УДК 519.21

И. К. Мацак, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О суммировании независимых случайных величин методом Риса

При моментных ограничениях на X_1 устанавливаются точные достаточные условия на рост a_n для сходимости почти наверное взвешенных средних Риса $A_n^{-1}\sum_1^n a_iX_i$ к MX_1, где (X_n) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, (a_n) — положительная числовая последовательность, $A_n = \sum_1^n a_i$.

При моментних обмеженнях на X_1 знаходяться точні достатні умови на зростання (a_n) для збіжності майже всюди зважених середніх Ріса $A_n^{-1}\sum_1^n a_iX_i$ до MX_1, де (X_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, (a_n) — послідовність додатніх чисел, $A_n = \sum_1^n a_i$.

Пусть (X_n) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н. о. р. с. в.), $MX_1 = d$, (a_n) — последовательность положительных чисел, $A_n = \sum_1^n a_i$, $S_n = \sum_1^n a_iX_i$, $Z_n = S_n/A_n$.

В настоящей работе рассматривается задача о строгой сходимости взвешенных средних Риса Z_n:

$$P(\lim Z_n = d) = 1. \tag{1}$$

Для $a_n = 1$, $n\geqslant 1$, по усиленному закону больших чисел А. Н. Колмогорова [1, с. 337] равенство (1) эквивалентно условию

$$M|X_1|^p < \infty \tag{2}$$

при $p = 1$. Дальнейшие исследования этого вопроса можно проследить по работам [2, 3], где имеется достаточно полная библиография. Отметим результат В. Ф. Гапошкина [2] о эквивалентности сходимости взвешенных средних Риса Z_n и суммируемости последовательности (X_n) средними по блокам, который используется в настоящей работе.

Основные результаты, относящиеся к равенству (1), переносятся и на последовательности независимых случайных элементов со значениями в сепарабельных банаховых пространствах.

В дальнейшем при доказательстве равенства (1) для сокращения записи будем предполагать, что $MX_1 = 0$. Через C, C_s, $s \geqslant 0$, обозначаем положительные константы, необязательно совпадающие в разных местах. Соотношение $\alpha_n \sim \beta_n$ означает, что $\alpha_n/\beta_n \to 1$, $n \to \infty$, знак $\uparrow$ — монотонное неубывание.

Пусть

$$a_n = o(A_n), \quad A_n \uparrow \infty, \quad n \uparrow \infty. \tag{3}$$

Соответствующий регулярный метод суммирования называется методом Риса и обозначается $(\bar{R}, a_n)$.

Лемма 1 [4, с. 80].

$$A_n = \sum_1^n a_i, \quad A'_n = \sum_1^n a'_i.$$

Если $\dfrac{a'_{n+1}}{a'_n} \leqslant \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n \geqslant n_0)$ *либо* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{a'_{n+1}}{a'_n}$ *и* $\dfrac{A_n}{a_n} \leqslant C\dfrac{A'_n}{a'_n}$ $(n \geqslant n_0)$,

то $(\bar{R}, a_n)$ *— суммирование некоторой числовой последовательности* y_n *влечет* $(\bar{R}, a'_n)$ *— суммирование этой последовательности.*

Лемма 2. *Пусть* $g(x)$ *— положительная неубывающая функция,* $g(x) \uparrow \infty$, $x \uparrow \infty$, $\Psi(x) = xg(x)$. *Тогда существует положительная с. в.* X *такая, что*

$$MX < \infty, \quad M\Psi(X) = \infty.$$

Доказательство. Достаточно определить функцию распределения $F(x)$ с. в. X. Положим $n_0 = \min(n : ng(n) > 1)$,

$$F(n+1) - F(n) = (ng(n))^{-1} - (ng(n+1))^{-1} \qquad (n \geqslant n_0),$$

$$F(n_0) = 1 - \sum_{n=n_0}^{\infty} (F(n+1) - F(n)), \quad F(0) = 0.$$

Эти равенства определяют функцию $F(x)$ в точках 0, n_0, $n_0 + k$, $k \geqslant 1$. На интервалах $[0, n_0]$, $[n_0 + k - 1, n_0 + k]$, $k \geqslant 1$, $F(x)$ линейна и непрерывна. Тогда

$$MX \leqslant n_0 + 2\sum_{n=n_0}^{\infty} n(F(n+1) - F(n)) \leqslant n_0 + \frac{2}{g(n_0)},$$

$$M\Psi(X) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} ng(n)(F(n+1) - F(n)) = \infty.$$

