_i(\varphi)$$

имеет интегральное множество

$$x = u(t, \varphi), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m \tag{8}$$

для произвольных достаточно малых по норме пространства C^- функций $a_1(t, \varphi)$, $A_1(t, \varphi)$, $B_i'(\varphi)$. Отметим, что под нормой функции $a(t, \varphi) \in C^-$ мы понимаем величину

$$\|a(t, \varphi)\|_0 = \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|a(t, \varphi)\|.$$

Условия существования интегральных множеств уравнений (7) требуют «грубой» функции Грина системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(t, \varphi), \quad dx/dt = A(t, \varphi)x, \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x. \tag{9}$$

Функцию Грина $\mathcal{G}_\tau^t(t_0, \varphi)$ системы уравнений (9) будем называть грубой, если найдется такое постоянное число $\delta > 0$, что система уравнений

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = a(t, \varphi) + a_1(t, \varphi), \\ dx/dt = A(t, \varphi)x, \qquad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x \end{gathered} \tag{10}$$

всякий раз, когда $a_1(t, \varphi) \in C^-$ и $\|a_1(t, \varphi)\|_0 \leqslant \delta$, имеет функцию Грина $\overline{\mathcal{G}}_\tau^t(t_0, \varphi)$, для которой

$$\|\overline{\mathcal{G}}_\tau^t(t_0, \varphi) f(\tau, \varphi_\tau(t_0, \varphi))\|_0 \leqslant \mathcal{K} e^{-\gamma|t-\tau|} \|f(t, \varphi)\|_0, \tag{11}$$

где $f(t, \varphi)$ — произвольная функция из C^-, $\varphi_t(t_0, \varphi)$ — решение первого из уравнений (10), $\mathcal{K}$ и γ — положительные постоянные, не зависящие от φ, δ и $f(t, \varphi)$.

Лемма 2. *Пусть система уравнений* (9) *имеет грубую функцию Грина* $\mathcal{G}_\tau^t(t_0, \varphi)$. *Тогда можно указать такое число* $\rho = \rho(\delta) > 0$, $\rho(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *что для любых*

$$a_1(t, \varphi) \in C^-, \quad A_1(t, \varphi) \in C^-, \quad B_i'(\varphi) \in C^-,$$

удовлетворяющих условию

$$\|a_1(t, \varphi)\|_0 + \|A_1(t, \varphi)\|_0 + \|B_i'(\varphi)\|_0 < \rho, \tag{12}$$

и произвольных $f(t, \varphi) \in C^-$, $I_i(\varphi) \in C^-$ *система уравнений* (7) *имеет интегральное множество* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\|u(t, \varphi)\|_0 \leqslant \mathcal{K}_1 [\|f(t, \varphi)\|_0 + \|I_i(\varphi)\|_0], \tag{13}$$

где $\mathcal{K}_1$ — *положительная постоянная, не зависящая от* ρ, $f(t, \varphi)$ *и* $I_i(\varphi)$.

Доказательство. Выберем ρ настолько малым, чтобы из равенства (12) следовало неравенство $\|a_1(t, \varphi)\|_0 \leqslant \delta$ и система уравнений (10) имела функцию Грина $\overline{\mathcal{G}}_\tau^t(t_0, \varphi)$, удовлетворяющую условию (11).

Рассмотрим следующее уравнение относительно функции $u(t, \varphi)$:

$$u(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{G}}_\tau^t(t, \varphi) [A_1(\tau, \varphi_\tau(t, \varphi)) u(\tau, \varphi_\tau(t, \varphi)) + f(\tau, \varphi_\tau(t, \varphi))] d\tau +$$
$$+ \sum_{-\infty < \tau_i < \infty} \overline{\mathcal{G}}_{\tau_i}^t(t, \varphi) [B_i'(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi)) u(\tau_i, \varphi_{\tau_i}(t, \varphi)) + I_i(\varphi_{\tau_i}(t, \varphi))]. \tag{14}$$

Здесь $\varphi_t(t_0, \varphi)$ — решение первого из уравнений (7).

