УДК 519.21

Н. Н. Леоненко, д-р физ.-мат. наук,
Ле Фе До, асп. (Киев. ун-т)

Об оценках параметров регрессии случайных полей. II

Исследованы асимптотические свойства оценок модифицированного метода наименьших квадратов параметров регрессии случайных полей.

Досліджені асимптотичні властивості оцінок модифікованого методу найменших квадратів параметрів регресії випадкових полів.

Данная статья является продолжением статьи [7], поэтому в ней сохранены обозначения и продолжена нумерация формул, теорем и использованных источников.

Рассмотрим снова схему регрессии (1) в случае, когда «случайный шум» удовлетворяет условию (5). В гауссовском случае такие случайные поля называют иногда полями типа П. Леви.

3. Свойства ОММНК для схемы регрессии со случайным полем типа П. Леви. Теорема 2. *При условиях* (1), (2), (5)—(7) *выполнены утверждения* i), ii) *теоремы* 1, *и*

$$D\check{\alpha} = N^{-1}\| g_s\|_2^{-4}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\sigma^2_{G_s},$$

$$D\check{\beta} = \| g_s\|_2^{-4}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right]^{-1}\sigma^2_{G_s},$$

где при $s=\mathrm{I}$

$$\sigma^2_{G_{\mathrm{I}}} = \prod_{k=1}^{n}G_k(1)\int_I\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^2}\prod_{j=1}^{n}g_j(t_j)\,dt-\frac{1}{2}\int_I\int_I\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-s_i)^2}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}g_j(t_j)\,g_j(s_j)\,dtds$$

а при $s=\mathrm{II}$

$$\sigma^2_{G_{\mathrm{II}}} = \sum_{k,l=1}^{n}G_k(1)\int_I\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^2 g_l(t_l)}\,dt-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\int_I\int_I\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-s_i)^2}\times$$
$$\times\, g_k(t_k)\,g_l(s_l)\,dtds.$$

При условии (12) $\check{\alpha}$ *и* $\check{\beta}$ *являются* L_2*-состоятельными для параметров* α *и* β, *а при условии* (13) *последовательность случайных полей* $N^{1/2}(\check{\alpha}-\alpha,\ \check{\beta}-\beta)$ *является асимптотически нормальной с нулевым средним и матрицей ковариации* $\| g_s\|_2^{-4}\sigma^2_{G_s}\Sigma$, *где матрица* Σ *определяется формулой* (14).

Доказательство. При условиях (1), (2), (5), (6), (7), используя теорему Фубини и интегрирование по частям, имеем

$$M\int_I\varepsilon_i(t)\,g_s(t)\,dt = \int_I M\varepsilon_i(t)\,g_s(t)\,dt = 0.$$

При $s=\mathrm{I}$ имеем

$$M\left(\int_I\varepsilon_i(t)\,g_I(t)\,dt\right)^2 = \int_I\int_I M\varepsilon_i(t)\,\varepsilon_i(s)\,g_I(t)\,g_I(s)\,dtds = \prod_{k=1}^{n}G_k(1)\times$$
$$\times\int_I\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^2}\prod_{j=1}^{n}g_j(t_j)\,dt-\frac{1}{2}\int_I\int_I\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-s_i)^2}\prod_{j=1}^{n}g_j(t_j)\,g_j(s_j)\,dtds.$$

Дале

$$M\left(\int_I \varepsilon_i(t)\, g_{\mathrm{II}}(t)\, dt\right)^2 = \sum_{k,l=1}^{n} G_k(1) \int_I \sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 g_l(t_l)}\, dt -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} \iint_{I\,I} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i)^2\, g_k(t_k)\, g_l(s_l)}\, dt ds.$$

Отсюда непосредственно вытекает первое и второе утверждения теоремы 2. Остальные свойства доказываются аналогично доказательству теоремы 1.