Расходимость последнего ряда следует из оценки

$$\sum_{n=m}^{\infty} ng(n)(F(n+1) - F(n)) \geqslant$$

$$\geqslant g(m)\sum_{n=m}^{\infty} n(F(n+1) - F(n)) \geqslant 1 \qquad (m \geqslant n_0).$$

Предложение 1. *Пусть* $a_n \downarrow$ *и выполняется условие* (3).

1) *Если справедливо неравенство* (2) *при* $p = 1$, *то справедливо равенство* (1); 2) *если* $A_n/a_n \leqslant Cn$ $(n \geqslant n_0)$, *то неравенство* (2) *при* $p = 1$ *эквивалентно равенству* (1).

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (3).

I) *Если* $a_n \uparrow$ *и* $a_n = 0(A_n/n)$ $(n \geqslant n_0)$, *то из справедливости неравенства* (2) *при* $p = 1$ *вытекает равенство* (1);

II) *для любой положительной непрерывной функции* $g(x)$ *такой, что* $g(x) \uparrow \infty$, $g\dfrac{(x)}{x} \downarrow 0$, $x \uparrow \infty$, *существуют положительная последователь-*

ность (a_n) *и симметричная последовательность н. о. р. с. в.* (X_n) ***такие,*** что $M\,|X_1| < \infty$, $a_n \uparrow$, *выполняется* (3) *и*

$$a_n = g(n)\,A_n/n, \tag{4}$$

но (1) *не верно.*

Доказательство предложения 1 и п. I теоремы 1 вытекает из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова и леммы 1 (см. также [2]). Докажем п. II теоремы 1. Не ограничивая общности считаем, что $1 \leqslant g(n) < n$, $n \geqslant 2$. Полагаем $A_1 = a_1 = \lambda_1 = 1$,

$$\lambda_n = \frac{n}{n - g(n)}, \quad A_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k, \quad a_n = A_n - A_{n-1}, \qquad n \geqslant 2.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda_{n+1} - 1}{1 - \lambda_n^{-1}} = \frac{ng(n+1)}{g(n)\,[n+1-g(n+1)]} \geqslant 1.$$

Без труда проверяются и условия (3), (4). Перейдем к построению последовательности (X_n). Пусть $\Psi^{(-1)}(x) = x/g(x)$, $\Psi(x)$ — обратная функция к $\Psi^{(-1)}(x)$, т. е. $\Psi(\Psi^{(-1)}(x)) = x$ (в условиях теоремы $\Psi^{(-1)}(x)$ — монотонно неубывающая функция). Тогда $\Psi(x) = x\tilde{g}(x)$, где $\tilde{g}(x) = g(\Psi(x)) \uparrow \infty$ $x \uparrow \infty$. Согласно лемме 2 существует положительная с. в. X такая, что

$$MX < \infty, \quad M\Psi(X) = \infty. \tag{5}$$

Полагаем $X_1 = \varepsilon \cdot X$, ε — с. в., независящая от X, $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$, X_n, $n \geqslant 2$,— независимые копии X_1. Предположим, что для построенных последовательностей (a_n) и (X_n) выполняется равенство (1). Тогда (см. [1, с. 332], лемма 14)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(a_n\,|X_n| \geqslant A_n) < \infty.$$

Учитывая равенство (4), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| \geqslant \frac{n}{g(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X \geqslant \frac{n}{g(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Psi(X) \geqslant n) < \infty,$$

что противоречит (5). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть при некотором* p, $1 < p < \infty$, *выполнено условие* (2),

$$a_n \uparrow, \quad \frac{A_n}{a_n} \uparrow \infty, \quad n \uparrow \infty; \tag{6}$$

