УДК 517.986.9

А. Р. Миротин, канд. физ.-мат. наук (Гомел. ун-т)

Положительные полухарактеры и преобразование Лапласа

Показано, что образ конической полугруппы S при естественном отображении ее в свою вторую полугруппу положительных полухарактеров $(\widehat{S}_+)^{\widehat{}}_+$ есть тотальное подмножество пространства непрерывных функций на $\widehat{S}_+$, стремящихся к нулю на бесконечности. Это позволяет установить ряд свойств полугруппы $\widehat{S}_+$ и преобразования Лапласа мер на ней.

Показано, що образ конічної півгрупи S при природному відображенні її у свою другу півгрупу позитивних півхарактерів $(\widehat{S}_+)^{\widehat{}}_+$ є тотальна підмножина в просторі неперервних функцій на $\widehat{S}_+$, які прямують до нуля на нескінченності. Це дозволяє встановити ряд властивостей півгрупи $\widehat{S}_+$ і перетворення Лапласа мір на ній.

В трактате [1] (гл. IX, § 5) рассмотрено, в частности, преобразование Лапласа мер на полугруппе M при некоторых условиях на полугруппу ее полухарактеров. Из теоремы 1 данной работы следует, что эти условия выполняются, если M есть полугруппа неотрицательных полухарактеров конической полугруппы (определения см. ниже). Вытекающие из этого факта в силу результатов из [1] свойства (несколько модифицированного) преобразования Лапласа позволяют глубже изучить полугруппу неотрицательных полухарактеров и получить внутреннюю характеристику преобразования Лапласа комплексной меры, являющуюся аналогом теоремы Бохнера—Крейна [2]. Случай связной полугруппы изучался в [3].

Всюду ниже G есть локально компактная абелева группа с единицей e, S — открытая подполугруппа G, для которой e является точкой прикосновения (в [4] такие полугруппы называются коническими). Полухарактером полугруппы S будем называть нетривиальный непрерывный гомоморфизм этой полугруппы в единичный диск с операцией умножения комплексных чисел. Через $\widehat{S}$ обозначим множество всех полухарактеров полугруппы S, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах S, а через $\widehat{S}_+$ — подпространство этого пространства, состоящее из неотрицательных полухарактеров. Пространство $\widehat{S}_+$ локально компактно как замкнутое подмножество пространства $\hat{S}$ максимальных идеалов алгебры $L^1(S)$ [5]. Кроме того, $\hat{S}_+$ есть полугруппа относительно поточечного умножения. Это следует из леммы 1 данной работы. Для $\rho \in \hat{S}_+$ положим $S(\rho) = \{t \in S : \rho(t) > 0\}$, и пусть $G(\rho)$ — подгруппа группы G, порожденная $S(\rho)$. Тогда $G(\rho)$ открыто-замкнута в G, а $S(\rho)$ — открыто-замкнутая подполугруппа полугруппы S, так как $S(\rho) = G(\rho) \cap S$. Дополнение $N(\rho) = S \setminus S(\rho)$ есть открыто-замкнутый идеал полугруппы S. Положим $S_1 = S \cup \{e\}$. Наконец, положим $\hat{t}(\rho) = \rho(t)$ при $t \in S$, $\hat{e}(\rho) = 1$.

1. Базисная теорема. В основе дальнейших рассмотрений лежит следующий результат.

Теорема 1. *Семейство $\{\hat{t} : t \in S\}$ тотально в пространстве $C_0(\hat{S}_+)$ непрерывных функций на $\hat{S}_+$, стремящихся к нулю на бесконечности.*

Доказательству теоремы 1 предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Каждый полухарактер $\rho \in \hat{S}_+$ единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{\rho}$ группы $G(\rho)$ в мультипликативную полугруппу $\mathbb{R}_+^*$ неотрицательных действительных чисел.*

