УДК 517.5

Н. В. Зорий, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Модульные, функциональные и потенциальные характеристики конденсаторов в области; соотношения между ними

Доказан ряд новых утверждений о соотношениях между известными модульными, функциональными и потенциальными характеристиками пространственных конденсаторов. Установлена теорема о непрерывности для модулей специальных семейств кривых.

Доведено ряд нових тверджень про співвідношення між відомими модульними, функціональними та потенціальними характеристиками просторових конденсаторів. Встановлено теорему про неперервність для модулів спеціальних сімей кривих.

1. Введение. Пусть D — область евклидова пространства $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$; $g(x, y) \equiv g_D(x, y)$, $x, y \in D$,— обобщенная функция Грина для D [1]; E^+, $E^- \subset D$ — непустые, замкнутые в D множества, удовлетворяющие условию

$$P(E) := \sup_{x \in E^+, y \in E^-} g(x, y) < +\infty. \tag{1}$$

Упорядоченную совокупность множеств $(E^+, E^-; D) = :E$ назовем конденсатором в D [2].

При $D = \mathbb{R}^p$ функция $g(x, y)$ суть ньютоново ядро $k_2(x, y) \equiv |x - y|^{2-p}$, $x, y \in \mathbb{R}^p$, поэтому условие (1) в определении конденсатора $(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ сводится к условию положительности евклидова расстояния между его «пластинами» E^+, E^-.

В настоящей работе получен ряд соотношений между известными модульными, функциональными и потенциальными характеристиками конденсаторов в D. В частности, в общем случае произвольного $E = (E^+, E^-; D)$ найдено представление гриновой емкости E через 2-модуль надлежащего семейства кривых и на его основании установлен пространственный аналог известной теоремы Минды [3]; получено утверждение о непрерывности для 2-модулей специальных семейств кривых. Доказанные здесь теоремы обобщают и усиливают ряд утверждений из [4—7].

2. Модульное представление гриновой емкости конденсатора. Приведем необходимые определения.

Для конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$ обозначим через $\mathfrak{N}^1(E)$ класс всех борелевских зарядов ν в D с жордановым разложением $\nu = \nu^+ - \nu^-$, у которых ν^+ и ν^- — единичные меры, сосредоточенные соответственно на E^+ и E^-. Величину $c(E) \equiv c_g(E) \equiv c_{g_D}(E^+, E^-; D)$,

$$c_{g_D}(E^+, E^-; D) := 1/\inf_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathcal{I}_{g_D}(\nu),$$

где

$$\mathcal{I}_{g_D}(\nu) := \iint_{D \times D} g_D(x, y)\, d\nu(x)\, d\nu(y)$$

— энергия заряда ν относительно гринова ядра $g_D(x, y)$ [1], назовем гриновой емкостью (g_D-емкостью) конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$.

Пусть $\overline{D}$ — одноточечное бикомпактное расширение области D; $\omega := \overline{D} \setminus D$ — точка Александрова для D; γ — (непрерывная) кривая в $\overline{D}$; $\gamma : (\tau_1, \tau_2) \to \overline{D}$, $\tau_1, \tau_2 \in [-\infty, +\infty]$,— некоторая ее параметризация [8]. Будем писать $\gamma \subset Q$ (Q — множество из $\overline{D}$), если $|\gamma| := \{x \in \overline{D} : x = \gamma(t)\} \subset Q$.

Обозначим $\Omega_\gamma := \{t \in (\tau_1, \tau_2) : \gamma(t) = \omega\}$. Множество Ω_γ замкнуто в (τ_1, τ_2), а сужение отображения γ на $(\tau_1, \tau_2) \setminus \Omega_\gamma$ порождает некоторый конечный или счетный набор кривых $\{l_i\}$ в D. Набор $\{l_i\}$ обозначим через $\gamma_{(0)} = \bigcup\limits_i l_i$ и назовем составной кривой в D, порожденной кривой $\gamma \subset \overline{D}$. Очевидно, составная кривая $\gamma_{(0)}$ инвариантна относительно выбора параметризации исходной кривой γ.

Все рассматриваемые в настоящей работе кривые $l \subset D$ подразумеваются локально спрямляемыми и такими, что сужение параметризации $l(t)$ на всякий интервал отлично от постоянного отображения.

Пусть $\{l\}$ — некоторое семейство составных кривых l в D; $\mathscr{F}(\{l\})$ — совокупность всех метрик (т. е. неотрицательных борелевых функций) ρ в $\mathbb{R}^p$ таких, что

$$\int\limits_l \rho ds := \sum_i \int\limits_{l_i} \rho ds \geqslant 1 \qquad \forall\, l = \bigcup_i l_i \in \{l\}.$$

Величину

$$M_2(\{l\}) := \inf_{\rho \in \mathscr{F}(\{l\})} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho^2(x)\, dx$$

называют 2-модулем семейства $\{l\}$ [9].