I) *если* $a_n = O(A_n/\ln^{\frac{1}{p-1}}(A_n))$, *то справедливо равенство* (1); II) *для любой положительной медленно меняющейся функции* $g(x) \uparrow \infty$, $x \uparrow \infty$, *существуют положительная последовательность* (a_n) *и н. о. с. в.* (X_n) *такие, что выполняется условие* (6) *и*

$$g(n)\,A_n \sim a_n \ln^{\frac{1}{p-1}}(A_n), \quad M\,|X_1|^p < \infty,$$

но равенство (1) *не верно.*

Доказательство теоремы 2. I. Предположим, что X_1 симметрично распределена. Известно [2], что при условии (6) существуют индексы $m_n \uparrow \infty$ такие, что при некоторых q, Q

$$1 < q \leqslant A_{m_{n+1}}/A_{m_n} \leqslant Q \qquad (n \geqslant n_0),$$

$$C_1 A_{m_n}/a_{m_{n-1}} \leqslant \overline{m}_n \leqslant C_2 A_{m_n}/a_{m_n}, \tag{7}$$

и в симметричном случае (1) эквивалентно следующему равенству:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\overline{m}_n^{-1}(Y_{m_n}-Y_{m_{n-1}})=0\right)=1, \tag{8}$$

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k,\qquad \overline{m}_n=m_n-m_{n-1}.$$

По лемме Бореля — Кантелли (8) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|Y_{m_n}-Y_{m_{n-1}}|>\delta\overline{m}_n)<\infty\qquad(\forall\,\delta>0). \tag{9}$$

В условиях теоремы для последовательности (X_n), условие (2) эквивалентно сходимости ряда [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|Y_{k_n}|\geqslant\delta k_n)<\infty\qquad(\forall\,\delta>0), \tag{10}$$

$$k_n\geqslant[n^{1/(p-1)}],\qquad n\geqslant1,$$

(9) следует из (10), если при $n\geqslant n_0$ и некотором C

$$C\overline{m}_n\geqslant n^{\frac{1}{p-1}}. \tag{11}$$

Применяя соотношение (7), имеем

$$\overline{m}_n\geqslant C_1A_{m_{n-1}}/a_{m_{n-1}}\geqslant C_2\ln^{\frac{1}{p-1}}(A_{m_{n-1}})\geqslant C_3n^{\frac{1}{p-1}},$$

т. е. неравенство (11), а следовательно, и (9) установлено. Таким образом, п. I доказан в симметричном случае.

Пусть X_1 — произвольная с. в., $MX_1=0$, $M|X_1|^p<\infty$. Перейдем к симметризованным н. о. р. с. в. ($X_n^s=X_n-X_n'$), где последовательности с. в. (X_n) и (X_n^1) эквивалентны и независимы. По доказанному выше для (X_n^s) выполняется равенство (1). Следовательно [1, с. 330].

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|S^s_{m_n}-S^s_{m_{n-1}}|\geqslant\delta A_{m_n})<\infty\qquad(\forall\,\delta>0).$$

Отсюда и неравенств симметризации [1, с. 329] имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|S_{m_n}-S_{m_{n-1}}-\mu(S_{m_n}-S_{m_{n-1}})|\geqslant\delta A_{m_n})<\infty\qquad(\forall\,\delta>0),$$

$\mu(Y)$ — медиана с. в. Y. Тогда почти наверное (п. н.)

$$A_n^{-1}(S_n-\mu(S_n))\to0,\qquad n\to\infty.$$

Воспользуемся известными оценками

$$|\mu(Y)|^p\leqslant2M|Y|^p,$$

$$M|S_n|^p\leqslant2M|X_1|^p\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p,\qquad1\leqslant p\leqslant2,$$

и условием (6). Тогда

$$A_n^{-1}\cdot\mu(S_n)\to0,\qquad n\to\infty,$$

и п. н. $A_n^{-1}S_n\to0$, $n\to\infty$, что завершает доказательство п. I.