Доказательство. Для $s, t \in S(\rho)$ положим $\bar{\rho}(st^{-1}) = \rho(s)/\rho(t)$. Корректность этого определения легко проверяется. Очевидно также, что $\bar{\rho}$ — гомоморфизм. Докажем его непрерывность. Пусть $x_0 \in G(\rho)$. Найдется такое $t_0 \in S(\rho)$, что $s_0 = t_0 x_0 \in S(\rho)$. Для $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U_0 точки s_0 такая, что $|\rho(s) - \rho(s_0)| < \varepsilon\rho(t_0)$ при $s \in U_0$. Рассмотрим $U = t_0^{-1}U_0$. Это окрестность точки x_0 и при $x \in U$ ($x = t_0^{-1}s$, где $s \in U_0$) имеем

$$|\bar{\rho}(x) - \bar{\rho}(x_0)| = |\rho(s) - \rho(s_0)|/\rho(t_0) < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Для любого $\Lambda \subset \hat{S}_+$ множество $\bigcap \{S(\rho) : \rho \in \Lambda\}$ открыто и в случае непустоты содержит пересечение $U \cap S$ для некоторой окрестности U единицы группы G.*

Доказательство. Предположим, что $t \in \bigcap \{S(\rho) : \rho \in \Lambda\}$. Тогда $N = S \setminus \bigcap \{S(\rho) : \rho \in \Lambda\} = \bigcup \{N(\rho) : \rho \in \Lambda\}$ есть идеал, не содержащий t. Если предположить, что e есть точка прикосновения для N, то $S^{-1}t \cap N \neq \varnothing$. Поэтому найдутся такие $s \in S$, $a \in N$, что $t = as \in N$ — противоречие. Следовательно, существует такая окрестность U точки e, что $U \cap N = \varnothing$. Поэтому $U \cap S$ есть непустое открытое подмножество $\bigcap \{S(\rho) : \rho \in \Lambda\}$. Но тогда подгруппа $H = \bigcap \{G(\rho) : \rho \in \Lambda\}$ группы G открыта. Осталось заметить, что $\bigcap \{S(\rho) : \rho \in \Lambda\} = H \cap S$.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что функции $\hat{t}$ непрерывны на $\hat{S}_+$. Если пространство $\hat{S}_+$ компактно, то, очевидно, к семейству $\{\hat{t} : t \in S\} \subset C(\hat{S}_+) = C_0(\hat{S}_+)$ применима теорема Вейерштрасса — Стоуна.

Будем далее предполагать, что $\hat{S}_+$ не компактно. Зафиксируем $t \in S$ и покажем, что $\hat{t} \in C_0(\hat{S}_+)$. Пусть направленность $(\rho_\alpha : \alpha \in A) \subset \hat{S}_+$ стремится к бесконечности в $\hat{S}_+$. Положим $A' = \{\alpha \in A : \rho_\alpha(t) \neq 0\}$ и рассмотрим следующие два случая.

1. Существует такой $\alpha_0 \in A$, что $\alpha \leqslant \alpha_0$ при всех $\alpha \in A'$. Тогда $\lim\limits_{\alpha \in A} \hat{t}(\rho_\alpha) = 0$.

2. Такого α_0 не существует. Это означает, что $(\rho_\alpha : \alpha \in A')$ есть поднаправленность исходной направленности. Покажем, что и в этом случае $\lim\limits_{\alpha \in A} \hat{t}(\rho_\alpha) = 0$. Положим $H = \bigcap \{G(\rho_\alpha) : \alpha \in A'\}$. В силу леммы 2 H есть открытая подгруппа группы G. Как известно [6], H содержит открытую подгруппу вида $\mathbb{R}^n \times F$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, а группа F компактна.

Пусть $\bar{\rho}_\alpha$ есть продолжение ρ_α с $S(\rho_\alpha)$ на $G(\rho_\alpha)$. Тогда при любых $x \in \mathbb{R}^n, k \in F, \alpha \in A'$ имеем (e_1 — единица группы F)

$$\bar{\rho}_\alpha(x, k) = \bar{\rho}_\alpha(x, e_1)\bar{\rho}_\alpha(0, k) = \bar{\rho}_\alpha(x, e_1),$$