Если $\{\gamma\}$ — некоторое семейство кривых в $\overline{D}$, то его 2-модулем назовем величину

$$M_2(\{\gamma\}) := M_2(\{\gamma_{(0)}\}),$$

где $\{\gamma_{(0)}\}$ — семейство всех составных кривых $\gamma_{(0)}$ в D, порожденных кривыми $\gamma \in \{\gamma\}$.

Пусть Q_1, Q_2, Q — множества из $\overline{D}$. Скажем, что кривая $\gamma \subset \overline{D}$ соединяет Q_1 и Q_2, если замыкание множества $|\gamma|$ в $\overline{D}$ имеет непустые пересечения и с Q_1, и с Q_2. Совокупность всех кривых $\gamma \subset Q$, соединяющих Q_1 и Q_2, обозначим через $\Gamma(Q_1, Q_2; Q)$.

Справедливо следующее представление гриновой емкости конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$.

Теорема 1. *Верно равенство*

$$a_p c_{g_D}(E^+, E^-; D) = M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})), \tag{2}$$

где a_p — умноженная на $p-2$ площадь единичной гиперсферы в $\mathbb{R}^p$.

Пусть $\Gamma_\omega \equiv \Gamma_\omega(E^+, E^-)$ — семейство всех составных кривых $l = l_+ \cup l_-$ в D ($l_+, l_- \subset D$ — непрерывные кривые) таких, что $l_+ \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D)$, $l_- \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D)$. Составные кривые семейства Γ_ω соединяют E^+ и E^- «с помощью точки ω». Пересечение множества Γ_ω с множеством всех составных кривых в D, порожденных кривыми $\gamma \subset \overline{D}$, обозначим через $\Gamma^0_\omega \equiv \Gamma^0_\omega(E^+, E^-)$.

Лемма 1. *Верны равенства*

$$M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) = M_2(\Gamma^0_E), \tag{3}$$

$$M_2(\Gamma^0_E) = M_2(\Gamma_E), \tag{4}$$

где Γ_E и Γ^0_E — семейства составных кривых в D, определенные равенствами

$$\Gamma_E := \Gamma(E^+, E^-; D) \cup \Gamma_\omega, \quad \Gamma^0_E := \Gamma(E^+, E^-; D) \cup \Gamma^0_\omega.$$

Доказательство. Пусть Γ — семейство всех составных кривых в D, порожденных кривыми из $\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})$. Очевидно, $\Gamma^0_E \subset \Gamma$, и поэтому $M_2(\Gamma^0_E) \leqslant M_2(\Gamma)$. (Используемые здесь и ниже элементарные свойства модулей приведены, например, в [9].) С другой стороны, для всякого элемента $l \in \Gamma$ существует $l_1 \in \Gamma^0_E$ с $|l_1| \subset |l|$, — в таком случае говорят, что семейство Γ^0_E короче семейства Γ и пишут $\Gamma^0_E < \Gamma$. Но тогда $M_2(\Gamma) \leqslant M_2(\Gamma^0_E)$, откуда с учетом предыдущего неравенства следует (3).

Чтобы доказать (4), рассмотрим некоторую фиксированную последовательность ограниченных областей $\{D_m\}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{Cl}\, D_m \subset D_{m+1} \ \forall m, \quad \bigcup_m D_m = D,$$

и пусть $R_m := D_{m+1} \setminus \mathrm{Cl}\, D_m$. (Здесь и ниже $\mathrm{Cl}\, D_m \equiv D_m \cup \partial D_m$ — замыкание D_m в $\mathbb{R}^p$.) Обозначим через $\Gamma(R_m)$ семейство $\Gamma(\partial D_m, \partial D_{m+1}; R_m)$, а через Γ_m — семейство всех составных кривых l в R_m с бесконечным числом составляющих l_i, причем $l_i \in \Gamma(R_m)\ \forall i$. Тогда

$$M_2(\Gamma_m) = 0 \quad \forall m. \tag{5}$$

Действительно в силу конечности модуля $M_2(\Gamma(R_m))$ класс метрик $L_2(\mathbb{R}^p) \cap \mathcal{F}(\Gamma(R_m))$ содержит по крайней мере один элемент ρ_0. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\rho_0/n \in \mathcal{F}(\Gamma_m)$, и поэтому

$$M_2(\Gamma_m) \leqslant \frac{1}{n^2} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho_0^2(x)\, dx.$$

Устремив n к $+\infty$, находим (5). А так как, очевидно, выполняется соотношение $\bigcup\limits_m \Gamma_m < \Gamma_\omega \setminus \Gamma_\omega^0$, то из (5) в силу свойства полуаддитивности модулей находим $M_2(\Gamma_\omega \setminus \Gamma_\omega^0) = 0$. Отсюда вытекает (4).

