УДК 517.9

С. З. Курбаншоев, канд. физ.-мат. наук (Душанб. пед. ин-т)

О построении и аналитических свойствах интегральных многообразий решений систем нелинейных разностных уравнений

Изучаются свойства интегральных многообразий системы разностных уравнений в гиперболическом случае. Доказано существование аналитических интегральных многообразий для системы разностных уравнений с аналитическими правыми частями. Исследуется аналитическая зависимость от параметров.

Вивчаються властивості інтегральних многовидів системи різницевих рівнянь у гіперболічному випадку. Доведено існування аналітичних інтегральних многовидів для системи різницевих рівнянь з аналітичними правими частинами. Досліджується аналітична залежність від параметрів.

1. Построение интегральных многообразий. Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + \mu F(X_n, \mu), \quad \dim X_n = m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{1}$$

Предполагаем, что при $\mu = 0$ система линейных разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n, \quad \det A \neq 0 \tag{2}$$

экспоненциально дихотомична, т. е. не имеет мультипликаторов, лежащих на единичной окружности $|z| = 1$. А именно, предполагается гиперболический случай, когда система разностных уравнений (2) имеет q-параметрическое семейство решений, примыкающих к нулевому при $n \to +\infty$, и p-параметрическое семейство решений, примыкающих к нулевому при $n \to -\infty$, $q > 0$, $p > 0$, $q + p = m$.

Через $\|X\|$ обозначим норму вектора X, которую можно использовать также в случае, когда вектор X имеет комплексные проекции. Считаем, что норма матрицы согласована с нормой вектора.

Полагаем, что в области

$$D = \{\|X\| < R, \quad |\mu| < \mu_0 (\mu_0 > 0)\} \tag{3}$$

для вектора $F(X, \mu)$ выполнены условия

$$F(0, \mu) \equiv 0, \tag{4}$$

$$\|F(X_1, \mu) - F(X_2, \mu)\| \leqslant L \|X_1 - X_2\|, \quad \|X_i\| \in D, \quad i = 1, 2.$$

Введем матрицу Грина $G(n, k)$ для неоднородной системы линейных разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + F_n, \quad \|F_n\| \leqslant f = \text{const}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5}$$

через которую выражаются ограниченные на всей оси решения

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n, k) F_k, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

системы (1). Если положим

$$P_1 = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|z|=1} (Ez - A)^{-1} dz, \quad P_2 = E - P_1,$$

то для матрицы Грина получим явные формулы [1]

$$G(n, k) = A^{n-k-1} P_1, \quad n \geqslant k + 1; \qquad G(n, k) = -A^{n-k-1} P_2, \quad n < k + 1.$$

В силу предположения имеем $\operatorname{rang} P_1 = q$, $\operatorname{rang} P_2 = p$, $p + q = m$.

Для матрицы Грина всегда найдутся постоянные $c \geqslant 1$, $0 < \rho < 1$ такие, что будут выполнены неравенства

$$\|G(n, k)\| \leqslant c\rho^{|n-k-1|}, \quad n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{6}$$

При этом будет справедлива оценка

$$g \equiv \sup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G(n, k)\| \leqslant c \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Поскольку для системы линейных разностных уравнений (5) с постоянными коэффициентами матрица Грина $G(n, k)$ зависит лишь от разности аргументов, то в дальнейшем будем обозначать $G(n) = G(n, 0)$, $G(n, k) = G(n - k)$.

Счетное множество G точечных множеств M_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, называется интегральным многообразием решений системы (1), если из условия $X_n \in M_n$ следует, что $X_{n+k} \in M_{n+k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если множества M_n будут задаваться аналитическими функциями, то интегральное многообразие G будем называть аналитическим [2].