поскольку $\bar{\rho}_\alpha(0, k) \equiv 1$ как непрерывный гомоморфизм компактной группы F в $\mathbb{R}_+^* \setminus \{0\}$. Далее, так как $x \mapsto \bar{\rho}_\alpha(x, e_1)$ есть непрерывный гомоморфизм $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}_+^* \setminus \{0\}$, то для некоторого $r \in \mathbb{R}^n$ (зависящего от α) $\bar{\rho}_\alpha(x, e_1) = \exp(r \cdot x)$ (точка обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Если (U_ε) — база окрестностей единицы группы $\mathbb{R}^n \times F$ вида $]-\varepsilon, \varepsilon[^n \times C$, где $\varepsilon > 0$, а C — окрестность единицы в F, то при $\alpha \in A'$ ($dx, d\lambda$ и dm — меры Хаара в $\mathbb{R}^n$, F и G соответственно, причем $dx \otimes d\lambda = dm \,|\, \mathbb{R}^n \times F$)

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{U_\varepsilon} \bar{\rho}_\alpha dm = \frac{1}{(2\varepsilon)^n \lambda(C)} \iint_{]-\varepsilon,\varepsilon[^n \times C} \bar{\rho}_\alpha(x, e_1)\, dx d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\varepsilon)^n} \int_{]-\varepsilon,\varepsilon[^n} \exp(r \cdot x)\, dx = \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{sh} r_i\varepsilon)/(r_i\varepsilon).$$

Так как $(\operatorname{sh} b\varepsilon)/(b\varepsilon)$ монотонно возрастает на множестве $\{\varepsilon > 0\}$, то и функция $\sigma(\varepsilon)$ обладает этим же свойством.

Для функции $f \in L^1(S)$ положим

$$\tilde{f}(\psi) = \int f \bar{\psi} dm, \quad \psi \in \hat{S}.$$

Известно [5], что отображение $f \mapsto \tilde{f}$ совпадает с преобразованием Гельфанда алгебры $L^1(S)$.

Выберем U_{ε_0} так, что $tU_{\varepsilon_0} \subset \bigcap \{S(\rho_\alpha) : \alpha \in A'\}$ (лемма 2), и будем далее считать $U_\varepsilon \subset U_{\varepsilon_0}$. Поскольку функция $f = (m(U_\varepsilon))^{-1} \chi_{tU_\varepsilon} \in L^1(S)$ (χ_B — характеристическая функция множества B), то согласно известному свойству преобразования Гельфанда ($\hat{S}$ в рассматриваемом случае не компактно)

$$\lim_{\alpha \in A'} \tilde{f}(\rho_\alpha) = \lim_{\alpha \in A'} \frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{tU_\varepsilon} \rho_\alpha dm = 0,$$

причем сходимость равномерная по U_ε, так как при $\alpha \in A'$ в силу возрастания $\sigma(\varepsilon)$ имеем

$$\frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{tU_\varepsilon} \rho_\alpha dm = \frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{U_\varepsilon} \bar{\rho}_\alpha(tx)\, dm(x) = \rho_\alpha(t) \frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{U_\varepsilon} \bar{\rho}_\alpha(x)\, dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho_\alpha(t)}{m(U_{\varepsilon_0})} \int_{U_{\varepsilon_0}} \bar{\rho}_\alpha(x)\, dm(x) = \frac{1}{m(U_{\varepsilon_0})} \int_{tU_{\varepsilon_0}} \rho_\alpha dm.$$

Этим обосновано применение теоремы о перестановке предельных переходов:

$$\lim_{\alpha \in A'} \rho_\alpha(t) = \lim_{\alpha \in A'} \lim_{U_\varepsilon \to e} \frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{tU_\varepsilon} \rho_\alpha dm = \lim_{U_\varepsilon \to e} \lim_{\alpha \in A'} \frac{1}{m(U_\varepsilon)} \int_{tU_\varepsilon} \rho_\alpha dm = 0.$$

Отсюда сразу следует, что $\hat{t} \in C_0(\hat{S}_+)$. Доказательство теоремы завершается применением соответствующего варианта теоремы Вейерштрасса—Стоуна.