Лемма 1 доказана. Теперь теорему 1 сформулируем в следующем равносильном виде.

Теорема 1′. *Для всякого $E = (E^+, E^-; D)$ справедливо равенство*

$$a_p c(E) = M_2(\Gamma_E). \tag{2'}$$

Доказательство. В случае, когда область D и каждая компонента зазора $D \setminus (E^+ \cup E^-)$ регулярны в смысле разрешимости классической задачи Дирихле (а такой конденсатор E назовем регулярным), утверждение теоремы 1′ установлено в [4]. Для доказательства в общем случае нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2 [2, 10]. *Справедливы неравенства*

$$C_g(E^+)^{-1} + C_g(E^-)^{-1} - 2\rho(E) \leqslant c(E)^{-1} \leqslant C_g(E^+)^{-1} + C_g(E^-)^{-1} - 2\rho(E),$$

где $\rho(E) := \inf\limits_{x \in E^+, y \in E^-} g(x, y)$, *а* $C_g(\cdot)$ — *емкость множества относительно гринова ядра* $g(x, y)$ [1].

Лемма 3. *Пусть* $E_k = (E_k^+, E_k^-; D)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *последовательность конденсаторов, удовлетворяющих условиям*

$$E_k^+ \subset E_{k+1}^+ \ \forall k, \qquad \bigcup_k E_k^+ = E^+,$$

$$E_k^- \subset E_{k+1}^- \ \forall k, \qquad \bigcup_k E_k^- = E^-$$

(*или, сокращенно,* $E_k \nearrow E$). *Тогда*

$$c(E) = \lim_{k \to +\infty} c(E_k), \tag{6}$$

$$M_2(\Gamma_E) = \lim_{k \to +\infty} M_2(\Gamma_{E_k}). \tag{7}$$

Действительно, в условиях леммы 3 верны соотношения $\Gamma_{E_k} \subset \Gamma_{E_{k+1}}$ $\forall k$, $\Gamma_E = \bigcup\limits_k \Gamma_{E_k}$. Применяя теорему 2.5.1 Цимера [11], получаем (7). Предельное равенство (6) доказано в [10] (лемма 5).

Конденсатор $E = (E^+, E^-; D)$ назовем компактным, если множество $E^+ \cup E^-$ ограничено в D. Пользуясь известным представлением [12] гриновых емкостей конденсаторов через 2-модули надлежащих семейств поверхностей, легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть заданы области D_k, $k = 1, 2, \ldots$, и компактные конденсаторы $E_k = (E_k^+, E_k^-; D_k)$ в них такие, что*

$$E_k^+ \supset E_{k+1}^+ \ \forall k, \qquad \bigcap_k E_k^+ = E^+, \tag{8}$$

$$E_k^- \supset E_{k+1}^- \ \forall k, \qquad \bigcap_k E_k^- = E^-, \tag{9}$$

$$D_k \subset D_{k+1} \ \forall\, k, \qquad \bigcup_k D_k = D.$$

Тогда g_{D_k}-емкости конденсаторов E_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют соотношениям

$$c(E_k) \geqslant c(E_{k+1}) \quad \forall\, k, \tag{10}$$

$$\lim_{k\to+\infty} c(E_k) = c(E).$$

Докажем теорему 1′ для компактного конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$.

Для каждого фиксированного достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ выберем в $\mathbb{R}^p$ замкнутые множества $Q_+ = Q_+(\varepsilon)$, $Q_- = Q_-(\varepsilon)$ и $Q = Q(\varepsilon)$ без иррегулярных точек (последнее из них, быть может, неограничено) так, чтобы выполнялась совокупность условий

а) множества $E_*^+ := E^+ \cup Q_+$, $E_*^- := E^- \cup Q_-$ и $D_* := D \setminus Q$ образуют компактный, регулярный конденсатор $E_* := (E_*^+, E_*^-; D_*)$;

б) его g_{D_*}-емкость удовлетворяет условию

$$c(E_*) < c(E) + \varepsilon/a_p; \tag{11}$$

в) ньютоновы емкости множеств Q_+, Q_- и Q меньше ε;

г) для всяких фиксированных ε_1 и ε_2, $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$, выполняется $Q_+(\varepsilon_2) \subset Q_+(\varepsilon_1)$, $Q_-(\varepsilon_2) \subset Q_-(\varepsilon_1)$, $Q(\varepsilon_2) \subset Q(\varepsilon_1)$.