II. Медленно меняющаяся функция $g(x)$ представима в виде [6, с. 323]

$$g(x)=b(x)\,g_0(x),$$

$$g_0(x) = C \exp\left(\int_1^x \frac{f(y)}{y}\, dy\right), \quad f(x) \to 0, \quad b(x) \to 1, \quad x \to \infty.$$

Пусть $g_p(x) = \left[\frac{p}{p-1} g_0(x)\right]^{\frac{p-1}{p}}$. Без труда проверяется соотношение

$$\frac{x g_p'(x)}{g_p(x)} = C_p f(x) \to 0, \qquad x \to \infty. \tag{12}$$

Положим

$$G_p(x) = \exp\left(x^{\frac{p-1}{p}} g_p(x)\right),$$

$$a_n = \left[\frac{p-1}{p} g_p(n)\, n^{-\frac{1}{p}} + g_p'(n)\, n^{\frac{p-1}{p}}\right] G_p(n).$$

Из равенства

$$\int_1^x \left[\frac{p-1}{p} g_p(y)\, y^{-1/p} + g_p'(y)\, y^{(p-1)/p}\right] G_p(y)\, dy = G_p(x) - G_p(1)$$

следует эквивалентность

$$A_n = \sum_1^n a_k \sim G_p(n). \tag{13}$$

Из асимптотических соотношений (12), (13) получаем

$$\frac{A_n}{a_n} \sim \left[\frac{p-1}{p} g_p(n)\, n^{-1/p} + n^{(p-1)/p} g_p'(n)\right]^{-1} =$$

$$= n^{1/p} g_p^{-1}(n) \left(\frac{p-1}{p} + n g_p'(n)\, g_p^{-1}(n)\right)^{-1} \sim \frac{p n^{1/p}}{(p-1)\, g_p(n)} \sim$$

$$\sim g_0^{-1}(n) \ln^{\frac{1}{p-1}}(A_n) \sim g^{-1}(n) \ln^{\frac{1}{p-1}}(A_n). \tag{14}$$

Оценка (14) показывает, что последовательность (a_n) удовлетворяет условиям п. II (значения a_n при малых n не существенны).

Пусть $\Psi^{(-1)}(x) = \dfrac{px}{(p-1)\, g_0^{p-1}(x)}$, $\Psi(x)$ — обратная функция к $\Psi^{(-1)}(x)$. Тогда $\Psi(x) = x\tilde{g}(x)$, $\tilde{g}(x)$ удовлетворяет равенству $\tilde{g}(x) = \dfrac{p-1}{p} g_0^{p-1}(\Psi(x))$. Согласно лемме 2 выбираем положительную с. в. X, удовлетворяющую условию (5), с. в. ε не зависит от X, $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$. Полагаем $X_1 = \varepsilon X^{1/p}$. X_n, $n \geqslant 2$, — независимые копии X_1. Предположим, что для построенных последовательностей (a_n) и (X_n) выполняется равенство (1). Тогда [1, с. 332]

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geqslant A_n/a_n) < \infty.$$

Отсюда и оценки (14) имеем

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_1| \geqslant \frac{p n^{1/p}}{(p-1)\, g_p(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_1|^p \geqslant \frac{pn}{(p-1)\, g_0^{p-1}(n)}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(\Psi(X) \geqslant n),$$

что противоречит (5). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. I. *Пусть существует H такое, что*

$$M\exp(h|X_1|)<\infty, \qquad 0\leqslant h\leqslant H, \tag{15}$$

выполняется условие (6) *и*

$$a_n=o\left(\frac{A_n}{\ln\ln A_n}\right). \tag{16}$$

Тогда справедливо равенство (1). II. *Существует положительная последовательность* (a_n), *удовлетворяющая условию* (6), $a_n=O\left(\frac{A_n}{\ln\ln A_n}\right)$, *для которой равенство* (1) *не выполняется при н.о.р.с.в.* $(X_n=\varepsilon_n)$, $P(\varepsilon_n=\pm 1)=1/2$.

Доказательство. I. Из приведенных выше рассуждений ясно, что достаточно установить оценку (9) в симметричном случае. Положим $g(n)=A_n/a_n\ln\ln A_n$, $g_1(n)=(g(n))^{1/3}$. По условию (16) $g(n)\to\infty$, $g_1(n)\to\infty$, $n\to\infty$. Для оценки ряда (9) используем следующее неравенство, справедливое при условии (15) [7]: для некоторого $\gamma>0$ и всех достаточно больших n в области $0\leqslant x\leqslant n^{1/2}/f(n)$

$$P(|Y_n|\geqslant x\sqrt{n})\leqslant\exp(-\gamma x^2),$$

$f(x)$ — произвольная положительная функция, $f(x)\uparrow\infty$, $x\uparrow\infty$.

