УДК 517.538.3

**И. Курбанов,** канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

# О гладкости обобщенных решений краевых задач элетродинамики с общими материальными уравнениями

Изучаются вопросы разрешимости и гладкости обобщенных решений краевых задач электродинамики с общими материальными уравнениями. Доказана теорема существования и единственности, а также исследована гладкость обобщенных решений указанных задач. Установлены новые априорные оценки с помощью обобщения неравенства Гронуолла—Беллмана.

Вивчаються питання розв'язності і гладкості узагальнених розв'язків крайових задач електродинаміки з узагальненими матеріальними рівняннями. Доведена теорема існування і єдиності, а також досліджена гладкість узагальнених розв'язків зазначених задач. Встановлені нові апріорні оцінки за допомогою узагальнених нерівностей Гронуолла — Беллмана.

1. Пусть $\Omega$ — ограниченная область изменений $x = (x_1, x_2, x_3)$, а $S$ — граница этой области. В области $\Omega$ рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D(E)}{\partial t} + J(E) + J_{\text{ст}}(x, t), \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} E = -\partial B(H)/\partial t, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} D(E) = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} B(E) = 0 \tag{4}$$

с общими материальными уравнениями вида [1, 2]

$$B(H) = \mu H + \int_0^t \psi(t-\tau) H(\tau)\, d\tau,$$

$$D(E) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi(t-\tau) E(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

$$J(E) = \sigma(|E|) E,$$

для вектор-функций $H = \{H_1(x, t), H_2(x, t), H_3(x, t)\}$ и $E = \{E_1(x, t), E_2(x, t), E_3(x, t)\}$ при граничных и начальных условиях

$$E_\tau|_S = 0, \tag{6}$$

$$E(x, 0) = E_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x). \tag{7}$$

Требуется определить электромагнитное поле в $\Omega$, если в начальный момент известны $E$ и $H$. Задача сводится к нахождению векторов $E$ и $H$, удовлетворяющих в цилиндре $Q = \Omega \times ]0, T[$, $(x \in \Omega,\ t \in [0, T[)$, системе (1)—(4), начальным условиям (7) и граничному условию (6) на $S$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения: $L^2_{(\Omega)}$ — гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_\Omega u \cdot v dx, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)},$$

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^3 u_i v_i, \quad u \cdot u = u^2,$$

$W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^3 (u_{x_i}, v_{x_i}) + (u, v),$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — подпространство $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором являются все непрерывно дифференцируемые векторы, равные нулю в пограничных полосках, а также пространства

$$X = \{E \mid E \in L^2_{(\Omega)},\quad \operatorname{div} E = 0,\quad E_\tau|_S = 0\},$$

$$Y = \{H \mid H \in L^2_{(\Omega)},\quad \operatorname{div} H = 0\quad H_n|_S = 0\},$$

которые определяются следующим образом.

Определение 1. *$X$ есть подпространство $L^2_{(\Omega)}$, являющееся замыканием в норме $L^2_{(\Omega)}$ непрерывно дифференцируемых соленоидальных векторов $E$, у которых $E_\tau|_S = 0$, где $E_\tau = E - nE_n$ есть тангенциальная составляющая вектора $E$ на $S$.*

Определение 2. *$Y$ есть подпространство $L^2_{(\Omega)}$, являющееся замыканием в норме $L^2_{(\Omega)}$ непрерывно дифференцируемых соленоидальных векторов $H$, у которых $H_n|_S = 0$, где $H_n$— нормальная составляющая вектора $H$ на $S$.*

Определение 3. *Обобщенным решением задачи* (1)—(7) *назовем пару векторов*

$$E \in L^\infty(0, T;\ X) \cap L^p(0, T;\ L^p_{(\Omega)}),$$
$$H \in L^\infty(0, T, Y)$$

*удовлетворяющую условиям* (7) *и тождествам*

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_\Omega [-D(E)\,u_t + J(E)\,u - \operatorname{rot} u\,H + J_{\text{ст.}}u]\,dxdt = \varepsilon\int_\Omega E_0 u(x, 0)\,dx,\\ \int_0^T\int_\Omega [B(H)\,v_t + E\operatorname{rot} v]\,dxdt = \mu\int_\Omega H_0 v(x, 0)\,dx,\end{gathered}\tag{8}$$

*при любых* $u \in X \cap L^p_{(\Omega)},\ v \in Y,\ u(x, T) = 0,\ v(x, T) = 0.$

Легко проверить, что классическое решение задачи (1)—(7) является обобщенным. Обратно, если относительно обобщенного решения известно, что оно гладкое, то с помощью интегрирования по частям система (8) очевидным образом сводится к системе (1)—(7).

