УДК 513.8,517.9

В. А. Главан, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Структура линейных расширений с условиями типа Фавара

Исследована структура линейных расширений, внешние степени которых удовлетворяют условию Фавара об отделимости от нуля ограниченных движений.

Досліджена структура лінійних розширень, зовнішні ступені яких задовольняють умову Фавара про відділення від нуля обмежених рухів.

В в е д е н и е. Теория Флоке—Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами имеет два аспекта. Во-первых, это теорема о представлении: фундаментальная матрица решений представима в виде произведения периодической невырожденной матрицы и экспоненты постоянной матрицы. Во-вторых, используя спектр постоянной матрицы в указанном выше произведении, а также ее корневые подпространства, можно получить исчерпывающую информацию о структуре расширенного фазового пространства $T^1 \times R^n$ исходной системы. В частности, если $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ — показатели Ляпунова решений системы, то каждому λ_j соответствует инвариантное векторное подрасслоение $V_j \subset T^1 \times R^n$, причем $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k = T \times R^n$, и каждое такое подрасслоение допускает флаг собственных инвариантных подрасслоений — носителей «вековых решений» системы.

Ряд результатов, обобщающих теорему Флоке—Ляпунова на случай квазипериодических систем с близкими к постоянным правыми частями, получен в [1] с помощью метода ускоренной сходимости.

В общем же случае распространению теории Флоке—Ляпунова на почти периодические системы препятствуют, по крайней мере, четыре фактора: неправильные почти периодические системы [2]; топологически нетривиальные инвариантные векторные расслоения на торе и на компакте Бора [3, 4] и связанное с ними явление недополняемости квазипериодического репера [5]; малые знаменатели [6, 7] и топологические эффекты, порожденные ими [8—11], и, наконец, недостаточная гладкость правой части [7].

Наряду с [1] одним из первых шагов на пути построения аналога теории Флоке—Ляпунова для линейных непериодических систем дифференциальных уравнений является утверждение о том, что отсутствие нетривиальных ограниченных движений в расширенном фазовом пространстве $H(A) \times R^n$ линейной неавтономной системы $\dot{x} = A(t)x$ влечет экспоненциальную дихотомию. (Напомним, что $H(A) = \overline{\{A_\tau | \tau \in R\}}$, где $A_\tau(t) = A(t + \tau)$ и замыкание берется в компактно-открытой топологии. По-видимому, Фавар [12] был одним из первых, кто понял, что для изучения системы $\dot{x} = A(t)x$ необходимо привлечь и предельные уравнения $\dot{x} = A_1(t)x$, $A_1 \in H(A)$). Это утверждение в разной степени общности доказывалось многими авторами, но первым, кто доказал его в самом общем виде, был, по-видимому, Селгрейд [13]. Следующим шагом является введение Сакером и Селлом [14] понятия спектра линейной неавтономной системы. Согласно [14], спектр не пуст и состоит из объединения конечного числа непересекающихся отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k \leqslant n$. Каждому такому отрезку соответствует инвариантное векторное подрасслоение $V_i \subset H(A) \times R^n$, являющееся носителем тех решений, показатели экспоненциального роста которых охватываются отрезком $[a_i, b_i]$ и $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k = H(A) \times R^n$. В частности, одно из них содержит множество $\mathcal{B}$ ограниченных решений. В общем случае подмножество $\mathcal{B} \subset H(A) \times R^n$ плохо расположено в расширенном фазовом пространстве. Например, его слой $\mathcal{B}_\varphi$ зависит разрывно от точки $\varphi \in H(A)$, т. е. от правой части. Пусть $\Phi(\varphi, t)$ обозначает оператор Коши линейной системы $\dot{x} = A_1(t)x$, $A_1 \equiv \varphi \in H(A)$. В работе [15] доказан следующий результат:

Критерий Сакера — Селла. *Пусть правая часть $A(t)$ рекуррентна в смысле Биркгофа, т. е. динамическая система сдвигов на $H(A)$ минимальна. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1. *Для всех* $(\varphi, x) \in \mathcal{B}$, $x \neq 0$, *выполняется условие Фавара* [12]:

$$\sup_{t \in R} \| \Phi(\varphi, t) x \| < \infty \Rightarrow \inf_{t \in R} \| \Phi(\varphi, t) x \| > 0. \qquad (1)$$