Отметим, что если моменты импульсного воздействия τ_i такие, что $\tau_{i+1} - \tau_i \geqslant \theta > 0$ для всех $i \in Z$, то из существования предела (3) следует оценка

$$\sup_{t \in R} \sum_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \leqslant \frac{1}{1 - e^{-\gamma\theta}}.$$

Поэтому с учетом неравенств (11), (12) из (14) следует

$$\|u(t, \varphi)\|_0 \leqslant \frac{2\mathcal{K}}{\gamma} (\|A_1(t, \varphi)\|_0 \|u(t, \varphi)\|_0 + \|f(t, \varphi)\|_0) +$$
$$+ \frac{2\mathcal{K}}{1 - e^{-\gamma\theta}} (\|B_i(\varphi)\|_0 \|u(t, \varphi)\|_0 + \|I_i(\varphi)\|_0) \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathcal{K}\rho\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right)\| u(t,\varphi)\|_0+2\mathcal{K}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right)\times$$
$$\times(\| f(t,\varphi)\|_0+\| I_i(\varphi)\|_0).$$

Поэтому при достаточно малом ρ уравнение (14) имеет единственное относительно $u(t,\varphi)\in C^-$ решение. Это решение можно найти как предел последовательности функций $\{u_m(t,\varphi)\}$, определяемых рекуррентным соотношением

$$u_{m+1}(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\mathcal{G}}_\tau^t(t,\varphi)\,[A_1(\tau,\varphi_\tau(t,\varphi))\,u_m(\tau,\varphi_\tau(t,\varphi))+f(\tau,\varphi_\tau(t,\varphi))]\,d\tau+$$
$$+\sum_{-\infty<\tau_i<\infty}\overline{\mathcal{G}}_{\tau_i}^t(t,\varphi)\,[B_i'(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))\,u_m(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))+I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))],$$
$$m=0,1,2,\ldots,\ u_0(t,\varphi)=0.$$

Выбирая ρ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$2\mathcal{K}\rho\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right)\leqslant d<1,$$

для решения $u(t,\varphi)$ уравнения (14) получаем оценку (13), если в качестве $\mathcal{K}$ взять константу

$$\mathcal{K}_1=\frac{2\mathcal{K}}{1-d}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right),$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Чтобы упростить доказательство последующей теоремы, в правые части уравнений (4) искусственно введем малый параметр ε и перепишем эти уравнения в виде

$$d\varphi/dt=a(t,\varphi,x,\varepsilon), \tag{15}$$
$$dx/dt=A(t,\varphi,x,\varepsilon)\,x+f(t,\varphi,\varepsilon),\quad t\neq\tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi,x,\varepsilon)\,x+I_i(\varphi,\varepsilon),$$

где a, A, B_i, f, I_i — периодические по φ_γ, $\gamma=\overline{1,m}$, периода 2π функции, определенные в области

$$t\in R,\ \varphi\in\mathcal{T}^m,\quad \| x\|\leqslant h,\ \varepsilon\in[0;\ \varepsilon_0], \tag{16}$$

кусочно-непрерывные по t с разрывами первого рода в точках $t=\tau_i$ и непрерывные по переменным φ, x, ε. Будем предполагать также, что

$$f(t,\varphi,0)=0,\quad I_i(\varphi,0)=0 \tag{17}$$

при всех $t\in R$, $i\in Z$, $\varphi\in\mathcal{T}^m$.

Последнее условие гарантирует существование тривиального интегрального множества

$$x=0,\quad t\in R,\quad \varphi\in\mathcal{T}^m \tag{18}$$

системы уравнений (15) при $\varepsilon=0$.

Запишем уравнения в вариациях, соответствующие этому интегральному множеству. Они имеют вид

$$d\varphi/dt=a_0(t,\varphi),\quad dx/dt=A_0(t,\varphi)\,x,\quad t\neq\tau_i, \tag{19}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i}=B_i^0(\varphi)\,x,$$

где

$$a_0(t,\varphi)=a(t,\varphi,0,0),\quad A_0(t,\varphi)=A(t,\varphi,0,0),\quad B_i^0(\varphi)=B(\varphi,0,0).$$

Укажем условия, обеспечивающие существование интегрального множества уравнений (15) при $\varepsilon \neq 0$.

Теорема. *Пусть функции* a, A, B_i, f, I_i, *определяющие систему уравнений* (15), *дважды непрерывно дифференцируемы по* φ, x, ε *в области* (16). *Предположим, что система в вариациях* (19) *имеет грубую функцию Грина.*

Тогда можно указать достаточно малое положительное число ε_0 *такое, что для любого* $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ *система уравнений* (15) *имеет интегральное множество*

$$x = u(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathscr{T}^m, \tag{20}$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(t, \varphi, \varepsilon) = 0$,

Доказательство. Перепишем систему уравнений (15) в виде

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = a_0(t, \varphi) + a_1(t, \varphi, x, \varepsilon), \\ dx/dt = [A_0(t, \varphi) + A_1(t, \varphi, x, \varepsilon)]\, x + f(t, x, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = [B_i^0(\varphi) + B_i'(\varphi, x, \varepsilon)]\, x + I_i(\varphi, \varepsilon), \end{gathered} \tag{21}$$