В существовании таких множеств легко убедиться с помощью леммы Келлога [1] и леммы 4.

Применяя к (регулярному) конденсатору E_* теорему 1 из [4], имеем

$$M_2(\Gamma_{E_*}) = a_p c(E_*). \tag{12}$$

Но, очевидно, $\Gamma_{E_*} < \Gamma_E$, поэтому

$$M_2(\Gamma_E) \leqslant M_2(\Gamma_{E_*}). \tag{13}$$

Соединив соотношения (11)—(13), а затем воспользовавшись произвольностью ε, получаем оценку

$$M_2(\Gamma_E) \leqslant a_p c(E). \tag{14}$$

Чтобы доказать дополнительное к (14) неравенство

$$M_2(\Gamma_E) \geqslant a_p c(E), \tag{15}$$

рассмотрим систему конденсаторов

$$E_1 := (E^+, E^-; D_*), \quad E_2 := (Q_+, E_*^-; D_*),$$

$$E_3 := (E_*^+, Q_-; D_*), \quad E_4 := (E_*^+ \cup E_*^-, Q; \mathbb{R}^p)$$

и их емкости $c(E_i)$, $i = 1, \ldots, 4$ (вычисленные, очевидно, относительно ядра g_{D_*} при $i = 1, 2, 3$ и ядра Ньютона при $i = 4$). Из определений конденсаторов E_i, $i = 1, \ldots, 4$, и E_* непосредственно видна справедливость соотношений

$$\Gamma_{E_*} \subset \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_{E_i}, \quad \Gamma_{E_4} < \Gamma_{E_1} \setminus \Gamma_E,$$

откуда с помощью элементарных свойств модулей находим

$$M_2(\Gamma_{E_*}) \leqslant \sum_{i=1}^{3} M_2(\Gamma_{E_i}) \leqslant M_2(\Gamma_{E_1} \cap \Gamma_E) + M_2(\Gamma_{E_1} \setminus \Gamma_E) +$$

$$+ M_2(\Gamma_{E_2}) + M_2(\Gamma_{E_3}) \leqslant M_2(\Gamma_E) + \sum_{i=2}^{4} M_2(\Gamma_{E_i}). \tag{16}$$

Применив к (регулярным) конденсаторам E_* и E_i, $i=2, 3, 4$, теорему 1 из [4], а затем воспользовавшись неравенством $c(E_*) \geqslant c(E)$ (см. (10)), из (16) получаем

$$M_2(\Gamma_E) \geqslant a_p \left[c(E) - \sum_{i=2}^{4} c(E_i) \right].$$

Но емкость каждого из конденсаторов E_i, $i = 2, 3, 4$, может быть сделана как угодно малой за счет выбора ε,— это вытекает из условий в) и г) на основании леммы 2. Тем самым в силу произвольности ε доказано неравенство (15) и искомое равенство (2′) для компактного конденсатора E.

В случае некомпактного конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$ строим последовательность компактных конденсаторов $E_k = (E_k^+, E_k^-; D)$, $k = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующих E в смысле леммы 3. По доказанному

$$M_2(\Gamma_{E_k}) = a_p c(E_k) \quad \forall k. \tag{17}$$

Переходя в (17) к пределу по $k \to +\infty$, в силу предельных равенств (6) и (7) снова приходим к (2′).

Теоремы 1′ и 1 доказаны.

З а м е ч а н и я. 1. Справедливость теорем 1 и 1′ не нарушится, если в принятых определениях все кривые в D считать аналитическими.

2. Утверждение (2) в случае $D = \mathbb{R}^p$ может быть получено из результатов работ [5, 6, 13]. Действительно, пусть сначала конденсатор $E = (E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ компактен. Пользуясь функциональными описаниями ньютоновой емкости $c_{k_2}(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ (см. теоремы 2, 3 из [5] и теорему 1 из [6]), а затем теоремой Хессе [13] о соотношениях между функциональными и модульными характеристиками конденсаторов, убеждаемся в справедливости (2) и, кроме того, равенства

$$M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{\mathbb{R}^p})) = M_2(\Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)). \tag{18}$$

В случае некомпактного конденсатора $(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ эти утверждения доказываются с помощью аппроксимации E компактными конденсаторами $E_k \nearrow E$.