2. *Подмножество* $\mathcal{B} \subset H(A) \times R^n$ *является инвариантным векторным подрасслоением и существуют положительные числа* m *и* M *такие, что*

$$m \| x \| \leqslant \| \Phi(\varphi, t) x \| \leqslant M \| x \|, \quad (\varphi, x) \in \mathcal{B}. \qquad (2)$$

При условии Фавара с дополнительным требованием об отсутствии «вековых решений», т. е. решений, растущих полиномиально с ростом времени, в [15] получена трихотомия $H(A) \times R^n = E^s \oplus E^u \oplus \mathcal{B}$, где E^s (E^u) — экспоненциально устойчивое при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ векторное подрасслоение. Этот результат назван авторами очередным приближением к теории Флоке—Ляпунова для линейных непериодических систем.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы путем усиления условия Фавара выделить и «вековые» решения. Для этого условие (1) распространяется на (поли) линейные системы с фазовым пространством $\bigwedge R^n$ — внешняя алгебра векторного пространства R^n,— индуцированные исходной линейной системой. Это позволяет, с одной стороны, свести спектральный отрезок, охватывающий нуль, к точке нуль и тем самым обойти неправильность, а с другой,— выделить инвариантные подрасслоения — носители вековых решений.

Как уже отмечено, топологически нетривиальные векторные расслоения встречаются при изучении линейных почти периодических систем, поэтому будем считать, что линейная неавтономная динамическая система определена на векторном расслоении.

1. Линейные расширения динамических систем. Пусть задано векторное расслоение $p : E \to Y$ со слоем R^n, либо $\mathbb{C}^n$, компактной хаусдорфовой базой Y и финслеровой структурой $\|\cdot\|$, т. е. семейством норм в слоях, непрерывно зависящим от точки базы (см., например, [16]). Пусть на Y задана динамическая система (Y, T, ρ) с временем $T = \mathbb{R}$ (поток), либо $T = \mathbb{Z}$ (каскад), а на E — динамическая система (E, T, π) такая, что действие $\pi^t : E \to E$, $t \in T$, линейно в слоях, а проекция p является гомоморфизмом динамических систем. В этом случае говорят [17, 18, 5], что задано линейное расширение

$$p : (E, T, \pi) \to (Y, T, \rho). \qquad (3)$$

Частными случаями таких расширений являются уравнения в вариациях вдоль фазовых траекторий гладких потоков или каскадов (диффеоморфизмов), а также линейные расширения $p : (H(A) \times R^n, R, \Phi) \to (H(A), R, \rho)$, порожденные линейным уравнением $\dot{x} = A(t) x$ на расширенном фазовом пространстве $H(A) \times R^n$. Здесь $(H(A), R, \rho)$ — динамическая система сдвигов, а $\Phi(\varphi, t)$ — оператор Коши уравнения, соответствующего «точке» $\varphi \in H(A)$.

Отметим также, что в случае тривиальности векторного расслоения $p : E \to Y$, линейное расширение (3) может быть определено коциклом, т. е. (непрерывным) отображением $Q : Y \to \mathrm{Gl}_n$ с групповым свойством $Q(\rho^t(y), s) \circ Q(y, t) = Q(y, t + s)$ [18]. В данной работе будем предполагать, что база расширения (Y, T, ρ) — минимальная динамическая система.

Пусть $E_1 \subset E$ — инвариантное векторное подрасслоение расширения (3), P_1 — некоторый проектор E на E_1, $P_2 = I - P_1$, $E_2 = P_2(E)$. Положим $\mu^t = P_2 \circ \pi^t \circ P_2$, $t \in T$. Тогда семейство отображений $\mu^t : E_2 \to E_2$, $t \in T$, определяет динамическую систему, называемую фактором динамической системы (E, T, π) по инвариантному векторному подрасслоению E_1 и обозначаемую через $(E/E_1, T, \mu)$. Линейное расширение $p_2 : (E_2, T, \mu) \to (Y, T, \rho)$ называется фактором линейного расширения $p : (E, T, \pi) \to (Y, T, \rho)$ по инвариантному векторному подрасслоению $E_1 \subset E$ (см., например, [18, с. 85]).

В частном случае, когда линейное расширение порождено линейной системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$, $x \in R^n$, где $A(t)$ имеет блочно-треугольный вид $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, расширение M соответствует уравнению $\dot{x}_2 = A_{22}(t)x_2$.