2. Умножим формально в $L^2_{(\Omega\times]0,\,T[)}$ уравнения (1) и (2) с учетом (5) на $E$ и $H$ соответственно и сложим результаты. Замечая, что

$$\int_\Omega H\operatorname{rot} E dx = \int_\Omega E\operatorname{rot} H dx + \int_S H_\tau \times E_\tau dS,\tag{9}$$

и учитывая (6), (7), получаем неравенство

$$\begin{gathered}\mu\,\|H(t)\|_Y^2 + \varepsilon\,\|E(t)\|_X^2 + \int_0^t (J(E), E)\,d\tau \leqslant \mu\,\|H_0\|_Y^2 + \varepsilon\,\|E_0\|_X^2 +\\ + \int_0^t (J_{\text{ст.}}, E)\,d\tau + \int_0^t N(\tau)\,[\mu\,\|H(\tau)\|_Y^2 + \varepsilon\,\|E(\tau)\|_X^2]\,d\tau +\\ + \int_0^t\int_0^\tau G(\tau, s)\,[\mu\,\|H(s)\|_Y^2 + \varepsilon\,\|E(s)\|_X^2]\,dsd\tau,\end{gathered}$$

где

$$N(\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\mu}\int_0^\tau |\psi(\tau - s)|\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau |\varphi(\tau - s)|\,ds\right],$$

$$G(\tau, s) = \frac{1}{\mu}\left|\frac{\partial\psi(\tau - s)}{\partial\tau}\right| + \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial\varphi(\tau - s)}{\partial\tau}\right|.$$

Предположим, что

$$(J(E_1) - J(E_2),\ E_1 - E_2) \geqslant 0 \quad \forall E_1,\ E_2 \in L^p_{(\Omega)},$$

$$c\,|E|^p \leqslant J(E)\,E \leqslant \tilde{c}\,|E|^p, \quad p \geqslant 2, \quad c,\ \tilde{c} = \text{const}. \tag{10}$$

Тогда из последнего неравенства в силу неравенства Юнга имеем

$$\mu\,\|H(t)\|^2_Y + \varepsilon\,\|E(t)\|^2_X + c_1 \int_0^t \|E(\tau)\|^p_{L^p_{(\Omega)}}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu\,\|H_0\|^2_Y + \varepsilon\,\|E_0\|^2_X + \frac{1}{p'} \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}_{(\Omega)}}\,d\tau + \int_0^t N(\tau)\,[\mu\,\|H(\tau)\|^2_Y +$$

$$+ \varepsilon\,\|E(\tau)\|^2_X]\,d\tau + \int_0^t \int_0^\tau G(\tau, s)\,[\mu\,\|H(s)\|^2_Y + \varepsilon\,\|E(s)\|^2_X]\,ds\,d\tau. \tag{11}$$

Так как $N(\tau)$ и $G(\tau, s)$ — непрерывные и неотрицательные функции, в силу обобщения неравенства Гронуолла—Беллмана [3, 4] и условия монотонности из (11) получим оценку

$$\mu\,\|H(t)\|^2_Y + \varepsilon\,\|E(t)\|^2_X \leqslant \Big[\mu\,\|H_0\|^2_Y + \varepsilon\,\|E_0\|^2_X +$$

$$+ \frac{1}{p'} \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}_{(\Omega)}}\,d\tau\Big] \exp\Big\{\int_0^t \Big[N(\tau) + \int_0^\tau G(\tau, s)\,ds\Big]\,d\tau\Big\}$$

при всех $t \in [0, T]$.

Возвращаясь снова к (11), находим

$$\mu\,\|H(t)\|^2_Y + \varepsilon\,\|E(t)\|^2_X + c_1 \int_0^t \|E(\tau)\|^p_{L^p_{(\Omega)}}\,d\tau \leqslant \text{const}, \tag{12}$$

где $c_1$ — различные константы.

Неравенство (12) приводит к априорным оценкам

$$E \in L^\infty(0, T; X) \cap L^p(0, T; L^p_{(\Omega)}),$$

$$H \in L^\infty(0, T; Y),$$

если предположить, что $\mu$, $\varepsilon$, $\varphi(0)$, $\psi(0)$ — положительные постоянные и $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varphi'(s)$, $\psi'(s)$ — непрерывные и положительные функции при $t \geqslant \tau \geqslant 0$, кроме того,

$$H_0 \in Y, \quad E_0 \in X,$$

$$J_{\text{ст.}} \in L^{p'}(0, T; L^{p'}_{(\Omega)}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{13}$$

Теорема 1. *Предположим, что* $\mu$, $\varepsilon$, $\varphi(0)$, $\psi(0)$ — *положительные постоянные и* $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varphi'(s)$, $\psi'(s)$ — *непрерывные и положительные функции при* $t \geqslant \tau \geqslant 0$, *кроме того выполнены условия* (10), (13).

*Тогда задача* (1)—(7) *имеет единственное обобщенное решение и такая, что*

$$E \in L^\infty(0, T; X) \cap L^p(0, T; L^p_{(\Omega)}),$$

$$H \in L^\infty(0, T; Y).$$

Доказательство. Будем искать приближенное решение задачи (1)—(7) в виде [5, 6]

$$H_n(x, t) = \sum_{j=1}^{3} c_{jn}(t)\,w_j(x),$$

$$E_n(x,t)=\sum_{j=1}^{n} d_{jn}(t)\,\varphi_j(x),$$

$$\{w_j(x)\}\in Y,\quad \{\varphi_j(x)\}\in X\cap L^p_{(\Omega)},$$

где $C_{jn}(t)$ и $d_{jn}(t)$ определяются из уравнений

$$-(\mathrm{rot}\,H_n,\varphi_j)+(\partial D(E_n)/\partial t+J(E_n),\varphi_j)+(J_{\text{ст.}}(t),\varphi_j)=0, \tag{14}$$
$$(\mathrm{rot}\,H_n, w_j)+(\partial B(H_n)/\partial t,\ w_j)=0.$$