3. В связи с равенством (18) заметим, что в $\overline{\mathbb{R}^p}$, $p \neq 2$, 2-модуль семейства всех кривых, проходящих через точку ∞, строго больше нуля (в то время как конформный модуль такого семейства равен нулю [14]).

Приведем ряд следствий из теорем 1, 1′ и известных свойств гриновых емкостей конденсаторов [2, 15].

С л е д с т в и е 1. $M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) = 0$ *если и только если* $C_g(E^+) \times \times C_g(E^-) = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Следующие утверждения равносильны:*

i) $M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) = +\infty$;

ii) $C_g(E^+) = C_g(E^-) = +\infty$;

iii) $C_g(E^+) = C_g(E^+ \cup E^-) = C_g(E^-)$.

Пусть конденсаторы $E_k = (E_k^+, E_k^-; D)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $E = (E^+, E^-; D)$ удовлетворяют условиям (8) и (9) (в таком случае будем писать $E_k \searrow E$). Тогда, очевидно, последовательность модулей $\{M_2(\Gamma(E_k^+, E_k^-; \overline{D}))\}$ не возрастает и выполняется неравенство

$$M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) \leqslant \lim_{k\to+\infty} M_2(\Gamma(E_k^+, E_k^-; \overline{D})).$$

Следующее утверждение устанавливает условия, достаточные, а в некоторых случаях они и необходимые, для непрерывности модульной характеристики $M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D}))$ при аппроксимации $E_k \searrow E$.

Теорема 2. *Пусть $E_k \searrow E$. Если при этом*

$$\lim_{k\to+\infty} C_g(E_k^+) = C_g(E^+), \tag{19}$$

$$\lim_{k\to+\infty} C_g(E_k^-) = C_g(E^-), \tag{20}$$

то

$$c(E) = \lim_{k\to+\infty} c(E_k), \tag{21}$$

$$M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) = \lim_{k\to+\infty} M_2(\Gamma(E_k^+, E_k^-; \overline{D})). \tag{22}$$

Каждое из условий (19), (20), *вообще говоря, нельзя отбросить, не нарушив при этом справедливость равенств* (21), (22).

Утверждения теоремы 2 о непрерывности емкостной характеристики $c(\cdot)$ конденсаторов в D в случае $D = \mathbb{R}^p$ доказаны в [6]. В общем случае произвольной области D их доказательство проводится аналогично [6] с использованием результатов из [10] о полноте и других свойствах специальных пространств зарядов, а также следствия 1 из [15]. В силу равенства (2) верны и остальные утверждения теоремы 2.

Как вытекает из теоремы 2, характеристики $c(E)$ и $M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D}))$ непрерывны справа, что означает следующее.

Следствие 3. *Пусть $c(E) < +\infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют евклидовы окрестности G^+ и G^- множеств E^+ и E^- такие, что для всякого конденсатора F в D с пластинами F^+ и F^-, $E^+ \subset F^+ \subset G^+$ и $E^- \subset F^- \subset G^-$, выполняется*

$$c(F) - c(E) < \varepsilon,$$

$$M_2(\Gamma(F^+, F^-; \overline{D})) - M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) < \varepsilon.$$

Пусть $E_k \searrow E$. Приведем несколько замечаний, уточняющих содержание теоремы 2.

Замечания. 1. Пусть множества E_k^+, $k \geqslant k_0$, ограничены. Предельные равенства (21), (22) не выполняются, если и только если выполняется совокупность условий $C_g(E^-) < C_g(E^- \cup E^+)$, $C_g(E_k^-) = +\infty \ \forall k$.

2. Очевидно, соотношения (19) и (20) заведомо выполняются в случае ограниченности $E_k^+ \cup E_k^-$, $k \geqslant k_0$. Заметим также, что в этом случае теорема 2 допускает следующее обобщение.

Теорема 2′. *Пусть конденсаторы $E = (E^+, E^-; D)$ и $E_k = (E_k^+, E_k^-; D_k)$, $k = 1, 2, \dots$, — такие же, как в лемме* 4. Тогда

$$M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) = \lim_{k\to+\infty} M_2(\Gamma(E_k^+, E_k^-; \overline{D}_k)).$$