В общем случае подрасслоения E_1 и E/E_1 не тривиальны, даже если E тривиально. Однако их можно сделать тривиальными над некоторой новой минимальной динамической системой (Y_1, T, ρ_1), которая является расширением старой: $q:(Y_1, T, \rho_1) \to (Y, T, \rho)$ [17, 18]. Это означает, что индуцированное линейное расширение (или другими словами, обратный образ линейного расширения) $p^*:(q^*E, T, \pi^*) \to (Y_1, T, \rho_1)$, где $q^*E = \{(y_1, v) \mid y_1 \in Y_1,\ v \in E,\ q(y_1) = p(v)\}$, а действие $\pi^{*t}: q^*E \to q^*E$ определено равенством $\pi^{*t}(y_1, v) = (\rho_1^t(y_1), \pi^t(v))$, $t \in T$, когомологично (т. е. приводится с помощью Y_1-изоморфизма $h: q^*E \to Y_1 \times V$ к расширению)

$$\pi(y_1, t) = \begin{pmatrix} A(y_1, t) & B(y_1, t) \\ 0 & D(y_1, t) \end{pmatrix}, \qquad y_1 \in Y_1,\ t \in T. \tag{4}$$

В частном случае это означает, что любая почти периодическая система с инвариантным векторным подрасслоением может быть приведена к блочно-треугольному виду с помощью рекуррентного преобразования Флоке-Ляпунова $\overline{x} = H(t)x$, хотя почти периодическое такое преобразование может не существовать.

Нам понадобится следующее утверждение относительно спектра линейного расширения (3). Напомним [14, 18], что точка λ принадлежит спектру $\sigma(\pi)$ линейного расширения (3), если линейное расширение $p:(E, T, \pi_\lambda) \to (Y, T, \rho)$, где $\pi_\lambda^t(x) = \exp(-\lambda t)\,\pi^t(x)$, $x \in E$, $t \in T$, не допускает экспоненциальной дихотомии [14, 18].

Лемма 1. *Пусть линейное расширение* (3) *имеет инвариантное векторное подрасслоение* E_1 *и* $p_1:(E_1, T, \pi/E_1) \to (Y, T, \rho)$ *и* $p_2:(E/E_1, T, \mu) \to (Y, T, \rho)$ *означают соответственно ограничение и фактор расширения. Тогда* $\sigma(\pi) = \sigma(\pi/E_1) \cup \sigma(\mu)$.

Доказательство. Так как переход к обратному образу, а также когомологичность не изменяют спектр, то можно считать, что расширение имеет вид (4). После замены переменных $\overline{x} = \operatorname{diag}\{I_1, \varepsilon I_2\}\,x$ (4) переходит в такое же расширение, но с угловым блоком умноженным на ε. Последнее, а также соответствующее ему блочно-диагональное расширение при достаточно малых ε одновременно дихотомичны, или нет. Отсюда следует утверждение леммы.

Напомним, что подмножество S топологической группы T называется относительно плотным, если существует компакт $K \subset T$ такой, что $K + S = T$.

Лемма 2. *Если подмножество S относительно плотно в T, то справедлива импликация*

$$\inf_{t\in S} \|\pi^t(x)\| > 0 \Rightarrow \inf_{t\in T} \|\pi^t(x)\| > 0.$$

Доказательство проводится стандартными рассуждениями от противного.

Замечание. Аналогичное утверждение верно, если заменить inf на sup.

2. Некоторые элементы полилинейной алгебры. Пусть V — векторное пространство размерности n над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\otimes^k V$ — тензорное произведение k экземпляров V, т. е. $\otimes^k V$ есть пространство (контрвариантных) тензоров степени k, $A_k(V)$ — подпространство, порожденное элементами вида $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k$, где $v_i = v_j$ для некоторых $i \neq j$. Тогда определена внешняя степень $\Lambda^k V = \otimes^k V / A_k(V)$ (см., например, [19]). Элементы из $\Lambda^k V$ называются k-векторами, или антисимметричными тензорами степени k. Если $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — базис пространства V, то

элементы $A_k(V)+v_{i_1}\otimes\ldots\otimes v_{i_k}$, $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$, обозначаемые также через $v_{i_1}\wedge v_{i_2}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}$ (с учетом антикоммутативности внешнего умножения) для всех $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$ образуют базис пространства $\Lambda^k V$.

