УДК 517.5

В. Н. Коновалов, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Приближение алгебраическими многочленами функций из пространств Соболева

Для пространств Соболева $w_\infty^r(\Omega)$ установлена теорема о совместном приближении алгебраическими многочленами функций и их производных.

Для просторів Соболева $w_\infty^r(\Omega)$ встановлена теорема про спільне наближення алгебраїчними многочленами функцій та їх похідних.

В настоящей статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство векторов (точек) $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $|x| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$; $|\Omega|$ — диаметр множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\rho(x, \Omega)$ — евклидово расстояние от x до множества Ω; Z^n — множество всех векторов (мультииндексов) $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами; $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$; $D^\alpha f$ — обычная или обобщенная в смысле Соболева производная, соответствующая мультииндексу $\alpha \in Z^n$; $w_\infty^r(\Omega)$ — изотропное пространство Соболева функций $f : \Omega \to \mathbb{R}^1$ с полунормой

$$\|f\|_{w_\infty^r(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=r} \|\alpha^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad r \in \mathbf{N}^1;$$

$w^r(\Omega)$ — пространство функций $f: \Omega \to \mathbf{R}^1$, имеющих в каждой точке $x \in \Omega$ обычные производные $D^{r-1}(e) f(x)$ порядка $r-1$ по каждому направлению $e \in \mathbf{R}^n$, $|e| = 1$, являющиеся абсолютно непрерывными функциями на каждом одномерном отрезке $\mathcal{J}_e^1 \subset \Omega$, коллинеарном вектору e; полунорма в $w^r(\Omega)$ задается соотношением

$$\|f\|_{w^r(\Omega)} := \sup_{e \in R^n,\ \|e\|=1} \sup_{\mathcal{J}_e^1 \subset \Omega} \|D^r(e) f\|_{L_\infty(\mathcal{J}_e^1)};$$

$\mathcal{P}_N(\mathbf{R}^n)$ — пространство алгебраических многочленов $P_N(x) := \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha x^\alpha$, $N \in \mathbf{N}^1$; $\rho_r(x, y)_\Omega$ — функция $\rho_r(\cdot;\ \cdot)_\Omega : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}^1$, определяемая для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$\rho_r(x, y)_\Omega := \inf_{\gamma(x,y) \subset \Omega} \int\limits_{\gamma(x,y)} (|x - z| + |z - y|)^{r-1} ds, \quad r \in \mathbf{N}^1,$$

где $\inf$ берется по всем спрямляемым дугам $\gamma(x, y) \subset \Omega$, соединяющим x с y, точка z пробегает $\gamma(x, y)$, $\int\limits_{\gamma(x,y)}$ — криволинейный интеграл первого рода, ds — дифференциал длины дуги; $\lambda_r(\delta)_\Omega$ — функция $\lambda_r(\cdot)_\Omega : \mathbf{R}_+^1 \to \mathbf{R}_+^1$, определяемая соотношением

$$\lambda_r(\delta)_\Omega := \sup_{\substack{\{x, y\} \subset \Omega, \\ |y - y| \leqslant \delta}} \rho_r(x, y)_\Omega.$$

Лемма. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, $f \in w^r(\Omega)$, $r \in \mathbf{N}^1$, $\{x, y\} \subset \Omega$, $t_{r-1}(f;\ x, y)$ — многочлен Тейлора степени $r-1$ для функции f, построенный относительно точки y, $s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}$, $s < r$, $\alpha \in \mathbf{Z}^n$, $|\alpha| = s$. Тогда справедливо неравенство*

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha t_{r-1}(f;\ x, y)| \leqslant c \|f\|_{w^r(\Omega)} \rho_{r-s}(x, y)_\Omega, \tag{1}$$

где $c = c(n, r)$ зависит лишь от n и r.

Теорема. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, $|\Omega| = 1$, $\lambda_r(1) < \infty$, $r \in \mathbf{N}^1$, $f \in w_\infty^r(\Omega)$. Тогда для каждого фиксированного $k \in \mathbf{R}_+^1$ и каждого $N \in \mathbf{N}^1$, $N \geqslant r$, существует алгебраический многочлен $P_N(f;\ \cdot) \in \mathcal{P}_N(\mathbf{R}^n)$ такой, что*

$$\|f - P_N(f)\|_{w_\infty^s(\Omega)} \leqslant c \|f\|_{w_\infty^r(\Omega)} N^{s-k} \int\limits_{N^{-1}}^{1+N^{-1}} \delta^{-(k+1)} \lambda_r(\delta)_\Omega d\delta,$$

$$s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}, \quad s < r,$$

$$\|P_N(f)\|_{w_\infty^s(\Omega)} \leqslant c \|f\|_{w_\infty^r(\Omega)} N^{s-k} \int\limits_{N^{-1}}^{1+N^{-1}} \delta^{-(k+1)} \lambda_r(\delta)_\Omega d\delta,$$

$$s \in \mathbf{N}^1, \quad s \geqslant r,$$

где $c = c(n, k, r, s)$.