Из работы [1] следует, что при достаточно малых значениях $|\mu| < \mu_1$, где $\mu_1 = \min\{\mu_0, g^{-1}L^{-1}\}$, в окрестности $\|X\| < R$ нулевого решения существуют интегральные многообразия G_1, G_2 решений системы (1), примыкающих к нулевому решению соответственно при $n \to +\infty$, $n \to -\infty$. Для построения интегральных многообразий G_i, $i = 1, 2$, рассмотрим вспомогательную систему разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + \mu F(X_n, \mu) + X\delta_{n+1,k}, \tag{7}$$

которую можно свести к системе суммарных уравнений

$$H(n, X, \mu) = G(n + 1) X + \mu \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n - s) F(H(s, X, \mu), \mu). \tag{8}$$

Решение системы (8), лежащее в области D, при любых значениях n, $k=0$, ±1, ±2, ... определяет интегральные многообразия [3] G_1, G_2. Для этого вводятся нелинейные проекторы [1, 4]

$$P_1(X,\mu)=H(0,X,\mu),\quad P_2(X,\mu)=X-P_1(X,\mu).$$

Интегральное многообразие G_1 определяется системой уравнений

$$P_1(X,\mu)=X, \tag{9}$$

интегральное многообразие G_2 — системой уравнений

$$P_2(-X,\mu)+X\equiv P_1(-X,\mu)=0. \tag{10}$$

Отметим, что в системе m уравнений (9) лишь p независимых, а в системе уравнений (10) q независимых уравнений.

2. Свойства нелинейного оператора Грина и нелинейных проекторов. Для оценки решения системы суммарных уравнений (8) введем норму для бесконечного вектора $X=(\ldots X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots)$ по формуле

$$\|X\|_0=\sup_n\{\|X\|\},\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Из системы разностных уравнений (8) находим оценку

$$\|H(n,X,\mu)\|_0\leqslant c\|X\|(1-|\mu|gL)^{-1}. \tag{11}$$

Чтобы вектор $H(n,X,\mu)\in D$ при любых значениях $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|X\|\leqslant Rc^{-1}(1-|\mu|gL). \tag{12}$$

Выберем $r>0$ так, чтобы $rc<R$. Тогда из неравенства (12) следует, что нелинейный оператор Грина $H(n,X,\mu)$ будет определен в области

$$D_2=\{\|X\|<r,\ |\mu|<\mu_2\},\quad \mu_2\equiv\min\{\mu_0, g^{-1}L^{-1}(1-rcR^{-1})\} \tag{13}$$

и при этом будет выполнено неравенство

$$\|H(n,X,\mu)\|\leqslant r,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Покажем, что для вектора $H(n,X,\mu)$ выполнено условие Липшица. Оценивая разность решений систем (8) при $X=X_1$, $X=X_2$, получаем неравенство

$$\|H(n,X_1,\mu)-H(n,X_2,\mu)\|\leqslant c(1-|\mu|gL)^{-1}\|X_1-X_2\|. \tag{14}$$

Поскольку $H(n,0,\mu)=0$, то неравенство (11) вытекает из неравенства (14) при $X_1=X$, $X_2=0$.

Из системы уравнений (8) и неравенства (14) находим

$$\|(H(n,X_1,\mu)-G(n+1)X_1)-(H(n,X_2,\mu)-G(n+1)X_2)\|\leqslant$$

$$\leqslant|\mu|gL\sup_s\|H(s,X_1,\mu)-H(s,X_2,\mu)\|\leqslant\frac{c|\mu|gL}{1-|\mu|gL}\|X_1-X_2\|. \tag{15}$$

При $X=X_1$, $X_2=0$ из неравенства (15) получаем

$$\|H(n,X,\mu)-G(n+1)X\|\leqslant\frac{c|\mu|gL}{1-|\mu|gL}\|X\|. \tag{16}$$

При $n=0$ из формул (15), (16) находим оценки для нелинейных проекторов при $x_i\in D_2$, $i=1,2$:

$$\begin{gathered}\|P_1(X_1,\mu)-P_1(X_2,\mu)\|\leqslant\frac{c}{1-|\mu|gL}\|X_1-X_2\|,\\ \|(P_1(X_1,\mu)-P_1X_1)-(P_1(X_2,\mu)-P_2X_2)\|\leqslant\frac{c|\mu|gL}{1-|\mu|gL}\|X_1-X_2\|.\end{gathered} \tag{17}$$