Каждый линейный оператор $\Phi: V\to V$ индуцирует линейный оператор $\otimes^k\Phi$ на $\otimes^k V$ согласно формуле $(\otimes^k\Phi)(v_1\otimes\ldots\otimes v_k)=(\Phi v_1)\otimes\ldots\otimes(\Phi v_k)$. Легко видеть, что подпространство $A_k(V)\subset\otimes^k V$ инвариантно под действием $\otimes^k\Phi$, поэтому корректно определен фактор-оператор $\Lambda^k\Phi:\Lambda^k V\to\Lambda^k V$, называемый k- й внешней степенью линейного оператора Φ. Если (Φ) — матрица линейного оператора Φ относительно фиксированного базиса пространства V, то матрицей отображения $\Lambda^k\Phi$ служит матрица $(\chi_{H,K})$ размерности $\binom{n}{k}\times\times\binom{n}{k}$, образованная минорами k-го порядка матрицы (Φ).

Пусть $W\subset V$ обозначает инвариантное под действием Φ подпространство размерности r, $\mu: V/W\to V/W$ — соответствующий фактор-оператор. Обозначим через $\mathfrak{U}\subset\Lambda^{r+k}(V)$ подпространство

$$\mathfrak{U}=(\otimes^r W)\otimes(\otimes^k V)/A_{r+k}(V),$$

состоящее из всех $(r+k)$-векторов с общим r-множителем $v_1\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_r\in\Lambda^r W$. Легко заметить, что $\mathfrak{U}$ инвариантно под действием $\Lambda^{r+k}(\Phi)$.

В последующем нам понадобится следующее утверждение (см., например, [19, с. 410], упражнение 8, или [20]).

Лемма 3. *Существует изоморфизм* $\Psi:\mathfrak{U}\to\Lambda^k(V/W)$ *такой, что*

$$\Psi\circ(\Lambda^{r+k}\Phi)\mid\mathfrak{U}=\det(\Phi/W)(\Lambda^k\mu)\circ\Psi. \tag{5}$$

3. Полилинейные расширения динамических систем. Пусть $p_k:\Lambda^k E\to Y$ обозначает k-ю внешнюю степень векторного расслоения $p: E\to Y$ (см., например, [16]) и

$$p_k:(\Lambda^k E,\ T,\ \Lambda^k\pi)\to(Y,\ T,\ \rho) \tag{6}$$

— индуцированную на этом расслоении k-ю внешнюю степень линейного расширения (3).

Если линейное расширение порождено оператором Коши $\Phi(\varphi, t)$ линейной системы $\dot{x}=A(\rho^t(\varphi))x$, $\varphi\in H(A)$, то линейное расширение (6) определено матрицей $\Lambda^k\Phi(\varphi, t)$. Внешние степени касательного отображения диффеоморфизмов были использованы в [20] для изучения диффеоморфизмов с нулевой энтропией.

Напомним (см., например, [18]), что линейное расширение (3) удовлетворяет условию Фавара, если

$$\sup_{t\in T}\|\pi^t(x)\|<\infty\Rightarrow\inf_{t\in T}\|\pi^t(x)\|>0,\qquad x\neq 0.$$

Если эта импликация справедлива для всех линейных расширений $p:(E, T, \pi_\lambda)\to(Y, T, \rho)$, $\lambda\in R$, то будем говорить, что расширение (3) удовлетворяет условию Фавара равномерно по спектральному параметру.

Определение. *Будем говорить, что расширение* (3) *удовлетворяет условию Фавара порядка k, если k-я внешняя степень* (6) *удовлетворяет этому условию.*

Замечание. Легко видеть, что линейное расширение (3) удовлетворяет условиям Фавара всех порядков тогда и только тогда, когда линейное расширение $\overline{p}:(\Lambda E,\ T,\ \Lambda\pi)\to(Y,\ T,\ \rho)$ удовлетворяет условиям Фавара (напомним, что $\Lambda V=V\oplus\Lambda^2 V\oplus\ldots\oplus\Lambda^n V$, где $n=\dim V$).

Следующее утверждение является ключевым при доказательстве основного результата статьи.