Следствие 1. *Если Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ такая, что $\lambda_r(|\Omega|)_\Omega < \infty$, $\lambda_r(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, то для каждой функции $f \in w_\infty^r(\Omega)$ существует последовательность $\{P_N(f, x),\ N \geqslant 1\}$ алгебраических многочленов $P_N(f;\ \cdot) \in \mathcal{P}_N(\mathbf{R}^n)$ таких, что $P_N(f) \to f$, $N \to \infty$ в метрике пространства $L_\infty(\Omega)$.*

Следствие 2. *Если выполнены условия следствия 1, то для каждой функции $f \in w_\infty^r(\Omega)$ существует функция $\tilde{f}$, совпадающая с f почти всюду на Ω и являющаяся равномерно непрерывной на Ω.*

С л е д с т в и е 3. *Если выполнены условия теоремы и, кроме того, существуют числа* $M > 0$, $\mu > 0$ *такие, что*

$$\lambda_r(\tau\delta)_\Omega \leqslant M(1+\tau)^\mu \lambda_r(\delta)_\Omega, \quad \{\tau, \delta\} \subset \mathbf{R}^1_+,$$

то при каждом $N \in \mathbf{N}^1$, $N \geqslant r$, *существует алгебраический многочлен* $P_N(f;\cdot) \in \mathcal{P}_N(\mathbf{R}^n)$ *такой, что*

$$\|f - P_N(f)\|_{w^s_\infty(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{w^r_\infty(\Omega)} N^s \lambda_r(N^{-1})_\Omega, \quad s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}, \quad s < r,$$

$$\|P_N(f)\|_{w^s_\infty(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{w^r_\infty(\Omega)} N^s \lambda_r(N^{-1})_\Omega, \quad s \in \mathbf{N}^1, \quad s \geqslant r,$$

где $c = c(n, r, s, M, \mu)$.

С л е д с т в и е 4. *Если выполнены условия теоремы и, кроме того, существует число* $M > 0$ *такое, что*

$$\lambda_r(\delta)_\Omega \leqslant M\delta^r, \quad \delta \in \mathbf{R}^1_+,$$

то при каждом $N \in \mathbf{N}^1$, $N \geqslant r$, *существует алгебраический многочлен* $P_N(f;\cdot) \in \mathcal{P}_N(\mathbf{R}^n)$ *такой, что*

$$\|f - P_N(f)\|_{w^s_\infty(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{w^r_\infty(\Omega)} N^{s-r}, \quad s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}, \quad s < r,$$

$$\|P_N(f)\|_{w^s_\infty(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{w^r_\infty(\Omega)} N^{s-r}, \quad s \in \mathbf{N}^1, \quad s \geqslant r,$$

где $c = c(n, r, s, M)$.

З а м е ч а н и е. Лемма устанавливается с помощью рассуждений аналогичных тем, которые использовались при доказательстве леммы 4 [1] (см. также [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Зафиксируем произвольную функцию $f \in w^r(\Omega)$ и произвольные четные числа $N \in \mathbf{N}^1$, $\nu \in \mathbf{N}^1$, $\nu > n$. Разобьем все пространство R^n на попарно непересекающиеся кубы Q диаметра N^{-1}. Рассмотрим все непустые пересечения $G := Q \cap \Omega$ и занумеруем каким-либо образом эти множества: G_m, $m = \overline{1, M}$.

Воспользовавшись леммой 1 [3], построим алгебраические многочлены $P_{\nu N}(\cdot, G_m) \in \mathcal{P}_{\nu N}(\mathbf{R}^n)$, $m = \overline{1, M}$, такие, что

$$0 \leqslant P_{\nu N}(x, G_m) \leqslant 1, \quad m = \overline{1, M}, \quad x \in \Omega,$$

$$\sum_{m=1}^{M} P_{\nu N}(x, G_m) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

$$P_{\nu N}(x, G_m) \leqslant c(1 + N^{-1}\rho(x, G_m))^{n-\nu}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$|D^s(e) P_{\nu N}(x, G_m)| \leqslant cN^{-s}(1 + N^{-1}\rho(x, G_m))^{n-\nu}, \quad m = \overline{1, M},$$
$$x \in \Omega, \quad e \in \mathbf{R}^n, \quad |\varepsilon| = 1, \tag{3}$$

где $c = c(n, \nu, s)$.