Следствие 1. *Если S не группа, то пространство $\hat{S}_+$ не дискретно.*

Доказательство. Предположим, что S — не группа, но пространство $\hat{S}_+$ дискретно, и выберем $t \in S \setminus S^{-1}$. Так как $\hat{t} \in C_0(\hat{S}_+)$, то множество $\{\rho \in \hat{S}_+ : \rho(t) \geqslant 1/2\}$ конечно. Это противоречит теореме Глисона, согласно которой каждое число из $]0, 1]$ есть значение в точке $t \in S \setminus S^{-1}$ некоторого полухарактера $\rho \in \hat{S}_+$ [7].

С л е д с т в и е 2. *Пространство $\hat{S}_+$ компактно тогда и только тогда, когда $e \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e \in S$. Тогда $\hat{e} = 1 \in C_0(\hat{S}_+)$ по теореме 1. Следовательно, $\hat{S}_+$ компактно.

С другой стороны, пусть $\hat{S}_+$ компактно, но $e \notin S$. Согласно упоминавшейся теореме Глисона [7] при любом $t \in S$ имеем $]0, 1] \subset \{\rho(t) : \rho \in \hat{S}_+\}$, а поскольку $\hat{t}$ непрерывна на компакте $\hat{S}_+$, то найдется $\rho \in \hat{S}_+$ такой, что $\rho(t) = 0$. Выберем направленность (t_α) точек из S, сходящуюся к e, и пусть (ρ_α) — такая направленность из $\hat{S}_+$, что $\rho_\alpha(t_\alpha) = 0$. Можно считать, что $\lim\limits_\alpha \rho_\alpha = \rho \in \hat{S}_+$. Если $t' \in S(\rho)$, то $t' \in \bigcap\{S(\rho_\alpha) : \alpha \geqslant \alpha_0\}$ при некотором α_0. По лемме 2 тогда найдется такая окрестность единицы U, что $U \cap S \subset \bigcap\{S(\rho_\alpha) : \alpha \geqslant \alpha_0\}$. Так как в конечном счете $t_\alpha \in U \cap S$, то при достаточно больших α будем иметь $\rho_\alpha(t_\alpha) > 0$, что противоречит выбору ρ_α. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е. Если S — группа, то полугруппа $\hat{S}_+$ тривиальна. Напротив, если S не является группой, то $\hat{S}_+$ богата в различных смыслах. Исторически первый результат в этом направлении — теорема Глисона [7] (см. также [8], § 4.5). Если S — коническая полугруппа и $e \notin S$, то теорему 1 (с учетом следствия 2) также можно трактовать как утверждение такого рода. А именно, из нее следует, что при любых $\varepsilon > 0$ и $t \in S$ множество $\{\rho \in \hat{S}_+ : \rho(t) < \varepsilon\}$ содержит дополнение к компакту в локально компактном не компактном пространстве $\hat{S}_+$.

2. П р е о б р а з о в а н и е Л а п л а с а о г р а н и ч е н н ы х м е р н а $\hat{S}_+$. Относительно мер далее будем пользоваться терминологией и обозначениями из [1]. Напомним, что $S_1 = S \cup \{e\}$.

О п р е д е л е н и е. *Преобразованием Лапласа ограниченной комплексной меры ν на $\hat{S}_+$ назовем функцию $\tilde{\nu}$ на S_1, определяемую равенством*

$$\tilde{\nu}(x) = \int\limits_{\hat{S}_+} \hat{x} d\nu.$$

Это определение несколько отличается от общего определения, данного в [1] (гл. IX, § 5, п. 7); в обозначениях из [1] $\tilde{\nu}(x) = (\mathscr{L}\nu)(\hat{x})$, т. е. $\tilde{\nu} = (\mathscr{L}\nu) \circ \eta$, где $\eta : x \mapsto \hat{x}$ — естественное отображение S_1 в $(\hat{S}_+)\hat{}_+$.