Предложение 1. *Пусть $W \subset E$ обозначает инвариантное векторное подрасслоение размерности r такое, что $\sup\{\|\Lambda^r\pi^t(\xi)\| : t \in T\} < \infty$ для всех $\xi \in \Lambda^r W$. Тогда фактор-расширение $p_2 : (E/W, T, \mu) \to (Y, T, \rho)$ удовлетворяет условиям Фавара всех порядков тогда и только тогда, когда исходное линейное расширение удовлетворяет этим условиям.*

Доказательство. Так как $\|\Lambda^r(\pi^t | W)\| = |\det(\pi^t | W)| < \infty$, то в силу критерия Сакера — Селла, найдутся постоянные $m > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$m \leqslant |\det(\pi^t/W)| \leqslant M, \qquad t \in T. \tag{7}$$

Пусть $\xi \in \Lambda^k(E/W)$ — произвольный ненулевой элемент и такой, что $\sup\{\|\Lambda^k\mu^t(\xi)\| : t \in T\} < \infty$. Покажем, что $\inf\{\|\Lambda^k\mu^t(\xi)\| : t \in T\} > 0$. Для этого выберем локальную карту расслоения $p : E \to Y$ в окрестности U точки $y = p_k(\xi) \in Y$ и пусть Ψ — изоморфизм, построенный в лемме 3. (Отметим, что Ψ зависит от системы координат.) Тогда

$$\infty > \|\det(\pi^t/W)\,\Lambda^k\nu^t(\xi)\| = \|\Psi\circ[(\Lambda^{r+k}\pi^t)/\mathfrak{U}]\circ\Psi^{-1}(\xi)\| \tag{8}$$

для всех $t \in T$ таких, что $\rho^t(y) \in U$. В силу минимальности динамической системы (Y, T, ρ) множество S значений времени $t \in T$, для которых $\rho^t(y) \in \in U$, образует относительно плотное подмножество в T (см., например, [17], определение 5.6). В силу условия Фавара $(r+k)$-го порядка для расширения (3), из (8) вытекает неравенство

$$\|\Psi\circ[(\Lambda^{r+k}\pi^t)/\mathfrak{U}]\circ\Psi^{-1}(\xi)\| \geqslant c > 0$$

где c — некоторая постоянная, $t \in S$, откуда с учетом неравенства (7) имеем

$$\|\Lambda^k\mu^t(\xi)\| \geqslant c\,|\det(\pi^t/W)|^{-1} \geqslant cM^{-1} > 0, \quad t \in S.$$

Из этих неравенств с учетом леммы 2 получаем искомое неравенство. Обратное утверждение получается аналогично. Предложение доказано.

4. Структура линейных расширений, внешние степени которых удовлетворяют условию Фавара.

Предложение 2. *Пусть линейное расширение* (3) *удовлетворяет условиям Фавара всех порядков и пусть его множество ограниченных движений не тривиально. Тогда нуль является изолированной точкой спектра и соответствующее спектральное подрасслоение допускает флаг инвариантных векторных подрасслоений*

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{s-1} \subset V_s = V \tag{9}$$

таких, что

$$V_i = \{x \in V : \sup\{\|\pi^t(x) + V_{i-1}\| : t \in T\} < \infty\}, \tag{10}$$

причем существуют постоянные $m_i > 0$, $M_i > 0$, относительно которых справедливы неравенства

$$m_i\|x + V_{i-1}\| \leqslant \|\pi^t(x) + V_{i-1}\| \leqslant M_i\|x + V_{i-1}\|, \quad x \in V_i. \tag{11}$$

Кроме того, для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ найдется многочлен с положительными коэффициентами $P_{i-1}(t)$ степени $i - 1$ такой, что

$$\|\pi^t(x)\| \leqslant P_{i-1}(|t|)\,\|x\|, \qquad x \in V_i,\ t \in T. \tag{12}$$

Доказательство. В качестве V_1 возьмем множество $\mathcal{B}$ ограниченных движений. В силу критерия Сакера—Селла V_1 — инвариантное векторное подрасслоение и для него справедливо неравенство (11). Определим V_2 равенством (10), которое означает, что точка $x + V_1$ порождает ограниченное движение фактор-расширения $p_1 : (V/V_1, T, \pi_1) \to (Y, T, \rho)$. В силу предложения 1 это расширение удовлетворяет условию Фавара, поэтому его множество ограниченных движений составляет векторное подрасслоение $\mathcal{B}_1 \subset V/V_1$ и выполнено неравенство (11). Тогда и V_2 будет инвариантным векторным подрасслоением в силу изоморфизма $V_2 \sim V_1 \oplus \mathcal{B}_1$. Продолжая таким образом, мы исчерпаем все расслоение $p: V \to Y$. Действительно, в силу (10) и (11), а также леммы 1 спектр ограничения на V_i линейного расширения (3) равен нулю. Если на факторе V/V_i нет нетривиальных ограниченных движений, то спектр этого фактор-расширения не содержит нуля. В силу той же леммы 1 спектр ограничения линейного расширения на V равен точке нуль в объединении с некоторым отрезком, не содержащим нуля. Но этому отрезку соответствует другое спектральное подрасслоение, поэтому $V = V_i$.