Чтобы определить из уравнений (14) функции $C_{jn}(t)$ и $d_{jn}(t)$, зададим для них начальные условия таким образом, чтобы при $t=0$

$$E_n(0)=E_{0n},\quad E_{0n}\to E_0 \text{ в } X\cap L^p_{(\Omega)} \text{ при } n\to\infty,$$
$$H_n(0)=H_{0n},\quad H_{0n}\to H_0 \text{ в } Y \text{ при } n\to\infty.$$

По условию теоремы $H_0(x)\in Y$ и $E_0(x)\in X$ принадлежат подпространству $L^2_{(\Omega)}$. Умножая (14) на $C_{jn}(t)$ и $d_{jn}(t)$ соответственно, суммируя по $j$ и слагая результаты, при учете (5), (6) и (7) получаем тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\mu\|H_n(t)\|_Y^2+\varepsilon\|E_n(t)\|_X^2]+\int_\Omega |E_n|^p\,dx=-(J_{\text{ст.}}(t),E_n)-$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t\varphi(t-\tau)E_n(\tau)\,d\tau\right],\ E_n\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t\psi(t-\tau)H_n(\tau)\,d\tau\right],\ H_n\right).$$

Из последнего тождества вытекает неравенство

$$\mu\|H_n(t)\|_Y^2+\varepsilon\|E_n\|_X^2+2\int_0^t\|E_n(\tau)\|^p_{L^p_{(\Omega)}}d\tau\leqslant\mu\|H_{0n}\|_Y^2+\varepsilon\|E_{0n}\|_X^2+$$
$$+\frac{2}{p'}\int_0^t\|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}_{(\Omega)}}d\tau+\int_0^t N(\tau)[\mu\|H_n(\tau)\|_Y^2+\varepsilon\|E_n(\tau)\|_X^2]\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau G(\tau,s)[\mu\|H_n(s)\|_Y^2+\varepsilon\|E_n(s)\|_X^2]\,ds\,d\tau. \tag{15}$$

В силу свойства (10) и леммы Гронуолла — Беллмана находим

$$\mu\|H_n(t)\|_Y^2+\varepsilon\|E_n(t)\|_X^2\leqslant\Big[\mu\|H_{0n}\|_Y^2+\varepsilon\|E_{0n}\|_X^2+$$
$$+\frac{1}{p'}\int_0^t\|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}_{(\Omega)}}d\tau\Big]\exp\left\{\int_0^t\left[N(\tau)+\int_0^\tau G(\tau,s)\,ds\right]d\tau\right\}$$

при всех $t\in[0,T]$, не зависящих от $n$.

Возвращаясь снова к (15), получаем

$$\mu\|H_n(t)\|_Y^2+\varepsilon\|E_n(t)\|_X^2+\frac{2(p-1)}{p}\int_0^t\|E_n(\tau)\|^p_{L^p_{(\Omega)}}\leqslant\text{const}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что $t_n=T$. Неравенство (16) означает, что при $n\to\infty$

$$H_n \text{ ограничена в } L^\infty(0,T;Y),$$

$$E_n \text{ ограничена в } L^\infty(0,T;X)\cap L^p(0,T;L^p_{(\Omega)}).$$

Известно [5, 7], что пространства $L^\infty(0,T;X)\cap L^p(0,T;L^p_{(\Omega)})$ и $L^\infty(0,T;Y)$ являются сопряженными к $L^1(0,T;X')+L^{p'}(0,T;L^{p'}_{(\Omega)})$ и $L^1(0,T;Y')$ соответственно, значит, из последовательностей $\{H_n\}$, $\{E_n\}$ можно извлечь подпоследовательности $\{H_k\}$, $\{E_k\}$ такие, что

$$H_k \to H \text{ слабо в } L^\infty(0, T; Y),$$

$$E_k \to E \text{ слабо в } L^\infty(0, T; X) \cap L^p(0, T; L^p_{(\Omega)}),$$

$$J(E_k) \to \chi \text{ слабо в } L^{p'}(0, T; L^{p'}_{(\Omega)}).$$

Теперь, переходя в (14) к пределу при $n = k \to \infty$, при фиксированном $j$ получаем

$$-(\operatorname{rot} H, \varphi_j) + (\partial D(E)/\partial t + \chi, \varphi_j) + (J_{\text{ст.}}, \varphi_j) = 0,$$
$$(\operatorname{rot} E, w_j) + (\partial B(H)/\partial t, w_j) = 0 \ \forall j. \tag{17}$$

Так как система $\{\varphi_j\}$ плотна в $X \cap L^p_{(\Omega)}$ и $\{w_j\}$ плотна в $Y$, то (17) справедливо для любых функций $u \in X \cap L^p_{(\Omega)}$ и $v \in Y$:

$$-(\operatorname{rot} H, u) + (\partial D(E)/\partial t, u) + (\chi, u) + (J_{\text{ст.}}, u) = 0,$$
$$(\operatorname{rot} E, v) + (\partial B(H)/\partial t, v) = 0.$$

Итак, мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\chi = J(E). \tag{18}$$