3. Модульные и функциональные характеристики конденсаторов; соотношения между ними. Утверждение (18) может быть существенно усилено и обобщено. А именно, пусть $Q := \mathbb{R}^p \setminus D$ — дополнение области D до $\mathbb{R}^p$, а $C_2(Q) \equiv C_{k_2}(Q)$ — его ньютонова емкость. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы для всяких непересекающихся компактов $F_1, F_2 \subset D$ выполнялось равенство*

$$M_2(\Gamma(F_1, F_2; D)) = M_2(\Gamma(F_1, F_2; \overline{D})), \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$C_2(Q) = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (24). Тогда [1] $g_D(x, y) = k_2(x, y)\ \forall\, x, y \in D$, и поэтому для всяких фиксированных непересекающихся компактов $F_1, F_2 \subset D$ справедливо равенство

$$c_{g_D}(F_1, F_2;\ D) = c_{k_2}(F_1, F_2;\ \mathbb{R}^p), \tag{25}$$

которое с учетом (2) может быть представлено в виде

$$M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ \overline{D})) = M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ \overline{\mathbb{R}^p})). \tag{26}$$

А так как в силу (24) выполняется

$$M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ D)) = M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ \mathbb{R}^p)),$$

то, соединяя (26) с утверждением (18), находим (23).

Обратно, предположим, что каковы бы ни были фиксированные непересекающиеся компакты $F_1, F_2 \subset D$, верно (23). Пусть $\nu' \equiv \nu'_Q$ — C-абсолютно непрерывное решение ньютоновой задачи выметания заряда ν, сосредоточенного в D, на Q [1]. Тогда при условии

$$C_2(F_1)\, C_2(F_2) \neq 0 \tag{27}$$

справедливо тождество

$$(\lambda_F)'_Q \equiv 0, \tag{28}$$

где $F := (F_1, F_2;\ \mathbb{R}^p)$ — (компактный) конденсатор в $\mathbb{R}^p$ с пластинами F_1 и F_2, а $\lambda_F \equiv \lambda$ — заряд из класса $\mathfrak{N}^1(F)$ с ньютоновой энергией

$$\mathcal{I}_{k_2}(\lambda) = 1/c_{k_2}(F_1, F_2;\ \mathbb{R}^p).$$

(В силу (27) и компактности F такой заряд λ_F существует и единственен [2].)

Действительно, учитывая очевидные неравенства

$$M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ D)) \leqslant M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ \mathbb{R}^p)) \leqslant M_2(\Gamma(F_1, F_2;\ \overline{D})),$$

утверждение (18) и условие (23), убеждаемся в справедливости равенства (26) и, следовательно, (25). А так как верна цепочка соотношений

$$\mathcal{I}_{k_2}(\lambda) \geqslant \mathcal{I}_{k_2}(\lambda) - \mathcal{I}_{k_2}(\lambda') = \mathcal{I}_{g_D}(\lambda) \geqslant 1/c_{g_D}(F_1, F_2;\ D),$$

то равенство (25) возможно лишь в случае $\mathcal{I}_{k_2}(\lambda') = 0$, что равносильно (28) [1].

Покажем, что в силу произвольности F_1, F_2 тождество (28) влечет за собой (24). Пусть, от противного, $C_2(Q) > 0$. Выберем компакт $K \subset Q$ с $C_2(K) > 0$ так, чтобы его ньютонов равновесный потенциал $\mathcal{U}_2^{\gamma_K}$ [1] не был тождественно постоянен в D. Согласно принципу выметания «с отдыхом» [1], из (28) получаем

$$(\lambda_F^+)'_K = (\lambda_F^-)'_K, \tag{29}$$

где λ_F^+ и λ_F^- — меры из жорданова разложения заряда λ_F. Выберем точки $x_1, x_2 \in D$ и их окрестности $B(x_1)$, $B(x_2)$ в D так, чтобы выполнялось

$$\sup_{x \in B(x_1)} \mathcal{U}_2^{\gamma_K}(x) < \inf_{x \in B(x_2)} \mathcal{U}_2^{\gamma_K}(x).$$

Тогда для всякого конденсатора $F^0 = (F_1^0, F_2^0;\ \mathbb{R}^p)$, удовлетворяющего условиям

$$F_1^0 \subset B(x_1), \quad F_2^0 \subset B(x_2), \quad C_2(F_1^0)\, C_2(F_2^0) \neq 0,$$

имеем [1]

$$(\lambda_{F^0}^+)'_K(\mathbb{R}^p) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \mathcal{U}_2^{\gamma_K}(x)\, d\lambda_{F^0}^+(x) \leqslant \sup_{x \in B(x_1)} \mathcal{U}_2^{\gamma_K}(x) <$$

$$< \inf_{x\in B(x_2)} \mathcal{U}_2^{\nu_K}(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^p} \mathcal{U}_2^{\nu_K}(x)\, d\lambda_{\overline{F^0}}(x) = (\lambda_{\overline{F^0}})'_K(\mathbb{R}^p),$$

что противоречит (29).