Если же на факторе V/V_i есть нетривиальные ограниченные движения, то с помощью тех же рассуждений, что приведены выше, мы отщепим еще одно подрасслоение и т. д. Через конечное число шагов получим равенство $V_s = V$ для некоторого натурального s, $1 \leqslant s \leqslant \dim V$.

Докажем неравенство (12). Для этого, не уменьшая общность рассуждений, сперва преобразовываем линейное расширение (3), т. е. возьмем его обратный образ $p^*: (q^*E, T, \pi^*) \to (Y_1, T, \rho_1)$, где $q: (Y_1, T, \rho_1) \to (Y, T, \rho)$ — некоторое минимальное расширение, а $q^*E \to Y_1$ и $q^*V_i \to Y_1$, $i = 1, 2, \ldots, s$,— тривиальные векторные расслоения [18], затем полученное линейное расширение приведем к блочно-треугольному виду в соответствии с индуцированным из (9) флагом из тривиальных векторных подрасслоений:

$$\pi^{*t}(\psi, t)/(q^*V) \approx (A_{ij}(\psi, t))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}, \tag{13}$$

где $A_{ij}(\psi, t) \equiv 0$ для всех $i > j$, $\psi \in Y_1$, $t \in T$.

Неравенства (11) переходят в следующие неравенства:

$$0 \leqslant \overline{m}_j \leqslant \| A_{jj}(\psi, t) \| \leqslant \overline{M}_j, \qquad \psi \in Y_1, \ t \in T. \tag{14}$$

Согласно [21] (теорема 1.21) коцикл (13) с временем R когомологичен дифференцируемому по t коциклу. Для упрощения выкладок будем считать, что коцикл (13) дифференцируем по t и докажем для него неравенства (12) по индукции. В работе [15] для дифференцируемых по t коциклов блочно-треугольного вида

$$\begin{pmatrix} u(\psi, t) \\ v(\psi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\psi, t) & B(\psi, t) \\ 0 & D(\psi, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

получена формула «вариации постоянных»:

$$u(\psi, t) = A(\psi, t)\, u + \left[\int_0^t A(\rho_1^\tau(\psi), t - \tau)\, b(\rho_1^\tau(\psi))\, D(\psi, \tau)\, d\tau \right] v,$$

где $b(\psi) = \left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} B(\psi, t)$.

Предположим, что A и D устойчивы, т. е. $\| A(\varphi, t) \| \leqslant M_2$, $\| D(\psi, t) \| \leqslant M_3$, $\psi \in Y_1$, $t \in T$, и пусть b_0 обозначает $\max \| b(\psi) \|$, $\psi \in Y_1$. Тогда справедливы оценки

$$\| u(\psi, t) \| \leqslant M_2 \| u \| + M_2 M_3 b_0 |t| \, \| v \|,$$

откуда следует неравенство (12) при $i = 2$.

Предположим, что неравенство (12) при $i \leqslant j$ доказано, и докажем его при $i = j + 1$. Для этого опять используем формулу вариации постоянных и предположение индукции. В результате стандартных оценок получим

$$\| u(\psi, t) \| \leqslant P_{j-1}(|t|) \| u \| +$$

$$+ M_3 b_0 \left| \int_0^t P_{j-1}(|t - \tau|)\, d\tau \right| \| v \| \leqslant P_j(|t|) \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|.$$

В дискретном случае формула «вариации постоянных» имеет вид [15]

$$u(\psi, n) = A(\psi, n)\, u + \sum_{i=1}^{n} A(\rho_1^i(\psi), n - i) \circ B(\rho_1^{i-1}(\psi)) \circ D(\psi, i - 1)\, v.$$

Проводя оценки, аналогичные таковым в непрерывном случае, получаем оценку (12) и в случае времени $T = \mathbb{Z}$. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *Предположим, что линейное расширение* $p : (V,\ T;\ \pi) \to (Y,\ T,\ \rho)$ *допускает флаг инвариантных векторных подрасслоений* (9), *удовлетворяющих неравенствам* (10) *и* (11). *Тогда спектр этого расширения состоит из единственной точки нуль и оно удовлетворяет условиям Фавара всех порядков.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения теоремы о спектре вытекает из того факта, что флаг (9) исчерпывает все расслоение V, а также из неравенств (11) и леммы 1. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве предложения 2, приводим линейное расширение к блочно-треугольному виду с устойчивыми блоками на диагонали. Проведем еще одну замену переменных с помощью преобразования, состоящего из диагональных блоков коцикла. В итоге получим коцикл с унипотентной матрицей.