Для этой цели используем свойство монотонности. В силу монотонности $J(E)$ следует

$$x_k = \int_0^T (J(E_k(t) - J(\tilde{E}(t)), \quad E_k(t) - \tilde{E}(t))\, dt \geqslant 0$$

$$\forall \tilde{E} \in L^p(0, T; L^p{}_{(\Omega)}).$$

Согласно (14)

$$\int_0^T (J(E_k), E_k)\, dt = -\int_0^T (J_{\text{ст.}}, E_k)\, dt + \frac{1}{2}[\mu \| H_{0k}\|_Y^2 + \varepsilon \| E_{0k}\|_X^2] -$$

$$-\frac{1}{2}[\mu \| H_k(T)\|_Y^2 + \varepsilon \| E_k(T)\|_X^2] - \int_0^T [\varphi(0)\| E_k(t)\|_X^2 +$$

$$+ \psi(0)\| H_k(t)\|_Y^2]\, dt - \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega E_k(\tau)\, E_k(t)\, dx\right) dt -$$

$$-\int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega H_k(\tau)\, H_k(t)\, dx\right) dt,$$

и, следовательно,

$$X_k = -\int_0^T (J_{\text{ст.}}, E_k)\, dt + \frac{1}{2}[\mu \| H_{0k}\|_Y^2 + \varepsilon \| E_{0k}\|_X^2] -$$

$$-\frac{1}{2}[\mu \| H_k(T)\|_Y^2 + \varepsilon \| E_k(T)\|_X^2] - \int_0^T [\varphi(0)\| E_k(t)\|_X^2 +$$

$$+ \psi(0)\| H_k(t)\|_Y^2]\, dt - \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega E_k(\tau)\, E_k(t)\, dx d\tau\right) dt -$$

$$-\int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega H_k(\tau)\, H_k(t)\, dx d\tau\right) dt -$$

$$- \int_0^T (J(E_k), \tilde{E})\, dt - \int_0^T (J(\tilde{E}), \quad (E - \tilde{E}))\, dt.$$

Так как $H_k(T) \to H(T)$ в $Y$ слабо, $E_k(T) \to E(T)$ в $X \cap L^p_{(\Omega)}$ слабо, то

$$\liminf [\mu \| H_k(T) \|_Y^2 + \varepsilon \| E_k(T) \|_X^2] \geqslant [\mu \| H(T) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(T) \|_X^2],$$

$$\liminf \left[\int_0^T [\varphi(0) \| E_k(t) \|_X^2 + \psi(0) \| H_k(t) \|_Y^2]\, dt \geqslant\right.$$

$$\geqslant \int_0^T [\varphi(0) \| E(t) \|_X^2 + \psi(0) \| H(t) \|_Y^2]\, dt,$$

$$\liminf \left[\int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega E_k(\tau) E_k(t)\, dx d\tau\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega H_k(\tau) H_k(t)\, dx d\tau\right) dt\right] \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega E(\tau) E(t)\, dx d\tau\right) dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega H(\tau) H(t)\, dx d\tau\right) dt.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \limsup X_k \leqslant - \int_0^T (J_{\text{ст.}}, E)\, dt + \frac{1}{2} [\mu \| H_0 \|_Y^2 + \varepsilon \| E_0 \|_X^2] -$$

$$- \frac{1}{2} [\mu \| H(T) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(T) \|_X^2] - \int_0^T [\varphi(0) \| E(t) \|_X^2 + \psi(0) \| H(t) \|_Y^2] dt -$$

$$- \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega E(\tau) E(t)\, dx d\tau\right) dt -$$

$$- \int_0^T \left(\int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega H(\tau) H(t)\, dx d\tau\right) dt -$$

$$- \int_0^T (\chi, \tilde{E})\, dt - \int_0^T (J(\tilde{E}), (E - \tilde{E}))\, dt. \tag{19}$$

С учетом (18) после интегрирования по частям получаем

$$\int_0^T (\chi, E)\, dt = - \int_0^T (J_{\text{ст.}}, E)\, dt + \frac{1}{2} [\mu \| H_0 \|_Y^2 + \varepsilon \| E_0 \|_X^2] -$$

$$- \frac{1}{2} [\mu \| H(T) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(T) \|_X^2] - \int_0^T [\varphi(0) \| E(t) \|_X^2 +$$

$$+ \psi(0) \| H(t) \|_Y^2] \, dt - \int_0^T \left( \int_0^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega E(\tau) \, E(t) \, dx d\tau \right) dt -$$

$$- \int_0^T \left( \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \int_\Omega H(\tau) \, H(t) \, dx d\tau \right) dt. \tag{20}$$

Но из (19) в силу (20) следует

$$\int_0^T (\chi - J(\tilde{E}), \; E - \tilde{E}) \, dt \geqslant 0. \tag{21}$$

Теперь используем полунепрерывность для доказательства того, что из (21) следует (18) [5, 8]. Положим $\tilde{E} = E - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0, T; L^p_{(\Omega)})$ произвольно; тогда из (21) вытекает

$$\lambda \int_0^T (\chi - J(E - \lambda w), \; w) \, dt \geqslant 0. \tag{22}$$

После деления неравенства (22) на $\lambda$ получим

$$\int_0^T (\chi - J(E - \lambda w), \; w) \, dt \geqslant 0, \tag{23}$$

откуда при $\lambda \to 0$ в (23), что законно в силу теоремы Лебега, имеем

$$\int_0^T (\chi - J(E), \; w) \, dt \geqslant 0 \;\; \forall w.$$

Следовательно, $J(E) = \chi$.