Т е о р е м а 2. а). *Функция $\tilde{\nu}$ ограничена и непрерывна на S_1 для любой ограниченной комплексной меры ν на $\hat{S}_+$.*

б). *Отображение $\mu \mapsto \tilde{\mu}$ непрерывно, если наделить пространство $\mathscr{M}^b_+(\hat{S}_+)$ узкой топологией, а $C^b(S_1)$ — топологией равномерной сходимости на компактах.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\rho \in \hat{S}_+$ положим $\rho'(t) = \rho(t)$ при $t \in S$ и $\rho'(e) = 1$ и докажем непрерывность ρ' на S_1. Действительно, $S_1 = N(\rho) \cup \cup (S(\rho) \cup \{e\})$, причем по лемме 2 e есть точка прикосновения для $S(\rho)$, но не для $N(\rho)$. Следовательно, $N(\rho)$ есть открыто-замкнутое подмножество S_1. Осталось заметить, что $\rho' \restriction_{N(\rho)} = 0$ и $\rho' \restriction_{(S(\rho) \cup \{e\})} = \bar{\rho} \restriction_{(S(\rho) \cup \{e\})}$ непрерывно по лемме 1. Следовательно, $\rho' \in (S_1)\hat{}_+$. Очевидно, отображение $\rho \mapsto \mapsto \rho'$ есть изоморфизм полугрупп $\hat{S}_+$ и $(S_1)\hat{}_+$. Покажем, что это гомеоморфизм. Пусть направленность (ρ_α) точек из $\hat{S}_+$ сходится к $\rho \in \hat{S}_+$, и C есть компакт в S_1. Зафиксируем $a \in S(\rho)$ и для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $0 < \delta < \rho(a)$, причем $2\delta < \varepsilon(\rho(a) - \delta)$. Поскольку $\rho_\alpha \to \rho$ равномерно на компакте $aC \subset S$, то при достаточно больших α и при всех $z \in C$ $|\rho_\alpha(az) - \rho(az)| < \delta$ и $|\rho_\alpha(a) - \rho(a)| < \delta$. Поэтому

$$\delta > |\rho_\alpha(a)\rho'_\alpha(z) - \rho(a)\rho'(z)| = |(\rho_\alpha(a) - \rho(a))\rho'(z) + \rho_\alpha(a)(\rho'_\alpha(z) - \rho'(z))| \geqslant \rho_\alpha(a)|\rho'_\alpha(z) - \rho'(z)| - \rho'(z)|\rho_\alpha(a) - \rho(a)| \geqslant (\rho(a) - \delta)|\rho'_\alpha(z) - \rho'(z)| - \delta.$$

Следовательно, при тех же α и при всех $z \in C$

$$|\rho'_\alpha(z) - \rho'(z)| < 2\delta/(\rho(a) - \delta) < \varepsilon,$$

т. е. $\rho'_\alpha \to \rho'$ равномерно на C, а потому $\rho \mapsto \rho'$ есть гомеоморфизм $\hat{S}_+$ на $(S_1)\hat{}_+$.

Поскольку отображение $(x, \rho) \mapsto \rho(x)$ из $S_1 \times (S_1)\hat{}_+$ в $\mathbb{R}_+$ непрерывно и ограничено (см., например, [9], гл. X, § 3, п. 4, следствие 1 теоремы 3), то оба утверждения теоремы сразу следуют из [1] (гл. IX, § 5, п. 6, следствие предложения 13).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает теорема единственности для преобразования Лапласа.

Теорема 3. *Если для ограниченной комплексной меры ν на $\hat{S}_+$ выполняется равенство $\tilde{\nu} = 0$, то $\nu = 0$.*

Фактически повторяя доказательство утверждений в) и с) теоремы 3 из [1] (гл. IX, § 5, п. 7 (подробности см. в [3, с. 10—11]), получаем следующую теорему непрерывности.

Теорема 4. а). *Пусть для некоторой направленности (μ_α) мер из $\mathcal{M}^b_+(\hat{S}_+)$ существует предел $\lim\limits_\alpha \tilde{\mu}_\alpha(x) = \Phi(x)$ для любого $x \in S_1$. Тогда направленность (μ_α) широко сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}^b_+(\hat{S}_+)$, и для любого $t \in S$ имеем $\Phi(t) = \tilde{\mu}(t)$.*

б). *Пусть выполнены условия из* а) *и, кроме того, функция Φ на S_1 непрерывна. Тогда (μ_α) сходится к μ узко.*

Из теорем 2, 3 и 4 вытекает такое следствие.