Зафиксировав в каждом из множеств G_m какую-нибудь точку x_m, полагаем

$$P_{\nu,N}(f; x) := \sum_{m=1}^{M} t_{r-1}(f; x, x_{(m)}) P_{\nu N}(x, G_m).$$

Так как многочлены $P_{\nu N}(x, G_m)$, $m = \overline{1, M}$, образуют разбиение единицы на Ω, то при $s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}$, $s < r$, $e \in \mathbf{R}^n$, $|e| = 1$ справедливы равенства

$$D^s(e) f(x) - D^s(e) P_{\nu,N}(f; x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{m=1}^{M} \binom{s}{\sigma} (D^\sigma(e) f(x) -$$
$$- D^\sigma(e)\, t_{r-1}(f; x, x_{(m)}) D^{s-\sigma}(e) P_{\nu N}(x, G_m),$$

а при $s \in \mathbf{N}^1$, $s \geqslant r$, $e \in \mathbf{R}^n$, $|e| = 1$ справедливы равенства

$$D^s(e) P_{\nu,N}(f;\ x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{m=1}^{M} \binom{s}{\sigma} D^\sigma(e)\, t_{r-1}(f;\ x, x_{(m)})\, D^{s-\sigma}(e) P_{\nu N}(x, G_m) =$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{m=1}^{M} \binom{s}{\sigma} (D^\sigma(e) f(x) - D^\sigma(e)\, t_{r-1}(f;\ x, x_{(m)}))\, D^{s-\sigma}(e) P_{\nu N}(x, G_m)$$

для всех $x \in \Omega$.

Из этих равенств и неравенств (1)—(3) следуют оценки

$$|D^s(e) f(x) - D^s(e) P_{\nu,N}(f;\ x)| \leqslant \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{m=1}^{\sigma} \binom{s}{\sigma} |D^\sigma(e) f(x) -$$

$$- D^\sigma(e)\, t_{r-1}(f;\ x,\ x_{(m)})|\, |D^{s-\sigma}(e) P_{\nu N}(x, G_m)| \leqslant c \|f\|_{\omega^r(\Omega)} \times$$

$$\times \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{m=1}^{M} \rho_{r-\sigma}(x, x_{(m)})_\Omega N^{s-\sigma} (1 + N^{-1} \rho(x, G_m))^{n-\nu},$$

$$|D^s(e) P_{\nu,N}(f;\ x)| \leqslant \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{m=1}^{M} \binom{s}{\sigma} |D^\sigma(e) f(x) - D^\sigma(e)\, t_{r-1}(f;\ x, x_{(m)})| \times$$

$$\times |D^{s-\sigma}(e) P_{\nu N}(x, G_m)| \leqslant c \|f\|_{\omega^r(\Omega)} \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{m=1}^{M} \rho_{r-\sigma}(x, x_{(m)})_\Omega N^{s-\sigma} \times$$

$$\times\ (1 + N^{-1} \rho(x,\ G_m))^{n-\nu},$$

где $c = c(n, \nu, r, s)$.

Если $x \in G_{\overline{m}}$, $1 \leqslant \overline{m} \leqslant M$, то справедливо неравенство

$$\rho_{s-\sigma}(x, x_{(m)}) \leqslant \lambda_{r-\sigma}(|x - x_{(m)}|)_\Omega \leqslant \lambda_{r-\sigma}(N^{-1} + \rho(x_{(\overline{m})}, G_m))_\Omega,$$