Покажем, что это решение единственно. Если $E_1(t)$, $E_2(t)$ и $H_1(t)$, $H_2(t)$ — два решения, то $H(t) = H_1(t) - H_2(t)$, $E(t) = E_1(t) - E_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} H = \varepsilon \; \partial E / \partial t + J(E_1) - J(E_2) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \varphi(t-\tau) \, E(\tau) \, d\tau \right), \tag{24}$$

$$\operatorname{rot} E = - \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \psi(t-\tau) \, H(\tau) \, d\tau \right), \tag{25}$$

$$E_\tau |_S = 0, \quad E(x, 0) = 0, \quad H(x, 0) = 0.$$

Умножая скалярно обе части (24), (25) на $E$ и $H$ соответственно и складывая результаты, получаем

$$(E, \operatorname{rot} H) - (H, \operatorname{rot} E) = \varepsilon (E, \partial E / \partial t) + \mu (H, \partial H / \partial t) +$$

$$+ (J(E_1) - J(E_2), \;\; E_1 - E_2) + \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t \varphi(t-\tau) \, E(\tau) \, d\tau \right], \; E \right) +$$

$$+ \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t \psi(t-\tau) \, H(\tau) \, d\tau \right], \;\; H \right).$$

Учитывая (9) и условия монотонности (10), после несложных преобразований находим

$$\mu \| H(t) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(t) \|_X^2 \leqslant \int_0^t N(\tau) \, [\mu \| H(\tau) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(\tau) \|_X^2] \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\tau G(\tau, s) \, [\mu \| H(s) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(s) \|_X^2] \, ds d\tau. \tag{26}$$

На основании обобщения неравенства Гронуолла — Беллмана из (26) следует $\mu \| H(t) \|_Y^2 + \varepsilon \| E(t) \|_X^2 \leqslant 0$. Следовательно, $H = 0$ и $E = 0$.

Замечание. Требование теоремы 1 можно ослабить, если потребовать существования следующих интегралов:

$$\int_0^T N(t)\, dt < +\infty, \quad \int_0^T \int_0^t G(t, \tau)\, d\tau dt < +\infty.$$

**3.** Умножая формально в $L^2_{(\Omega \times ]0,T[)}$ уравнения (1) и (2) с учетом (5) на $\mu \operatorname{rot} \partial H/\partial t$ и $\varepsilon$ $\operatorname{rot}$ $\partial E/\partial t$ соответственно и складывая результаты, находим

$$\mu\left(\operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right) + \varepsilon\left(\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \varepsilon\mu\left(\frac{\partial E}{\partial t}, \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right) - \varepsilon\mu\left(\frac{\partial H}{\partial t}, \operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t}\right) + \mu\left(J(E), \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right) + \mu\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \varphi(t-\tau) E(\tau)\, d\tau\right], \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau) H(\tau)\, d\tau\right]; \operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t}\right) + \mu\left(J_{\text{ст.}}, \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right). \tag{27}$$

В силу векторного тождества (9) из (27) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left[\varepsilon \| \operatorname{rot} E \|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \mu \| \operatorname{rot} H \|^2_{L^2_{(\Omega)}}\right] = \mu\left(J(E), \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right) + \mu\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \varphi(t-\tau) E(\tau)\, d\tau\right], \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau) H(\tau)\, d\tau\right], \operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t}\right) + \mu\left(J_{\text{ст.}}, \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}\right). \tag{28}$$

С помощью исходного уравнения (1) и (2) из (28) находим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left[\varepsilon \| \operatorname{rot} E(t) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \mu \| \operatorname{rot} H(t) \|^2_{L^2_{(\Omega)}}\right] = -(J(E), \operatorname{rot}\operatorname{rot} E) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \psi(t-\tau) \operatorname{rot} H(\tau)\, d\tau\right)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \varphi(t-\tau) E(\tau)\, d\tau\right], \operatorname{rot}\operatorname{rot} E + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau) \operatorname{rot} H(\tau)\, d\tau\right]\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau) H(\tau)\, d\tau\right], \operatorname{rot}\operatorname{rot} H - \operatorname{rot} J(E) - \operatorname{rot} J_{\text{ст.}}\right) - \left(J_{\text{ст.}}, \operatorname{rot}\operatorname{rot} E + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau) \operatorname{rot} H(\tau)\, d\tau\right]\right). \tag{29}$$

Замечая, что в (29)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \operatorname{grad}(\operatorname{div} E) - \Delta E = -\Delta E, \tag{30}$$

$$(u, \operatorname{rot}\operatorname{rot} v)_{L^2_{(\Omega)}} = (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v)_{L^2_{(\Omega)}} - \int_S u_\tau x \operatorname{rot}_\tau v dS. \tag{31}$$