Следствие 1 ([1], гл. IX, § 5, п. 7, следствие теоремы 3). *Пусть $L = \{\tilde{\mu} : \mu \in \mathcal{M}^b_+(\hat{S}_+)\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а). *Множество L замкнуто в пространстве $C^b(S_1, \mathbb{R})$, наделенном топологией поточечной сходимости.*

б). *Отображение $\mu \mapsto \tilde{\mu}$ есть гомеоморфизм $\mathcal{M}^b_+(\hat{S}_+)$ на L, если наделить $\mathcal{M}^b_+(\hat{S}_+)$ узкой топологией, а L—топологией поточечной сходимости.*

в). *Топология поточечной сходимости и топология равномерной сходимости на компактах совпадают в L.*

Следствие 2. *Топология поточечной сходимости и топология равномерной сходимости на компактах совпадают в $\hat{S}_+ \cup \{0\}$ (0 обозначает тождественно-нулевую функцию на S).*

В самом деле, $\hat{S}_+ \cup \{0\} \subset L$, так как $\tilde{\varepsilon}_\rho = \rho$, где ε_ρ — мера единичной массы, сосредоточенная в точке $\rho \in \hat{S}_+$.

Следствие 3. *Если $\hat{S}_+$ не компактно, то 0 есть бесконечно удаленная точка пространства $\hat{S}_+$.*

Действительно, множество $\hat{S}_+ \cup \{0\}$ замкнуто в $[0, 1]^S$ в топологии поточечной сходимости, а потому компактно. Осталось воспользоваться предыдущим следствием.

В работе [10] вполне монотонная функция φ на S_1 характеризуется как преобразование Лапласа ограниченной положительной меры на полугруппе S_1^* неотрицательных полухарактеров полугруппы S, дополненной нулем и наделенной топологией поточечной сходимости. Отсюда в [10] сделан вывод о непрерывности φ на S, если S удовлетворяет первой аксиоме счетности (локальная компактность и коммутативность G в [10] не предполагаются). При наших предположениях ввиду следствия 2 теоремы 4 получаем, что $\varphi(t) = \tilde{\mu}(t)$ при $t \in S$ для некоторой меры $\mu \in M_+^b(\hat{S}_+)$. Теорема 2 тогда показывает, что предположение о счетности можно снять.

Следствие 4. *Каждая вполне монотонная функция на S_1 непрерывна на S.*

Следствие 2 теоремы 4 позволяет также получить следующий результат.

Теорема 5. *Всякое равномерно ограниченное представление T полугруппы S положительными операторами в гильбертовом пространстве непрерывно в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Известно [10] (теорема 3), что существует такая спектральная мера E на пространстве S^* всех непрерывных гомоморфизмов S в $\mathbb{R}_+^*$, наделенном топологией поточечной сходимости, что

$$T_x = \int_{S^*} \chi(x)\, dE(\chi), \quad x \in S,$$

причем интеграл понимается в равномерной операторной топологии. Из равномерной ограниченности представления T следует $\|T_x\| \leqslant 1$, $x \in S$. Тогда простой анализ доказательства теоремы 3 из [10] показывает, что E сосредоточена на $\hat{S}_+ \cup \{0\}$. Следовательно, при любых $x, y \in S$ имеем

$$\| T_x - T_y \| \leqslant \max\{|\hat{x}(\rho) - \hat{y}(\rho)| : \rho \in \hat{S}_+ \cup \{0\}\}.$$

Осталось заметить, что отображение $x \mapsto \hat{x}$ из S в $C(\hat{S}_+ \cup \{0\})$ непрерывно в силу непрерывности отображения $(x, \rho) \mapsto \rho(x)$ из $S \times (\hat{S}_+ \cup \{0\})$ в $\mathbb{R}_+$ (см. [9], гл. X, § 3, п. 4, теорема 3 и ее следствие 1). Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Функции $\hat{t}$, $t \in S$, линейно независимы.*

Доказательство (ср. [11], лемма (29.41)). Пусть функции $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_n$ различны, и при всех $\rho \in \hat{S}_+$ и некоторых $c_i \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \rho(t_i) = 0. \tag{1}$$