Следовательно, при достаточно больших n

$$P(|Y_{\overline{m}_n}|\geqslant\delta\overline{m}_n)\leqslant P(|Y_{\overline{m}_n}|\geqslant\delta\overline{m}_n/g_1(\overline{m}_{n-1}))\leqslant\exp(-\gamma\delta^2\overline{m}_n/g_1^2(\overline{m}_{n-1})). \tag{17}$$

Из определения $g(n)$ и соотношения (7) имеем

$$\overline{m}_n\geqslant Cg(\overline{m}_{n-1})\ln\ln(A_{m_{n-1}})\geqslant C_1g(\overline{m}_{n-1})\ln n. \tag{18}$$

Из оценок (17), (18) при $n\geqslant n_0$ получаем

$$P(|Y_{\overline{m}_n}|\geqslant\delta\overline{m}_n)\leqslant n^{-Cg(m_{n-1})/g_1^2(\overline{m}_{n-1})}\leqslant n^{-2},$$

т. е. ряд (9) сходится.

Для доказательства п. II воспользуемся примером, восходящим к Марцинкевичу и Зигмунду [8]. Пусть $n>1$, $\lambda>0$,

$$a_n=(\ln n)^{-1/2}\exp(\lambda n/\ln n).$$

Тогда

$$A_n=\sum_1^n a_i\sim\lambda^{-1}(\ln n)^{1/2}\exp(\lambda n/\ln n),$$

$$\frac{A_n}{a_n}\sim\lambda^{-1}\ln n\sim\lambda^{-1}\ln\ln A_n.$$

Известно [8], что при достаточно большом λ п. н.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_1^n a_i\varepsilon_i/(B_n^2\ln\ln B_n^2)^{1/2}>0, \tag{19}$$

$$B_n^2=\sum_1^n a_i^2\sim(2\lambda)^{-1}\exp(2\lambda n/\ln n),$$

$$B_n^2\ln\ln B_n^2\sim(2\lambda)^{-1}\exp(2\lambda n/\ln n)\ln n\sim\frac{\lambda}{2}A_n^2. \tag{20}$$

Соотношения (19), (20) противоречат равенству (1), тем самым теорема 3 доказана.

Замечание. Мурье [9], используя усиленный закон больших чисел в R^1, доказала, что аналогичное утверждение справедливо и в сепарабельном банаховом пространстве. Анализ этого доказательства показывает, что оно без существенных изменений переносится на взвешенные суммы Риса. Поэтому предложение 1 и теоремы 1—3 будут верны для последовательностей независимых одинаково распределенных случайных элементов в сепарабельных банаховых пространствах.

1. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М. : Наука, 1972.— 414 с.
2. *Гапошкин В. Ф.* О суммировании последовательностей независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1988.— **33**, вып. 1.— С. 68—82.
3. *Микош Т., Норвайша Р.* Предельные теоремы для методов суммирования независимых случайных величин. I // Лит. мат. сб.— 1987.— **27**, № 1.— С. 142—155.
4. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
5. *Asmussen S., Kurt Z.* Necessary and sufficient conditions for complete convergence in the law of large numbers // Ann. Probab.— 1980. — **8**, N 1.— P. 176—182.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. —М. : Мир, 1984.— 752 с.
7. *Амосова Н. Н.* Одно неравенство для вероятностей больших уклонений // Теория вероятностей и ее применение.— 1987.— **32**, вып. 2.— С. 364—367.
8. *Teicher H.* On the law of the iterated logaritm // Ann. Probab.— 1974.— **2**, N 4.— P. 714—728.
9. *Mourier E.* Eléments aléatoires dans un espace de Banach // Ann. Inst. Henri Poincare.— 1953.— **13**, N 3.— P. 161—244.

Получено 27.06.90