получаем тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\varepsilon\,\|\operatorname{rot} E(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\mu\,\|\operatorname{rot} H(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]-\int_\Omega J(E)\,\Delta E dx=$$

$$=-(\operatorname{rot} J_{\text{ст.}},\ \operatorname{rot} E)-\Bigg(\varphi(0)\,E+\int_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\,E(\tau)\,d\tau,\ \operatorname{rot}\operatorname{rot} E+$$

$$+\psi(0)\operatorname{rot} H+\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} H(\tau)\,d\tau\Bigg)-\Bigg(\psi(0)\,H+\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\times$$

$$\times H(\tau)\,d\tau,\ \operatorname{rot}\operatorname{rot} H-\operatorname{rot} J(E)-\varphi(0)\operatorname{rot} E+\int_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} E(\tau)\,d\tau\Bigg)-$$

$$-\Bigg(J_{\text{ст.}},\ \psi(0)\operatorname{rot} H+\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} H(\tau)\,d\tau\Bigg). \qquad (32)$$

Воспользовавшись векторными тождествами (30), (31) и формулой Грина

$$\int_\Omega J(E)\,\Delta E dx=-\int_\Omega\nabla J(E)\cdot\nabla E dx+\int_S J_n\cdot\nabla_n E dS,$$

перепишем (32) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\varepsilon\,\|\operatorname{rot} E(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\mu\,\|\operatorname{rot} H(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]+\int_\Omega\nabla J(E)\cdot\nabla E dx=$$

$$=-\int_\Omega\operatorname{rot} J_{\text{ст.}}\cdot\operatorname{rot} E dx-\Bigg(\varphi(0)\operatorname{rot} E+\int_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} E(\tau)\,d\tau,\ \operatorname{rot} E+$$

$$+\psi(0)\,H+\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\,H(\tau)\,d\tau\Bigg)-\Bigg(\psi(0)\operatorname{rot} H+\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\times$$

$$\times\operatorname{rot} H(\tau)\,d\tau,\ \operatorname{rot} E-\operatorname{rot} H-J(E)-\varphi(0)\,E+$$

$$+\int_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\,E(\tau)\,d\tau\Bigg)-\Bigg(J_{\text{ст.}},\ \psi(0)\operatorname{rot} H+\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} H(\tau)\,d\tau\Bigg). \qquad (33)$$

Легко видеть, что если $J(E)$ удовлетворяет условию (10), то

$$\int_\Omega\nabla J(E)\,\nabla E dx\geqslant 0. \qquad (34)$$

Тогда из тождества (33) в силу неравенства Коши

$$(\operatorname{rot} u,\ \operatorname{rot} v)_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant\frac{1}{2\nu}\,\|\operatorname{rot} u\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\frac{\nu}{2}\,\|\operatorname{rot} v\|^2_{L^2_{(\Omega)}}$$

с учетом (34) и априорных оценок, полученных в теореме 1, получим неравенство

$$\mu\,\|\operatorname{rot} H(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\,\|\operatorname{rot} E(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant C+\int_0^t\bar N(\tau)\,[\mu\,\|\operatorname{rot} H(\tau)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+$$

$$+\varepsilon \|\operatorname{rot} E(\tau)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau \overline{G}(\tau,s)\,[\mu\|\operatorname{rot} H(s)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+$$

$$+\varepsilon\|\operatorname{rot} E(s)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]\,ds d\tau, \tag{35}$$

где

$$\overline{N}(\tau)=\frac{1}{\mu}\left[\psi(0)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t|\psi(t-\tau)|\,d\tau\right)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(0)+\varphi(0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t|\varphi(t-\tau)+\varphi(0)\,\psi(t-\tau)|\,d\tau\right)+\psi(0)\int_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\,d\tau\right],$$

$$\overline{G}(\tau,s)=\frac{1}{\mu}\left|\frac{\partial\varphi(\tau-s)}{\partial\tau}+c_1\frac{\partial\psi(\tau-s)}{\partial\tau}\right|+\frac{1}{\varepsilon}\left|\psi(0)+c_2\frac{\partial\psi(\tau-s)}{\partial\tau}\right|,$$

$c$, $c_1$, $c_2$ — различные константы.

Так как $\overline{N}(\tau)$ и $\overline{G}(\tau,s)$ — непрерывные и неотрицательные функции при $t\geqslant\tau\geqslant 0$, в силу обобщения неравенства Гронуолла—Беллмана [3, 4] из (35) получим оценку

$$\mu\|\operatorname{rot} H(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\|\operatorname{rot} E(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant C\exp\left\{\int_0^t\overline{N}(\tau)\,dt+\int_0^t\int_0^\tau\overline{G}(\tau,s)\,dsd\tau\right\}$$

при всех $t\in[0,T]$.