Докажем, что тогда $c_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, индукцией по n. Опишем индуктивный переход. Предположим, что утверждение уже доказано для набора из $n-1$ функций и выполняется (1) с $n \geqslant 2$, причем $c_j \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $c_i \neq 0$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ по индуктивному предположению. Выберем $\rho_0 \in \hat{S}_+$ таким образом, что $\rho_0(t_1) \neq \rho_0(t_n)$. Заменяя в (1) ρ на $\rho\rho_0$ ($\hat{S}_+$ — полугруппа), имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \rho_0(t_i)\, \rho(t_i) + c_n \rho_0(t_n)\, \rho(t_n) = 0. \tag{2}$$

Умножая (1) на $\rho_0(t_n)$ и вычитая из (2), получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i (\rho_0(t_i) - \rho_0(t_n))\, \rho(t_i) = 0.$$

Поскольку все $c_i \neq 0$, то по индуктивному предположению имеем $\rho_0(t_i) = \rho_0(t_n)$ при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, что противоречит выбору ρ_0. Лемма доказана.

Теперь стандартным образом устанавливается упомянутое во введении описание преобразования Лапласа комплексной меры (ср. [2]).

Теорема 6. *Для функции $\varphi : S \to \mathbb{C}$ следующие утверждения равносильны:*

1) $\varphi(t) = \tilde{\nu}(t)$, $t \in S$, *для некоторой ограниченной комплексной меры* ν *на* $\hat{S}_+$, $\|\nu\| \leqslant A$;

2) *для любого полинома* $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{t}_i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $t_i \in S$, *выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(t_i) \right| \leqslant A \sup \{|f(\rho)| : \rho \in \hat{S}_+\}.$$

Доказательство. Утверждение 1) $\Rightarrow$ 2) легко проверяется. Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть V есть пространство всех полиномов на $\hat{S}_+$ вида $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{t}_i$. По теореме 1 $V \subset C_0(\hat{S}_+)$. Если положим $\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(t_i)$ (это определение корректно в силу леммы 3), то получим линейный функционал на V, удовлетворяющий условию

$$|\Lambda(f)| \leqslant A \|f\|_{C_0(\hat{S}_+)}.$$

Значит, Λ продолжается до непрерывного линейного функционала на $C_0(\hat{S}_+)$ с нормой, не превышающей A. Поэтому найдется такая ограниченная комплексная мера ν на $\hat{S}_+$, $\|\nu\| \leqslant A$, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(t_i) = \int_{\hat{S}_+} f d\nu.$$

Полагая в этом равенстве $f = \hat{t}$, $t \in S$, получим $\varphi(t) = \hat{\nu}(t)$, что и доказывает теорему.

Теорема 6 содержит условие разрешимости многомерной степенной проблемы моментов Хаусдорфа (при $S = \mathbb{Z}_+^n$) и некоторых ее бесконечномерных и континуальных аналогов.

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование.— М. : Наука, 1977.— 600 с.
2. *Крейн М. Г.* Об одном классе функций, определенном на топологической группе // Докл. АН СССР.— 1940.— **29**.— С. 275—280.
3. *Миротин А. Р.* Поточечная сходимость положительных полухарактеров и преобразование Лапласа.— Гомель, 1988.— 19 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 8831-В88.
4. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
5. *Arens R., Singer I. M.* Generalized analitic functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1956.— **81**, N 2.— P. 379—393.
6. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М. : Наука, 1973.— 520 с.
7. *Rieffel M. A.* A caracterization of commutative group algebras and measure algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— **116**, N 1.— P. 32—65.
8. *Teylor J. L.* Measure algebras // Res. Conf. Ser. Math.— Providence, 1972.— N 16.— 108 p.
9. *Бурбаки Н.* Общая топология.— М. : Наука, 1975.— 408 с.
10. *Devinatz A., Nussbaum A. E.* Real caracters of certain semigroups with applications // Duke Math. J.— 1961.— 28, N 2.— P. 221—237.
11. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.— М. : Мир, 1975.— Т. 2.— 900 с.

Получено 15.10.90