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда вектор $F(X, \mu)$ в системе (1) аналитически зависит от X, μ в комплексной области D и выполнены условия (4) при $L = L(R)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть в системе разностных уравнений* (7) *вектор* $F(X, \mu)$ *аналитически зависит от* X, μ *в комплексной области* D (3) *и выполнены условия* (4). *Если однородная система* (2) *не имеет ограниченных на всей оси* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *решений, то в области* D_2 (13) *проектор* $P_1(X, \mu)$ *будет аналитически зависеть от* X, μ *и для* $P_1(X, \mu)$ *будут выполнены условия* (17).

Доказательство. Систему суммарных уравнений (8) в области D_2 можно решать методом последовательных приближений

$$H_0(n, X, \mu) \equiv 0, \quad H_{i+1}(n, X, \mu) = G(n+1)X +$$
$$+ \mu \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s) F(H_i(s, X, \mu), \mu), \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

При $\|X\| < r$ векторы $H_i(s, X, \mu)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, будут удовлетворять условию $\|H_i(s, X, \mu)\| < R$ и, следовательно, находятся в области D (3). Поэтому все векторы $H_i(s, X, \mu)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будут аналитически зависеть от X, μ в области D_2 (13). В силу равномерной сходимости рядов в системе уравнений (18) вектор $H_{i+1}(n, X, \mu)$ будет также аналитически зависеть от X, μ в области D_2. Поэтому последовательность $H_i(n, X, \mu)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно сходится при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ по X, $\mu \in D_2$ к предельному вектору $H(n, X, \mu) = \lim\limits_{i \to \infty} H_i(n, X, \mu)$ и также будет зависеть аналитически от X, μ в этой области. Из этого следует справедливость неравенств (17) в области D_2. Это окончательно доказывает теорему.

3. Построение аналитических интегральных многообразий. Пусть система разностных уравнений (1) расщеплена в линейном приближении и имеет вид

$$Y_{n+1} = A_1 Y_n + \mu F_1(Y_n, Z_n, \mu), \quad Z_{n+1} = A_2 Z_n + \mu F_2(Y_n, Z_n, \mu), \tag{19}$$

где $\dim Y_n = q$, $\dim Z_n = p$, $q + p = m$. Предположим, что спектр матрицы A_1 лежит в области $|z| < 1$, а спектр матрицы A_2 — в области $|z| > 1$. Для векторов $Y = (y_1, \ldots, y_q)^T$, $Z = (z_1, \ldots z_p)^T$ используем нормы

$$\|Y\| = \max_s \{|y_s|\}, \quad s = 1, \ldots, q, \quad \|Z\| = \max_l \{|z_l|\}, \quad l = 1, \ldots, p.$$

Полагаем, что для матриц A_1, A_2 выполнены условия

$$\|A_1^n\| \leqslant c\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \|A_2^{-n}\| \leqslant c\rho^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \rho < 1. \tag{20}$$

При этом для матрицы Грина

$$G(n) = \begin{pmatrix} A_1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1, \quad G(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \leqslant 0$$

будет выполнено условие (6).

Пусть в области

$$D = \{\|Y\| < R, \ \|Z\| < R, \ |\mu| < \mu_0\} \tag{21}$$

векторы $F_i(Y, Z, \mu)$, $i = 1, 2$, аналитически зависят от Y, Z, μ и выполнены условия вида (4)

$$\begin{gathered} F_i(0, 0, \mu) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \\ \|F_i(Y_1, Z_1, \mu) - F_i(Y_2, Z_2, \mu)\| \leqslant L(R) \max\{\|Y_1 - Y_2\|, \|Z_1 - Z_2\|\}. \end{gathered} \tag{22}$$