А теперь заметим, что p-я внешняя степень унипотентной матрицы является унипотентной матрицей. Действительно, элементы последней — это миноры p-го порядка $\chi_{H,K}$ (см. [19, с. 419]). Если $H > K$ в лексикографическом порядке, то $\chi_{H,K} = 0$, а $\chi_{H,H} = 1$ для любых p-индексов H и K из $\{1, 2, \ldots, n = \dim V\}$.

Наконец осталось заметить, что если $\Phi(\psi, t) = I + N(\psi, t)$, где $N(\psi, t)$ — нильпотентная матрица-функция, то $\inf \{\|\Phi(\psi, t)\, x\| : t \in T\} > 0$ для всякого $x \neq 0$, что и завершает доказательство предложения.

Объединим все эти утверждения в виде следующей теоремы, представляющей собой основной результат статьи.

Т е о р е м а. *Если линейное расширение* (3) *удовлетворяет условиям Фавара всех порядков равномерно по спектральному параметру, то его спектр состоит из конечного числа точек и каждое спектральное подрасслоение* V_λ *допускает флаг инвариантных векторных подрасслоений*

$$\{0\} \subset V_{\lambda,1} \subset V_{\lambda,2} \subset \ldots \subset V_{\lambda,s} = V_\lambda, \tag{15}$$

где $s = s(\lambda)$, *и таких, что*

$$V_{i,\lambda} = \{x \in V_\lambda : \sup_{t \in T} \| e^{-\lambda t} \pi^t(x) + V_{\lambda,i-1} \| < \infty\} \tag{16}$$

и для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ *существуют постоянные* $m_i,\ M_i > 0$, *для которых выполняются неравенства*

$$m_i \| x + V_{\lambda,i-1} \| \leqslant \| e^{-\lambda t} \pi(x) + V_{\lambda,i-1} \| \leqslant M_i \| x + V_{\lambda,i-1} \|, \quad x \in Y_{\lambda,i}. \tag{17}$$

Кроме того, для каждого подрасслоения $V_{\lambda,i}$ *найдется многочлен степени* $i - 1$ *с положительными коэффициентами* $P_{i-1}(t)$ *такой, что*

$$\| e^{-\lambda t} \pi^t(x) \| \leqslant P_{i-1}(|t|)\, \| x \|, \qquad x \in V_{\lambda,i}, \quad t \in T.$$

Обратно, если каждое спектральное подрасслоение допускает флаг инвариантных векторных подрасслоений, так что справедливы (15) *и* (16), *то линейное расширение удовлетворяет условиям Фавара всех порядков равномерно по спектральному параметру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямое утверждение совпадает с предложением 2 применительно к линейному расширению $p : (E,\ T,\ \pi_\lambda) \to (Y,\ T,\ \rho)$. Докажем обратное утверждение, которое не сводится к предложению 3. Для этого, рассуждая, как при доказательстве предложения 2, можем считать, что линейное расширение задано с помощью коцикла блочно-треугольного вида с диагональными блоками скалярного типа: $\Phi(\psi, t) = D + N(\psi, t)$ где $D = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t} I_1,\ e^{\lambda_2 t} I_2,\ \ldots,\ e^{\lambda_k t} I_h\}$. Здесь I_k — единичные матрицы размерностей, равных квадрату размерности соответствующего спектрального расслоения. Тогда для любого $p = 1, 2, \ldots, \dim E$ $\Lambda^p \Phi(\psi, t)$ имеет блочно-треугольный вид со скалярными блоками на диагонали вида $\exp[(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p)\, t]\, I$, где в сумме $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p$ точки λ_j спектра могут повторяться. Ясно, что $\Lambda^p \Phi(\psi, t)$ удовлетворяет условию Фавара всех порядков равномерно по спектральному параметру. Теорема доказана.