Вернемся снова к исследованию ОММНК в случае, когда «случайный шум» представляет собой поле с независимыми приращениями (см. п. 2).

4. Оптимальные приближения. С целью получить выражения для ОММНК $\check{\alpha}$ и $\check{\beta}$, более приемлемые с точки зрения приложений, будем приближать интеграл $\int_I \varphi_i(t)\, g(t)\, dt$ выражением вида $\sum_{j_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{m_n} h^n \times$ $\times\, \varphi_i(j_1c_1, \ldots, j_nc_n)\, g(j_1c_1, \ldots, j_nc_n)$, где $j = (j_1, \ldots, j_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $j \otimes c = (j_1c_1, \ldots, j_nc_n)$; $c_i = h$; $0 < h \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} m_i^{-1}$; $\varphi_i(t)$, $t \in I$, — случайные поля.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon_i(t)$ удовлетворяет условию (4) и $g(t) = g_{\mathrm{I}}(t)$. Положим

$$R_h = M\left\{\int_I \varepsilon_i(t)\, g(t)\, dt - \sum_{j_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{m_n} h^n \varepsilon_i(jc)\, g(jc)\right\}^2 \tag{16}$$

и найдем такое h^*, что $R_* = R_{h^*} = \min_{0 < h \leqslant m_i^{-1},\ i=\overline{1,n}} R_h$. Предположим, что $g_s(t) = g_{\mathrm{I}}(t)$, и заметим, что R_h не зависит от i. Имеем

$$R_h = \sigma_I^2 - h^{3n} \sum_{j_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{m_n} \prod_{s=1}^{n} j_s\left(j_s - \frac{1}{3} j_s^3 h^2\right) + h^{5n} \sum_{j_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{m_n} j_1^3 \ldots j_n^3 + \ldots$$

$$\ldots + \sum\sum_{1 \leqslant j_1 < j_1' \leqslant m_1} \ldots \sum\sum_{1 \leqslant j_n < j_n' \leqslant m_n} h^{5n} j_1^2 \ldots j_n^2 j_1' \ldots j_n'.$$

Рассмотрим только $n = 2$ (для произвольного $n > 2$ вычислительные трудности резко возрастают). Полагая $m_i = m$ для всех $i = \overline{1, n}$, и $v = h^2$, получаем

$$R_v = \left(\frac{2}{15}\right)^2 - v^3 \frac{m^2(m+1)^2(2m+1)^2}{36} + \frac{v^4}{270} m^2(m+1)^2(2m+1)^2 \times$$

$$\times (3m^2 + 3m - 1) - \frac{v^5}{129600} [32m^2(m+1)^2(2m+1)^2(3m^2+3m-1) -$$

$$- 2700m^4(m+1)^4 - 9(m-1)^2 m^2 (m+1)^2 (8m^2+5m-2)^2].$$

Тогда производная функции R_v по v имеет вид

$$R_v' = -\frac{v^2}{12} m^2(m+1)^2(2m+1)^2 + \frac{2v^3}{135} m^2(m+1)^2(2m+1)^2 \times$$

$$\times (3m^2 + 3m - 1) - \frac{v^4}{25920} [32\, m^2(m+1)^2(2m+1)^2(3m^2+3m-1)^2 -$$

$$- 2700m^4(m+1)^4 - 9(m-1)^2 m^2 (m+1)^2 (8m^2+5m-2)^2].$$

Решив уравнение $R'_v = 0$, получим

$$v_* = \frac{36}{15}\{16(2m+1)^2(3m^2+3m-1) + (2m+1)[1536m^6 + 1908m^5 + 121443m^4 + 244206m^3 + 121783m^2 + 516m + 76]^{1/2}\}\{576m^6 + 324m^5 - 1137m^4 - 3354m^3 - 1741m^2 + 55m - 4\}^{-1}. \quad (17)$$