Теорема 3 доказана. Аналогичный результат на плоскости установлен Миндой [3].

Для конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$ обозначим через $\mathcal{L}_D(E)$ совокупность всех непрерывных функций $f: D \to \mathbb{R}^1$, которые абсолютно непрерывны на линиях в D [14] и принимают значения 1 на E^+ и 0 на E^-. Пусть $\mathcal{L}_{\overline{D}}(E)$ — его подмножество, состоящее из всех $f \in \mathcal{L}_D(E)$, допускающих непрерывное продолжение на $\overline{D}$. Функциональной емкостью конденсатора E относительно $\overline{D}$ назовем величину [7]

$$\operatorname{Cap}_{\overline{D}} E := \inf_{f\in\mathcal{L}_{\overline{D}}(E)} \int\limits_D |\operatorname{grad} f(x)|^2\, dx.$$

(Инфимум по пустому множеству полагаем равным $+\infty$.) В случае $D = \mathbb{R}^p$ емкость $\operatorname{Cap}_{\overline{D}} E$ совпадает с известным понятием 2-емкости конденсатора в $\overline{\mathbb{R}^p}$ [13, 16], а в случае $D \neq \mathbb{R}^p$ является его естественным обобщением.

Справедливы следующие утверждения о соотношениях между модульными, функциональными и потенциальными характеристиками конденсаторов $E = (E^+, E^-; D)$.

Замыкание множества $B \subset D$ в топологии пространства $\overline{D}$ обозначим через $\tilde{B}$.

Теорема 4. *Пусть $\omega \notin \overline{E^+}$. Верны равенства*

$$\operatorname{Cap}_{\overline{D}} E = \begin{cases} a_p c_g(E), \text{ если } \omega \notin \overline{E^-}, \\ a_p C_{g_{D\setminus E^-}}(E^+), \text{ если } \omega \in \overline{E^-}. \end{cases} \tag{30}$$

В случае $\omega \in \overline{E^-}$ равенство $\operatorname{Cap}_{\overline{D}} E = a_p c_g(E)$ справедливо в том и только в том случае, когда

$$C_g(E^+ \cup E^-) = C_g(E^-). \tag{31}$$

Представление (30) доказано в [7]; последующее утверждение вытекает из (30) и описания гринова потенциала заряда, экстремального для $c_g(E)$ [15]. В случае $D = \mathbb{R}^p$ эти результаты доказаны в [5].

Замечания. 1. Очевидно, справедливо также симметричное утверждение, полученное из теоремы 4 путем повсеместной замены индексов «+» на «—» и «—» на «+».

2. В случае связности множества $D \setminus E^-$ условие (31) равносильно условию $C_g(E^-) = +\infty$.

Теорема 5. *Для всякого $E = (E^+, E^-; D)$ справедливо равенство*

$$\operatorname{Cap}_{\overline{D}} E = M_2(\Gamma(\overline{E^+}, \overline{E^-}; \overline{D})). \tag{32}$$

Заметим, что в случае $\overline{E^+} \cap \overline{E^-} = \{\omega\}$ каждая величина из соотношения (32) равна $+\infty$.

При некоторых условиях регулярности, наложенных в случае компактного конденсатора E, теорема 5 доказана в [7]. Соединяя теоремы 1 и 4, убеждаемся в справедливости (32) в общем случае.

Для конденсаторов в $\mathbb{R}^p$ теорема 5 установлена Хессе [13].

Из теорем 1, 4 и 5 получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *В случае $\omega \in (\overline{E^+} \cup \overline{E^-}) \setminus (\overline{E^+} \cap \overline{E^-})$ равенство*

$$M_2(\Gamma(E^+, E^-; \overline{D})) = M_2(\Gamma(\overline{E^+}, \overline{E^-}; \overline{D}))$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$C_g(E^+ \cup E^-) = \max\{C_g(E^+), C_g(E^-)\}.$$

Экстремальную характеристику [17]

$$\mathrm{Cap}_D E = \inf_{f \in \mathscr{L}_D(E)} \int_D |\operatorname{grad} f(x)|^2 dx$$

назовем функциональной емкостью конденсатора E относительно D. Заметим, что в отличие от определения емкостей, принятых в [13, 16], в определении $\mathrm{Cap}_D E$ не налагаются ограничения на поведение функций $f \in \mathscr{L}_D(E)$ в окрестности точек $x \in \partial_{\overline{\mathbb{R}^p}} D$, даже если они предельны для $E^+ \cup E^-$. Емкость $\mathrm{Cap}_D E$ совпадает с одной из емкостей, исследованных в [13], если граничное множество $\partial_D(E^+ \cup E^-)$ — компакт.