При выполнении условий $rc < R$, $1 - rcR^{-1} > |\mu| g L(R)$ в силу теоремы 1 проектор $P_1(X, \mu)$ можно представить в виде

$$P_1(X, \mu) = \begin{pmatrix} Y + \mu S_1(Y, Z, \mu) \\ \mu S_2(Y, Z, \mu) \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix},$$

где векторы $S_i(Y, Z, \mu)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют в силу неравенств (17) условиям

$$\| S_i(Y_1, Z_1, \mu) - S_i(Y_2, Z_2, \mu) \| \leqslant \frac{cgL(R)}{1 - |\mu| gL(R)} \max \{ \| Y_1 - Y_2 \|, \| Z_1 - Z_2 \| \},$$

$$i = 1, 2,$$

в области

$$D_2 = \{ \| Y \| < r, \ \| Z \| < r, \ |\mu| < \mu_2 \},$$

$$\mu_2 \equiv \min \{ \mu_0, g^{-1} L^{-1}(R)(1 - 2cR^{-1}) \}.$$

Интегральное многообразие G_1 системы разностных уравнений (19) определяется системой неявных уравнений вида (9)

$$Z = \mu S_2(Y, Z, \mu), \tag{23}$$

а интегральное многообразие G_2 системы (19) определяется системой неявных уравнений вида (10)

$$-Y + \mu S_1(-Y, -Z, \mu) = 0. \tag{24}$$

Решение $Z = \Phi(Y, \mu)$, $Y = \Psi(X, \mu)$ систем неявных уравнений (23), (24) можно найти методом последовательных приближений

$$\Phi_0(Y, \mu) \equiv 0, \quad \Phi_{i+1}(Y, \mu) = \mu S_2(Y, \Phi_i(Y, \mu), \mu), \quad \Phi(Y, \mu) = \lim_{i \to \infty} \Phi_i(Y, \mu),$$

$$\Psi_0(Z, \mu) \equiv 0, \quad \Psi_{i+1}(Z, \mu) = \mu S_1(-\Psi(Z, \mu) - Z, \mu), \quad \Psi(Z, \mu) = \lim_{i \to \infty} \Psi_i(Z, \mu).$$

Для аналитичности вектор-функций $\Phi(Y, \mu)$, $\Psi(Z, \mu)$ в области

$$D_3 = \{ \| Y \| < r, \ \| Z \| < r, \ |\mu| < \mu_3 \},$$

$$\mu_3 \equiv \min \{ \mu_2, g^{-1}(1 + c)^{-1} L^{-1}(R) \} \tag{25}$$

достаточно, чтобы последовательности $\Phi_i(Y, \mu)$, $\Psi_i(Z, \mu)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, сходились равномерно по Y, Z, μ и чтобы при любом значении $i = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялись условия

$$\| \Phi_i(Y, \mu) \| < r, \quad \| \Psi_i(Z, \mu) \| < r, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Это приводит к дополнительному неравенству $|\mu| g(1 + c) L(R) < 1$, откуда следует ограничение на параметр μ (25).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в системе разностных уравнений* (19) *вектор-функции $F_i(Y, Z, \mu)$, $i = 1, 2$, аналитичны относительно Y, Z, μ в области D* (21) *и удовлетворяют условиям* (22). *Если для матриц A_1, A_2 выполнены условия* (20), *т. е. при $\mu = 0$ система разностных уравнений* (19) *экспоненциально дихотомична, то при выполнении дополнительных условий*

$$rcR^{-1} + |\mu| gL(R) < 1, \quad |\mu| g(1 + c) L(R) < 1 \tag{26}$$

система разностных уравнений (19) *имеет аналитическое интегральное многообразие решений G_1 размерности q, стремящихся к нулю при $n \to +\infty$, определяемое системой уравнений вида $Z = \Phi(Y, \mu)$.*

Аналогично система разностных уравнений (19) имеет аналитическое интегральное многообразие решений G_2 размерности p, стремящихся к нулю при $n \to -\infty$, определяемое системой уравнений вида $Y = \Psi(Z, \mu)$. При этом векторы $\Phi(Y, \mu)$, $\Psi(Z, \mu)$ аналитичны в области D_3 (25) и удовлетворяют условиям ограниченности

$$\|\Phi(Y,\mu)\| \leqslant r, \quad \|\Psi(Z,\mu)\| \leqslant r.$$

Интегральные многообразия G_1, G_2 системы разностных уравнений (19) являются аналитическими, так как определяются аналитическими функциями.