а следовательно, и неравенства

$$|D^s(e) f(x) - D^s(e) P_{\nu,N}(f;\ x)| \leqslant c_1 \|f\|_{\omega^r(\Omega)} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{m=1}^{M} \lambda_{r-\sigma}(N^{-1} +$$

$$+ \rho(x_{(\overline{m})}, G_m))_\Omega N^{s-\sigma} (1 + N^{-1} \rho(x_{(\overline{m})}, G_m))^{n-\nu} \leqslant c_2 \|f\|_{\omega^r(\Omega)} \times$$

$$\times \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{l=1}^{N} l^n \lambda_{r-\sigma}\left(\frac{l}{N}\right) N^{s-\sigma} l^{n-\nu},$$

$$|D^s(e) P_{\nu,N}(f;\ x)| \leqslant c_1 \|f\|_{\omega^r(\Omega)} \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{m=1}^{M} \lambda_{r-\sigma}(N^{-1} + \rho(x_{\overline{m}}, G_m))_\Omega N^{s-\sigma} (1 +$$

$$+ N^{-1} \rho(x_{(\overline{m})}, G_m))^{n-\nu} \leqslant c_2 \|f\|_{\omega^r(\Omega)} \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{l=1}^{N} l^n \lambda_{r-\sigma}\left(\frac{l}{N}\right)_\Omega N^{s-\sigma} l^{n-\nu},$$

где $c_1 = c_1(n, \nu, r, s)$, $c_2 = c_2(n, \nu, r, s)$.

Учитывая, что $\lambda_r(\delta)_\Omega \geqslant \delta^\sigma \lambda_{r-\sigma}(\delta)_\Omega$, $\delta \in (0, 1]$, получаем оценки

$$|D^s(e) f(x) - D^s(e) P_{\nu,N}(f;\ x)| \leqslant c \|f\|_{\omega^r(\Omega)} N^s \sum_{l=1}^{N} l^{2n-\nu} \lambda_r(lN^{-1})_\Omega,$$

$$|D^s(e)\,P_{\nu,N}(f;\;x)| \leqslant c\,\|f\|_{w^r(\Omega)} N^s \sum_{l=1}^{N} l^{2n-\nu}\lambda_r(lN^{-1})_\Omega,$$

где $c = c(n,\,\nu,\,r,\,s)$.

Так как правые части этих неравенств не зависят от x и e, то справедливы оценки

$$\|f - P_{\nu,N}(f)\|_{w^s(\Omega)} \leqslant c\,\|f\|_{w^r(\Omega)} N^s \sum_{l=1}^{N} l^{2n-\nu}\lambda_r(lN^{-1})_\Omega,$$

$$s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}, \quad s < r,$$

$$\|P_{\nu,N}(f)\|_{w^s(\Omega)} \leqslant c\,\|f\|_{w^r(\Omega)} N^s \sum_{l=1}^{N} l^{2n-\nu}\lambda_r(lN^{-1})_\Omega,$$

$$s \in \mathbf{N}^1, \quad s \geqslant r,$$

где $c = c(n, \nu, r, s)$.

Из этих оценок следует, что при каждом фиксированном $k > 0$ и каждом $N \in \mathbf{N}^1$, $N \geqslant r$, существует алгебраический многочлен $P_N(f;\,\cdot) \in \mathcal{P}_N(\mathbf{R}^n)$ такой, что

$$\|f - P_N(f)\|_{w^s(\Omega)} \leqslant c\,\|f\|_{w^r(\Omega)} N^{s-k} \int_{N^{-1}}^{1+N^{-1}} \delta^{-(k+1)}\lambda_r(\delta)_\Omega d\delta,$$

$$s \in \mathbf{N}^1 \cup \{0\}, \quad s < r,$$

$$\|P_N(f)\|_{w^s(\Omega)} \leqslant c\,\|f\|_{w^r(\Omega)} N^{s-k} \int_{N^{-1}}^{1+N^{-1}} \delta^{-(k+1)}\lambda_r(\delta)_\Omega d\delta,$$

$$s \in \mathbf{N}^1, \quad s \geqslant r,$$

где $c = c(n, k, r, s)$.

Учитывая эквивалентность пространств $w^r(\Omega)$ и $w^r_\infty(\Omega)$ (см. лемму 7 [4]), из этих неравенств получаем утверждение теоремы для функций $f \in w^r_\infty(\Omega)$. Теорема доказана.

Утверждения следствий 1—4 проверить несложно (см., например, [2]).

1. *Коновалов В. Н.* Дифференциальные свойства и приближение функций многих переменных.— Киев, 1979.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 79.21).
2. *Коновалов В. Н.* Исследования по приближению и продолжению функций многих действительных переменных: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1985.— 300 с.
3. *Коновалов В. Н.* Аппроксимационная теорема типа Джексона для функций многих переменных // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 6.— С. 757—764.
4. *Коновалов В. Н.* Описания следов некоторых классов функций многих переменных.— Киев, 1984.— 64 с.— (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 84.21).

Получено 11.12.89