Теорема 6. *Следующие утверждения равносильны:*

i) *область D удовлетворяет условию* (24);

ii) *для всякого компактного конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$ выполняется*

$$\mathrm{Cap}_D E = \mathrm{Cap}_{\overline{D}} E; \tag{33}$$

$$\text{iii)}\ \mathrm{Cap}_D E = a_p c_{g_D}(E) \quad \forall E = (E^+, E^-; D). \tag{34}$$

Доказательство. Согласно [13], для всякого компактного конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$ справедливо представление

$$\mathrm{Cap}_D E = M_2(\Gamma(E^+, E^-; D)). \tag{35}$$

Из теоремы 3 и равенств (32), (35) вытекает эквивалентность утверждений i) и ii), а справедливость импликации iii) $\Rightarrow$ ii) непосредственно видна из представления (30). Теорема 6 будет доказана, если мы убедимся в справедливости утверждения i) $\Rightarrow$ iii).

Пусть верно (24). В случае $D = \mathbb{R}^p$ равенство (34) установлено в [5, 6], а в случае компактного конденсатора $E = (E^+, E^-; D)$, $D \subset \mathbb{R}^p$, вытекает из уже доказанных соотношений (30) и (33). В общем случае некомпактного $E = (E^+, E^-; D)$ рассмотрим последовательность компактных конденсаторов $E_k = (E_k^+, E_k^-; D)$ $E_k \nearrow E$. Цепочка соотношений

$$\mathrm{Cap}_D E \geqslant \lim_{k\to+\infty} \mathrm{Cap}_D E_k = a_p \lim_{k\to+\infty} c_g(E_k)$$

вместе с утверждением (6) доказывает неравенство

$$\mathrm{Cap}_D E \geqslant a_p c_g(E). \tag{36}$$

Для доказательства дополнительного к (36) неравенства

$$\mathrm{Cap}_D E \leqslant a_p c_g(E) \tag{37}$$

заметим, что при условии (24) множества $F^+ := \mathrm{Cl}\, E^+$ и $F^- := \mathrm{Cl}\, E^-$ образуют конденсатор $F = (F^+, F^-; \mathbb{R}^p)$, причем справедливы соотношения

$$c_{k_2}(F) = c_{g_D}(E), \quad \mathrm{Cap}_{\mathbb{R}^p} F \geqslant \mathrm{Cap}_D E.$$

Соединяя их с равенством $\mathrm{Cap}_{\mathbb{R}^p} F = a_p c_{k_2}(F)$, находим (37). Теорема 6 доказана.

Из теоремы 6, леммы 3 и приведенных выше результатов Хессе [13], Цимера [11] вытекает такое следствие.

Следствие 5. *Если выполнено условие* (24), *то*

$$\mathrm{Cap}_D E = M_2(\Gamma(E^+, E^-; D)) \quad \forall E = (E^+, E^-; D).$$

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
2. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Докл. АН СССР.— 1989.— **307**, № 2.— С. 265—269.
3. *Rodin B.* The method of extremal length // Bull. Amer. Math. Soc.— 1974.— **80**, N 4.— P. 587—606.
4. *Зорий Н. В.* Экстремальные длины и гриновы емкости конденсаторов // Укр. мат. журн. — 1990.— **42**, № 3.— С. 317—323.
5. *Зорий Н. В.* Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними // Там же.— 1987.— **39**, № 5.— С. 565—573.
6. *Зорий Н. В.* О ньютоновых емкостях конденсаторов //Вопросы анализа и приближения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 67—75.
7. *Зорий Н. В.* О емкостях конденсаторов // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 7.— С. 912—918.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.— 542 с.
9. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math.— 1957.— **98**, N 3—4.— P. 171—219.
10. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. II // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 11.— С. 1475—1480.
11. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— **126**, N 3.— P. 460—473.
12. *Зорий Н. В.* Модули семейств поверхностей и гриновы емкости конденсаторов // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 1.— С. 64—69.
13. *Hesse J.* A *p*-extremal length and *p*-capacity equality // Ark. mat.— 1975.— **13**, N 1.— P. 131—144.
14. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения.— Новосибирск: Наука, 1983.— 150 с.
15. *Зорий Н. В.* К задаче о минимуме гриновой энергии на конденсаторах // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 50—57.
16. *Ziemer W. P.* Extremal length and *p*-capacity // Mich. Math. J. — 1969.— **16**, N 1.— P. 43—51.
17. *Григорьян А. А.* О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле // Мат. сб.— 1987.— **132 (174)**, № 4.— С. 496—516.

Получено 18.10.91