Возвращаясь к (33), получаем

$$\mu\|\operatorname{rot} H(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\|\operatorname{rot} E(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\int_0^t\int_\Omega\nabla J(E)\cdot\Delta E\,dx d\tau\leqslant\text{const}. \tag{36}$$

Неравенство (36) в силу лемм 3 и 5 из работы [9] приводит к априорным оценкам

$$H\in L^\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),\ E\in L^\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),$$

если предположить, что $\varepsilon$, $\mu$, $\varphi(0)$, $\psi(0)$ и $\varphi(t-\tau)$, $\psi(t-\tau)$, $\varphi'_t(t-\tau)$, $\psi'_t(t-\tau)$ удовлетворяют все требования теоремы 1, кроме того,

$$\operatorname{rot} J_{\text{ст.}}\in L^2_{(Q)},\quad H_0,\ E_0\in W_2^1(\Omega).$$

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1

$$\operatorname{rot}\ J_{\text{ст.}}\in L^2_{(Q)},\quad H_0,\ E_0\in W_2^1(\Omega).$$

*Тогда существует решение* $\{H, E\}$, *притом единственное, задачи* (1)—(7), *удовлетворяющее условиям*

$$H,E\in L^\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), \tag{37}$$

$$\partial H/\partial t\in L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)}),\quad \partial E/\partial t\in L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)})+L^{p'}(0,T;L^{p'}_{(\Omega)}). \tag{38}$$

Доказательство. Предполагаемый ниже метод доказательства очень прост. Мы отправляемся от приближенных решений $\{H_n, E_n\}$, доставляемых соотношениями (14). В этом случае $\varphi_j$ и $\omega_j$ образуют базис в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Предполагается, что при $n\to\infty$

$$\begin{aligned} &H_{0n}\to H_0 \text{ в } W_2^1(\Omega),\\ &E_{0n}\to E_0 \text{ в } W_2^1(\Omega),\\ &H_{1n}\to H_1 \text{ в } L^2_{(\Omega)},\\ &E_{1n}\to E_1 \text{ в } L^2_{(\Omega)}. \end{aligned} \tag{39}$$

Установим дополнительную априорную оценку, которая обеспечит существование решения, удовлетворяющего (37); затем установим (38), используя уравнения (1), (2).

Из (14) при $t = 0$ следует

$$-(\operatorname{rot} H_{0n}, \varphi_j) + \varepsilon (E_n'(0), \varphi_j) + (\varphi(0) E_{0n} + J(E_{0n}) + J_{\text{ст.}}(0), \varphi_j) = 0,$$
$$(\operatorname{rot} E_{0n}, w_j) + \mu (H_n'(0), w_j) + \psi(0)(H_{0n}, w_j) = 0. \tag{40}$$

Умножим (40) на $C_{jn}'(0)$ и $d_{jn}'(0)$ соответственно, просуммируем по $j$ от 1 до $n$ и сложим результаты. С учетом (9), (10) после некоторых преобразований получим

$$\varepsilon \| E_n'(0) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \mu \| H_n'(0) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} \leqslant (\varphi(0) \| E_{0n} \|_{L^2_{(\Omega)}} + \| J_{\text{ст.}}(0) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} +$$
$$+ c \| | E_{0n} |^p E_{0n} \|_{L^2_{(\Omega)}}) \| E_n'(0) \|_{L^2_{(\Omega)}} + \psi(0) \| H_{0n} \|_{L^2_{(\Omega)}} \| H_n'(0) \|_{L^2_{(\Omega)}}.$$

Отметим, что в силу леммы 1.2 [6] $J_{\text{ст.}}(0) \in L^2_{(\Omega)}$, а функции $| E_{0n} |^{p-1} E_{0n}$ принадлежат ограниченному множеству в $L^2_{(Q)}$. Отсюда

$$\varepsilon \| E_n'(0) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \mu \| H_n'(0) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} \leqslant \text{const}.$$

Приближенное решение, как и в теореме 1, будем искать по методу Фаэдо — Галеркина с выбором специального базиса. Для этого заменим в (14) $\varphi_j$ на $\operatorname{rot} w_j$ и $w_j$ на $\operatorname{rot} \varphi_j$. Получим

$$-(\operatorname{rot} H_n, \operatorname{rot} w_j) + (\partial D(E_n)/\partial t + J(E_n), \operatorname{rot} w_j) + (J_{\text{ст.}}, \operatorname{rot} w_j) = 0,$$
$$(\operatorname{rot} E_n, \operatorname{rot} \varphi_j) + (\partial B(H_n)/\partial t, \operatorname{rot} \varphi_j) = 0. \tag{41}$$

Умножая (41) на $\mu C_{jn}'(t)$ и $\varepsilon d_{jn}'(t)$ соответственно и суммируя по $j$, а затем складывая результаты, находим

$$\mu (\operatorname{rot} H_n, \operatorname{rot} \partial H_n/\partial t) + \varepsilon \left( \operatorname{rot} E_n, \operatorname{rot} \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) = \mu \left( \frac{\partial D(E_n)}{\partial t}, \operatorname{rot} \frac{\partial H_n}{\partial t} \right) -$$
$$- \varepsilon \left( \frac{\partial B(H_n)}{\partial t}, \operatorname{rot} \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) + \mu \left( J(E_n), \operatorname{rot} \frac{\partial H_n}{\partial t} \right) + \mu \left( J_{\text{ст.}}, \operatorname{rot} \frac{\partial H_n}{\partial t} \right). \tag{42}$$