Учитывая, что $(h^*)^2 = v_*$, имеем

$$R_* = R_{h^*} = \left(\frac{2}{15}\right)^2 - \frac{1024}{30375}\{16(2m+1)^2(3m^2+3m-1) + (2m+1) \times [1536m^6 + 1908m^5 + 121443m^4 + 244206m^3 + 121783m^2 + 516m + 76]^{1/2}\}^3 \times \{576m^6 + 324m^5 - 1137m^4 - 3354m^3 - 1741m^2 + 55m - 4\}^{-3} \times m^2(m+1)^2(2m+1)^2 + \frac{524288}{6824475} m^2(m+1)^2(2m+1)^2(3m^2+3m-1) \times \{16(2m+1)^2(3m^2+3m-1) + (2m+1)[1536m^6 + 1908m^5 + 121443m^4 + 244206m^3 + 121783m^2 + 516m + 76]^{1/2}\}^4\{576m^6 + 324m^5 - 1137m^4 - 3354m^3 - 1741m^2 + 55m - 4\}^{-4} - \frac{3936}{18956875}\{16(2m+1)^2 \times (3m^2+3m-1) + (2m+1)[1536m^6 + 1906m^5 + 121443m^4 + 244206m^3 + 121783m^2 + 512m + 76]^{1/2}\}^5\{576m^6 + 324m^5 - 1137m^4 - 3354m^3 - 1741m^2 + 55m - 4\}^{-4}. \quad (18)$$

Лемма 1. *При условиях* (1)—(4), (6) R_h *будет принимать минимальное значение в случае, когда* $(h^*)^2$ *определяется формулой* (17). *Тогда* $R_* = R_{h^*}$ *задается формулой* (18), *причем это выражение стремится к нулю при* $m \to \infty$.

Доказательство леммы 1 ввиду его простоты опускаем.

Положим для каждого фиксированного $h : 0 < h \leqslant m^{-1}$

$$\tilde{\beta}_m(h) = 9\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})h^4\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m} j_1 j_2 Y_i(j_1 h, j_2 h),$$

$$\tilde{\alpha}_m(h) = 9N^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^2 - Nx_i\bar{x}\right)h^4\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m} j_1 j_2 Y_i(j_1 h, j_2 h). \quad (19)$$

Теорема 3. *При условиях* (1)—(4), (6) *для каждого* $N \geqslant 2$ *и* $m \geqslant 2$, *имеем*

i) $$\min_{0<h\leqslant m^{-1}} D(\check{\beta} - \tilde{\beta}_m(h)) = D(\check{\beta} - \tilde{\beta}_m(h^*)) = 81R_*\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right]^{-1},$$

$$\min_{0<h\leqslant m^{-1}} D(\check{\alpha} - \tilde{\alpha}_m(h)) = D(\check{\alpha} - \tilde{\alpha}_m(h^*)) = 81N^{-1}R_*\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}x_i^2;$$

ii) $M\tilde{\beta}_m(h^*) = 2^{-2}\beta m^2(m+1)^2(2m+1)^2(h^*)^6$. $M\tilde{\alpha}_m(h^*) = 2^{-2}\alpha m^2(m+1)^2 \times (2m+1)^2(h^*)^2$;

iii) $$D\tilde{\beta}_m(h^*) = 9(h^*)^{10}m^2(m+1)^2(2m+1)^2(2m^2+2m+1)^2 \times$$

$$\times \left[100 \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2\right]^{-1}, \quad D\tilde{\alpha}_m(h^*) = 9\,(h^*)^{10} m^2 (m+1)^2 (2m+1)^2 \times$$

$$\times (2m^2 + 2m + 1)^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \left[100N \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2\right]^{-1}.$$

Доказательство теоремы 3 опустим. Отметим лишь, что оно основано на прямых вычислениях.

Положим $m = rN$, $r > 0$.