Для определения интегральных многообразий $Z = \Phi(Y, \mu)$, $Y = \Psi(Z, \mu)$ можно использовать системы функциональных уравнений. Поскольку должны выполняться равенства

$$Z_n = \Phi(Y_n, \mu), \quad Z_{n+1} = \Phi(Y_{n+1}, \mu), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то из системы разностных уравнений (19) получим систему функциональных уравнений

$$A_2\Phi(Y,\mu) + \mu F_2(Y, \Phi(Y,\mu), \mu) = \Phi(A_1 Y + \mu F_1(Y, \Phi(Y,\mu), \mu), \mu). \quad (27)$$

Аналитическое относительное Y, μ решение системы функциональных уравнений (27) однозначно определяется при отыскании решения в виде степенного разложения

$$\Phi(Y,\mu) = \sum_{m_i=0}^{\infty} \Phi_{m_0, m_1, \dots, m_q} \mu^{m_0} y_1^{m_1} \dots y_q^{m_q}, \quad i = 0, 1, \dots, q. \quad (28)$$

Подставляя разложение (28) в систему уравнений (27), можно последовательно определить все коэффициенты разложения, достаточные условия сходимости, которые содержатся в теореме 2. Для решения системы уравнений (27) используем метод последовательных приближений

$$\Phi_0(Y,\mu) \equiv 0, \quad \Phi_{i+1}(Y,\mu) = -\mu A_2^{-1} F_2(Y, \Phi_i(Y,\mu), \mu) +$$
$$+ A_2^{-1}\Phi_i(A_1 Y + \mu F_1(Y, \Phi_i(Y,\mu), \mu), \mu), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$
$$\Phi(Y,\mu) = \lim_{i\to\infty} \Phi_i(Y,\mu).$$

Аналогично для вектора $\Psi(Z, \mu)$ легко выводится система функциональных уравнений

$$A_1\Psi(Z,\mu) + \mu F_1(\Psi(Z,\mu), Z, \mu) = \Psi(A_2 Z + \mu F_2(\Psi(Z,\mu), Z, \mu), \mu). \quad (29)$$

Решение системы уравнений (29) однозначно определяется при отыскании его в виде степенного разложения

$$\Psi(Z,\mu) = \sum_{m_j=0}^{\infty} \Psi_{m_0, m_1, \dots, m_p} \mu^{m_0} z_1^{m_1} \dots z_p^{m_p}. \quad (30)$$

Из теоремы 2 вытекает следующая теорема, имеющая самостоятельное значение для системы функциональных уравнений (27), (29).

Теорема 3. *Пусть в системе функциональных уравнений* (27) *или* (29) *векторы $F_i(Y, Z, \mu)$, $i = 1, 2$, аналитичны в некоторой окрестности точки $Y = 0$, $Z = 0$, $\mu = 0$, $F_i(0, 0, \mu) = 0$, $i = 1, 2$. Если спектр матрицы A_1 лежит в области $|z| < 1$, а спектр матрицы A_2 — в области $|z| > 1$, то системы функциональных уравнений* (27), (29) *имеют единственные аналитические решения $Z = \Phi(Y, \mu)$, $Y = \Psi(Z, \mu)$, определяемые разложениями вида* (28), (30) *и такие, что $\Phi(0, \mu) \equiv 0$, $\Psi(0, \mu) \equiv 0$.*

4. Пример. Найдем аналитические интегральные многообразия системы нелинейных разностных уравнений