Из тождества (42) с учетом материального уравнения поля (5), уравнений (1), (2) и векторного тождества (9), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{\partial t} [\mu \| \operatorname{rot} H_n(t) \|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \varepsilon \| \operatorname{rot} E_n(t) \|^2_{L^2_{(\Omega)}}] + \int_\Omega J(E_n) \Delta E_n dx =$$
$$= - \int_\Omega \operatorname{rot} J_{\text{ст.}} \operatorname{rot} E_n dx - \left( \psi(0) H_n + \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} H_n(\tau) d\tau, \right.$$
$$\left. \operatorname{rot}\operatorname{rot} H_n - \operatorname{rot} J(E_n) - \varphi(0) \operatorname{rot} E_n + \int_0^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial t} \operatorname{rot} E_n(\tau) d\tau \right) -$$
$$- \left( \psi(0) H_n + \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} H_n(\tau) d\tau, \operatorname{rot}\operatorname{rot} E_n + \psi(0) \operatorname{rot} H_n + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \operatorname{rot} H_n(\tau) d\tau \right) - \left( J_{\text{ст.}}, \operatorname{rot}\operatorname{rot} E_n + \psi(0) \operatorname{rot} H_n + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \operatorname{rot} H_n(\tau) d\tau \right). \tag{43}$$

Воспользовавшись векторными тождествами (30) и (31) и формулами Грина, перепишем (43) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\mu\|\operatorname{rot} H_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\|\operatorname{rot} E_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]+\int\limits_\Omega \nabla J(E_n)\cdot\nabla E_n dx=$$

$$=-\int\limits_\Omega \operatorname{rot} J_{\text{ст.}}\operatorname{rot} E_n dx-\Big(\varphi(0)\operatorname{rot} E_n+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} E_n(\tau)\,d\tau,$$

$$\operatorname{rot} H_n-J(E_n)-\varphi(0)E_n+\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial t}E_n(\tau)\,d\tau\Big)- \tag{44}$$

$$-\Big(J_{\text{ст.}},\ \psi(0)\operatorname{rot} H_n+\int\limits_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\operatorname{rot} H_n(\tau)\,d\tau\Big).$$

Из (44) с учетом (34), с использованием оценки для $H_n$ и $E_n$ получим неравенство

$$\mu\|\operatorname{rot} H_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\|\operatorname{rot} E_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant C+\int\limits_0^t\overline{N}(\tau)[\mu\|\operatorname{rot} H_n(\tau)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+$$

$$+\varepsilon\|\operatorname{rot} E_n(\tau)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\overline{G}(\tau,s)[\mu\|\operatorname{rot} H_n(s)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+$$

$$+\varepsilon\|\operatorname{rot} E_n(s)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}]\,ds\,d\tau. \tag{45}$$

С учетом обобщения неравенства Гроуолла — Беллмана из (45) следует

$$\mu\|\operatorname{rot} H_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\|\operatorname{rot} E_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant C\exp\Big\{\int\limits_0^t\overline{N}(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\overline{G}(\tau,s)\,ds\,d\tau\Big\},$$

т. е.

$$\mu\|\operatorname{rot} H_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}+\varepsilon\|\operatorname{rot} E_n(t)\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant\text{const}. \tag{46}$$

Из последнего неравенства и лемм 3 и 5 из работы [9] получим

$$\|H_n(t)\|^2_{W^1_2(\Omega)}+\|E_n(t)\|^2_{W^1_2(\Omega)}\leqslant\text{const}. \tag{47}$$

Теперь, используя (46), (47), можно заключить, что

$$H_n \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;W^1_2(\Omega)),$$

$$E_n \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;W^1_2(\Omega)),$$

$$\partial H_n/\partial t \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)}),$$

$$\partial E_n/\partial t \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)})+L^p(0,T;L^p_{(\Omega)}),$$

$$\operatorname{rot} H_n \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)}),$$

$$\operatorname{rot} E_n \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)}).$$

В силу (46), (47), (44) из последовательности $\{H_n, E_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{H_k, E_k\}$, что

$$H_k\to H \text{ слабо в } L^\infty(0,T;W^1_2(\Omega)),$$

$$E_k\to E \text{ слабо в } L^\infty(0,T;W^1_2(\Omega)),$$

$$H_k\to H \text{ сильно в } L^\infty(0,T;L^2_{(\Omega)}) \text{ и п. в. в } Q,$$

$$E_k \to E \text{ сильно в } L^\infty(0, T; L^2_{(\Omega)}) \text{ и п. в. в } Q,$$

$$\partial H_k/\partial t \to \partial H/\partial t \text{ слабо в } L^\infty(0, T; L^2_{(\Omega)}),$$

$$\partial E_k/\partial t \to \partial E/\partial t \text{ слабо в } L^\infty(0, T; L^2_{(\Omega)}),$$

$$J(E_k) \to J(E) \text{ слабо в } L^{p'}(0, T; L^{p'}_{(\Omega)}) \text{ и п. в. в } Q.$$

Тем самым построено решение задачи (1)—(7), удовлетворяющее условиям (37), (38).


1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М. : Физматгиз, 1959.— 532 с.
2. *Курбанов И.* Нелинейные краевые задачи электромагнитоупругости с памятью.— Киев, 1990.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.46).
3. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств.— Киев : Наук. думка, 1989.— 271 с.
4. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1976.— 152 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1971.— 587 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1960.— **59**.— С. 115—173.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 516 с.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике.— М. : Мир, 1980.— 383 с.
9. *Быховский Э. Б.* Решения смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы // Вестн. Ленингр. ун-та.—1957.— **13**.— С. 50—66.


Получено 26.02.91