положив

$$\begin{gathered} a_1(t, \varphi, x, \varepsilon) = a(t, \varphi, x, \varepsilon) - a(t, \varphi, 0, 0), \\ A_1(t, \varphi, x, \varepsilon) = A(t, \varphi, x, \varepsilon) - A(t, \varphi, 0, 0), \\ B_i'(\varphi, x, \varepsilon) = B(\varphi, x, \varepsilon) - B(\varphi, 0, 0). \end{gathered}$$

Для нахождения интегрального множества $x = u(t, \varphi, \varepsilon)$ этой системы применим итерационный процесс. В качестве начальной функции возьмем $u^0(t, \varphi, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in R$, $\varphi \in \mathscr{T}^m$. Первое приближение $u_1(t, \varphi, \varepsilon)$ определим как интегральное множество

$$x = u_1(t, \varphi, \varepsilon) \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathscr{T}^m \tag{22}$$

системы уравнений

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = a_0(t, \varphi) + a_1(t, \varphi, 0, \varepsilon), \\ dx/dt = [A_0(t, \varphi) + A_1(t, \varphi, 0, \varepsilon)]\, x + f(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = [B_i^0(\varphi) + B_i'(\varphi, 0, \varepsilon)]\, x + I_i(\varphi, \varepsilon). \end{gathered} \tag{23}$$

Выберем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{gathered} \| a_1(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)\|_0 + \| A_1(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)\|_0 + \\ + \| B_i'(\varphi, u(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)\|_0 \leqslant \rho \end{gathered} \tag{24}$$

для произвольной функции $u(t, \varphi, \varepsilon) \in C^-$, удовлетворяющей неравенству

$$\sup_{t \in R}\, \max_{\varphi \in \mathscr{T}^m} \| u(t, \varphi, \varepsilon)\| \leqslant \mathscr{K}_1 [\| f(t, \varphi, \varepsilon)\|_0 + \| I_i(\varphi)\|_0],$$

где ρ и $\mathscr{K}$ — положительные постоянные, определяемые леммой 2. Предположения о непрерывности функций a_1, A_1, B_i' по φ, x, ε вместе с условием (17) гарантируют возможность указанного выбора величины ε_0.

Первые части уравнений (23) удовлетворяют при всех $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ условиям леммы 2. Поэтому интегральное множество (22) этой системы существует и удовлетворяет неравенству

$$\sup_{t \in R}\, \max_{\varphi \in \mathscr{T}^m} \| u_1(t, \varphi, \varepsilon)\| \leqslant \mathscr{K}_1 [\| f(t, \varphi, \varepsilon)\|_0 + \| I_i(\varphi, \varepsilon)\|_0]. \tag{25}$$

Этого достаточно, чтобы по первой итерации (22) найти вторую, удовлетворяющую оценке вида (25).

Предположим, что для выбранного $\varepsilon_0 > 0$ уже найдены все итерации для $j = 1, 2, \ldots, r - 1$ и что они удовлетворяют неравенствам вида (25).

Тогда r-е приближение определяется из системы уравнений

$$d\varphi/dt = a_0(t, \varphi) + a_1(t, \varphi, u_{r-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon),$$
$$dx/dt = [A_0(t, \varphi) + A_1(t, \varphi, u_{r-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, x + f(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \tag{26}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = [B_i^0(\varphi) + B_i'(\varphi, u_{r-1}(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, x + I_i(\varphi, \varepsilon)$$

как ее интегральное множество

$$x = u_r(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m. \tag{27}$$

Поскольку функции $a_1(t, \varphi, u_{r-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$, $A_1(t, \varphi, u_{r-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$, $B_i'(\varphi, u_{r-1}(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$ удовлетворяют при всех $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ неравенству (24), то интегральное множество (27) системы уравнений (26) существует и удовлетворяет оценке вида

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| u_r(t, \varphi, \varepsilon)\| \leqslant \mathcal{K}_1 [\| f(t, \varphi, \varepsilon)\|_0 + \| I_i(\varphi, \varepsilon)\|_0]. \tag{28}$$

На основании метода математической индукции делаем вывод, что для всех $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ любая из итераций $u_r(t, \varphi, \varepsilon)$, $r = 1, 2, \ldots$, определена и удовлетворяет оценке (28).