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \mu z_n^2, \quad z_{n+1} = \beta z_n + \mu y_n^2, \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| > 1. \quad (31)$$

Будем искать интегральное многообразие G_1 решений, стремящихся к нулю при $n \to +\infty$, определяемое уравнением $z = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ задается степенным рядом

$$\varphi(y) = a_2\mu y^2 + a_3\mu^2 y^3 + a_4\mu^3 y^4 + a_5\mu^4 y^5 + \dots. \quad (32)$$

Подставляя разложение (32) в функциональное уравнение

$$\beta\varphi(y) + \mu y^2 = \varphi(\alpha y + \mu\varphi^2(y))$$

вида (27), получаем для коэффициентов систему уравнений

$$\beta a_2 + 1 = \alpha^2 a_2, \quad \beta a_3 = \alpha^3 a_3, \quad \beta a_4 = \alpha^4 a_4, \quad \beta a_5 = 2a_1^3 + \alpha^5 a_5, \ldots,$$

откуда находим первые члены разложения $\varphi(y)$ в ряд

$$\varphi(y) = -\frac{\mu y^2}{\beta - \alpha^2} - \frac{2\alpha\mu^4 y^5}{(\beta - \alpha^2)^3 (\beta - \alpha^5)} + \ldots \tag{33}$$

Аналогично для интегрального многообразия G_2 решений системы (31), стремящихся к нулю при $n \to -\infty$, получаем уравнение $y = \psi(z)$, где функция $\psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha\psi(z) + \mu z^2 = \psi(\beta z + \mu\psi^2(z)). \tag{34}$$

Уравнение (34) имеет единственное аналитическое решение

$$\psi(z) = \frac{\mu z^2}{\beta^2 - \alpha} - \frac{2\beta\mu^4 z^5}{(\beta^2 - \alpha)^3 (\beta^5 - \alpha)} + \ldots . \tag{35}$$

Укажем достаточные условия сходимости степенных рядов (33), (35). Пусть $|y| \leqslant R$, $|z| \leqslant R$. При этом из условий вида (22) находим $L(R) = 2R$. Условия сходимости (26) принимают вид неравенств

$$\frac{rc}{R} + |\mu r| 2g\left(\frac{R}{r}\right) < 1, \quad 4|\mu r| g\left(\frac{R}{r}\right) < 1.$$

Эти условия могут быть выполнены, если

$$|\mu r| \leqslant \frac{1}{8y} = \frac{(1-\alpha)(\beta - 1)}{8(\beta - \alpha)}. \tag{36}$$

Условие (36) определяет радиус сходимости степенных рядов (33), (35).

На интегральном многообразии G_1 система уравнений (31) сводится к разностному уравнению первого порядка

$$y_{n+1} = y_n\left(\alpha + \frac{\mu^3 y_n^3}{(\beta - \alpha^2)^2} + \frac{4\alpha\mu^6 y_n^6}{(\beta - \alpha^2)^4 (\beta - \alpha^5)} + \ldots\right),$$

а на интегральном многообразии G_2 — к разностному уравнению

$$z_{n+1} = z_n\left(\beta + \frac{\mu^3 z_n^3}{(\beta^2 - \alpha)^2} - \frac{4\beta\mu^6 z_n^6}{(\beta^2 - \alpha)^4 (\beta^5 - \alpha)} + \ldots\right).$$

В заключение отметим, что некоторые из результатов, приведенных выше, могут быть обобщены для нестационарной системы разностных уравнений (1), если в линейном приближении она будет экспоненциально дихотомична.

1. *Валеев К. Г., Курбаншоев С. З.* Построение нелинейных проекторов системы разностных уравнений // Дифференциальные уравнения с частными производными. Межвуз. сб. научн. тр.— 1988.— С. 138—147.
2. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 388 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Валеев К. Г.* Расщепление спектра матриц.— Киев : Вища шк., 1986.— 272 с.

Получено 04.03.91