5. Некоторые нерешенные задачи.

1. В автономном, как и в периодическом, случае выполняются следующие неравенства между размерностями подрасслоений каждого спектрального флага: $\dim(V_1) \geqslant \dim(V_2/V_1) \geqslant \dim(V_3/V_2) \geqslant \ldots$ Что можно сказать о размерностях подрасслоений флага (15)?

2. При каких условиях этот флаг можно разбить на меньшие флаги? Скажем, при каких условиях какое-либо подрасслоение V_j из флага (15) допускает дополнительное инвариантное векторное подрасслоение?

3. Предположим, что линейное расширение (3) гладко, т. е. предположим, что все объекты (векторное расслоение, действие) принадлежат классу C^r, $r = 1, 2, \ldots, \infty, \omega$. В работе [22] доказано, что тогда спектральные подрасслоения тоже принадлежат классу C^r. При каких условиях флаг (15) будет C^r-гладким? Частичные результаты см. в [23].

4. Представляет интерес обобщение этих результатов, или их части, на случай линейных расширений с многомерным временем.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 248 с.
2. *Миллионщиков В. М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения.— 1968.— **4**, № 3.— С. 391—396.
3. *О топологических* причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, В. Я. Лин, О. В. Локуциевский // Пробл. асимптот. теории нелинейн. колебаний.— Киев : Наук. думка, 1977.— С. 54—61.
4. *Бронштейн И. У., Черний В. Ф.* Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. II // Дифференц. уравнения.— 1980.— **16**, № 2.— С. 201—207.
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М. : Наука, 1987.— 302 с.
6. *Блинов И. Н.* О проблеме приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Изв. АН СССР.— 1967.— **31**, № 2.— С. 349—354.
7. *Блинов И. Н.* О нарушении приводимости систем с квазипериодическими коэффициентами, вызванном недостаточно быстрым убыванием коэффициентов Фурье или неалгебраичностью базиса частот // Дифференц. уравнения.— 1970.— **6**, № 2.— С. 253—259.
8. *Главан В. А.* Об одном примере Блинова // Динамические системы и краевые задачи. Мат. исследования.— 1987.— Вып. 92.— С. 43—48 .
9. *Самойленко А. М., Главан В. А.* Поведение решений линейных квазипериодических систем вблизи резонансов // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 1.— С. 68—75.
10. *Главан В. А.* Топологическая интерпретация некоторых почти резонансных соотношений в дифференциальных уравнениях с квазипериодическими коэффициентами // Всесоюз. конф. «Нелинейн. пробл. дифференц. уравнений и мат. физики» (Тернополь, 12—15 сент. 1989 г.): Тез. докл.— Тернополь, 1989.— Ч. 1.— С. 98—99.
11. *Главан В. А.* О некоторых аномальных свойствах линейных систем с нечетными квазипериодическими коэффициентами // Геометрические методы в теории дифференциальных уравнений.— Кишинев: Штиинца, 1990.— С. 65—71.
12. *Favard J.* Sur les equations differentielles a coefficient presque periodique // Acta Math.— 1927.— **51**.— P. 31—81.
13. *Selgrade J. F.* Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— **203**.— P. 359—390.
14. *Sacker R. J., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems // J. Different. Equat.— 1978.— 27, N 3.— P. 320—358.
15. *Sacker R. J., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. III // Ibid.— 1976.— **22**, N 2.— P. 497—522.
16. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия (сводка результатов).— М. : Мир, 1975.— 220 с.
17. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований.— Кишинев : Штиинца, 1975.— 312 с.
18. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы.— Кишинев : Штиинца, 1984.— 292 с.
19. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра.— М. : Физматгиз, 1962.— 516 с.
20. *Rees M.* Tangentially distal flows // Israel J. Math.— 1980.— **35**, N 1—2.— P. 9—31.
21. *Ellis R., Johnson R. A.* Topological dynamics and linear differential systems // J. Different. Equat.— 1982.— **44**, N 1.— P. 21—39.
22. *Johnson R. A., Sell G. R.* Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasiperiodic linear differential systems // Ibid.— 1981.— **41**, N 2.— P. 262—288.
23. *Главан В. А.* Об одной задаче Джонсона—Селла // Разрывные динамические системы: Тез. докл. научн. конф. (11—14 сент. 1990 г., Ивано-Франковск).— Киев : *Знание*, 1990.— С. 9.

Получено 17.07.91