Следствие 1. *При условиях* (1) — (4), (6) *и для каждого* $r > 0$ *и* $N \to \infty$ *имеем*:

i) *оценка* $\tilde{\alpha}_{rN}(h^*)$ $(\tilde{\beta}_{rN}(h^*))$ *является асимптотически несмещенной оценкой* α (*или* β);

ii) *при условии* (13) *оценка* $\tilde{\alpha}_{rN}(h^*)$ (*или* $\tilde{\beta}_{rN}(h^*)$) *является* L_2-*состоятельной оценкой* α (*или* β);

iii) *при условии* (14) *последовательность случайных векторов* $(rN)^{1/2}(\tilde{\alpha}_{rN}(h^*) - \alpha, \tilde{\beta}_{rN}(h^*) - \beta)$ *при* $N \to \infty$ *имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами* $\left((0, 0), \left(\frac{6}{5}\right)^2 r\Sigma\right)$.

Доказательство. Свойства i), ii) очевидны. Докажем свойство iii). При $N \to \infty$ имеем

$$rNM(\tilde{\alpha}_{rN}(h^*) - \check{\alpha})^2 \to 0, \quad rNM(\tilde{\beta}_{rN}(h^*) - \check{\beta})^2 \to 0.$$

Используя лемму 5.1 [3], получаем, что для любых действительных чисел a_1 и a_2 векторы $a_1(rN)^{1/2}(\tilde{\alpha}_{rN}(h^*) - \alpha) + a_2(rN)^{1/2}(\tilde{\beta}_{rN}(h^*) - \beta)$ имеют такое же предельное распределение, как и векторы $a_1(rN)^{1/2}(\check{\alpha} - \alpha) + a_2(rN)^{1/2}(\check{\beta} - \beta)$, которые имеют асимптотически нормальное распределение с параметрами, указанными в утверждении (iv) теоремы 1.

5. Частный случай. Рассмотрим случай, когда $\beta = 0$, $n = 2$ в (1), т. е.

$$Y_i(t_1, t_2) = \alpha g(t_1) g(t_2) + \varepsilon_i(t_1, t_2), \tag{20}$$

где $\varepsilon_i(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям (2) и (6) соответственно. Аналогично (10) имеем

$$\check{\alpha} = N^{-1} \| g \|_2^{-4} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \int_0^1 Y_i(t_1, t_2) g(t_1) g(t_2)\, dt_1 dt_1. \tag{21}$$

Эта оценка является ОММНК для α в модели (20). Легко проверить, что для всех α

$$D\check{\alpha} = N^{-1} \| g \|_2^{-8} (\sigma_G^2)^2.$$

Кроме того, при $N \to \infty$ $\check{\alpha}$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(\alpha, D\check{\alpha})$.

Тогда оптимальное приближение для оценки (21) имеет вид

$$\tilde{\alpha}_m(h^*) = 9N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (h^*)^4 \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} j_1 j_2 Y_i(j_1 h^*, j_2 h^*). \tag{22}$$

Имеем

$$D(\check{\alpha} - \tilde{\alpha}_m(h^*)) = 81N^{-1} R_*,$$

$$M\tilde{\alpha}_m(h^*) = 2^{-2} \alpha m^2 (m+1)^2 (2m+1)^2 (h^*)^6,$$

$$D\tilde{\alpha}_m(h^*) = 9\,(h^*)^{10} m^2 (m+1)^2 (2m+1)^2 (2m^2 + 2m + 1)^2 (100N)^{-1},$$

где h^*, R_* такие же, как и в лемме 1. Кроме того, из следствия 1 вытекает, что величины $(rN)^{1/2}(\tilde{\alpha}_{rN}(h^*)-\alpha)$ при $N\to\infty$ имеют асимптотически нормальное распределение с параметрами $\left(0,\left(\frac{6}{5}\right)^2 r\right)$.

7. *Леоненко Н. Н., Ле Фе До.* Об оценках параметров регрессии случайных полей. I // Укр. мат. журн.— 1992.— 44, № 4.— С. 497—502.

Получено 12.02.91