Докажем сходимость итерационного процесса. Для этого рассмотрим разность

$$v_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon) = u_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon) - u_j(t, \varphi, \varepsilon).$$

Отметим, что в силу дважды непрерывной дифференцируемости при $t \neq \tau_i$ функций, определяемых систему уравнений (15), интегральные множества $u_j(t, \varphi, \varepsilon)$ будут непрерывно дифференцируемыми при $t \neq \tau_i$. В этом можно убедиться аналогично [4]. Поэтому

$$\frac{\partial u_j(t, \varphi, \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial u_j(t, \varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi}(a_0(t, \varphi) + a_1(t, \varphi, u_{j-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)) =$$
$$= [A_0(t, \varphi) + A_1(t, \varphi, u_{j-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, u_j(t, \varphi, \varepsilon) + f(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \tag{29}$$
$$\Delta u_j(t, \varphi, \varepsilon)|_{t=\tau_i} = [B_i^0(\varphi) + B_i'(\varphi, u_{j-1}(\tau_i, \varphi, \varepsilon))]\, u_j(\tau_i, \varphi, \varepsilon) + I_i(\varphi, \varepsilon)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $j = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что функция $v_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}(a_0(t, \varphi) + a_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)) = [A_0(t, \varphi) +$$
$$+ A_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, v + f_j(t, \varphi, \varepsilon), \qquad t \neq \tau_i, \tag{30}$$
$$\Delta v|_{t=\tau_i} = [B_i^0(\varphi) + B_i'(\varphi, u_j(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, v + I_i^j(\varphi, \varepsilon).$$

Здесь

$$f_j(t, \varphi, \varepsilon) = [A_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) - A_1(t, \varphi, u_{j-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)] \times$$
$$\times\, u_j(t, \varphi, \varepsilon) - \frac{\partial u_j(t, \varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi}[a_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a_1(t, \varphi, u_{j-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)],$$
$$I_i^j(\varphi, \varepsilon) = [B_i'(\varphi, u_j(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) - B_i'(\varphi, u_{j-1}(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, u_j(\tau_i, \varphi, \varepsilon).$$

Множество, определяемое уравнением

$$x = v_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m,$$

является поэтому интегральным множеством системы уравнений

$$d\varphi/dt = a_0(t, \varphi) + a_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon),$$
$$dx/dt = [A_0(t, \varphi) + A_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, x + f_j(\varphi, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \tag{31}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = [B_i^0(\varphi) + B_i'(\varphi, u_j(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, x + I_i^j(\varphi, \varepsilon)$$

для любого $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

Так как функции $a_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$, $A_1(t, \varphi, u_j(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$, $B'_i(\varphi, u_j(\tau_i, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$ при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ удовлетворяют неравенству (24), а функции $f_j(\varphi, \varepsilon)$ и $I_i^j(\varphi, \varepsilon)$ непрерывны, то система уравнений (31) удовлетворяет условиям леммы 2, а следовательно, для функции $v_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon)$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| v_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon)\| \leqslant \mathcal{K}_1 [\| f_j(\varphi, \varepsilon)\|_0 + \| I_i^j(\varphi, \varepsilon)\|_0] \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K}\left(\| u_j(t, \varphi, \varepsilon)\|_0 + \left\| \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}(t, \varphi, \varepsilon)\right\|_0\right) \| v_j(t, \varphi, \varepsilon)\|_0,$$

где $\mathcal{K}$ — некоторая постоянная, не зависящая от j и ε.

Из этого неравенства следует, что при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ для всех $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ имеем

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| v_{j+1}(t, \varphi, \varepsilon)\| \leqslant \alpha \sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| v_i(t, \varphi, \varepsilon)\|,$$

где $\alpha < 1$. Но тогда

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| v_j(t, \varphi, \varepsilon)\| \leqslant \alpha^{j-1} \sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \| v_1(t, \varphi, \varepsilon)\|,$$

$j = 1, 2, \ldots$, что гарантирует равномерную сходимость последовательности $u_j(t, \varphi, \varepsilon)$, $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно, найдется кусочно-непрерывная по t с разрывами первого рода при $t = \tau_i$ и непрерывная по $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ функция $u(t, \varphi, \varepsilon)$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} u_j(t, \varphi, \varepsilon) = u(t, \varphi, \varepsilon)$$

равномерно по $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

В силу непрерывности функции $u(t, \varphi, \varepsilon)$ по ε и условия (17) убеждаемся, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t, \varphi, \varepsilon) = 0$$

равномерно относительно $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}^m$, что завершает доказательство теоремы.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 502 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1977.— 440 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М. : Наука, 1987.— 304 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 282 с.

Получено 25.06.91