УДК 517.5

**А. С. Романюк**, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

# О приближении классов периодических функций многих переменных

Изучаются классы периодических функций многих переменных с ограниченной обобщенной производной в метрике пространства $L_p$. Получены порядковые оценки уклонений сумм Фурье, построенных в зависимости от поведения функций, определяющих оператор обобщенного дифференцирования. Найдены оценки колмогоровских поперечников, которые реализуются построенными суммами Фурье.

Вивчаються класи періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною в метриці простору $L_p$. Одержані порядкові оцінки відхилень сум Фур'є, побудованих в залежності від поведінки функцій, які визначають оператор узагальненого диференціювання. Знайдені оцінки колмогорівських поперечників, які реалізуються побудованими сумами Фур'є.

В настоящей работе изучаются классы периодических функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$, которые для функций одной переменной введены А. И. Степанцом [1]. К настоящему времени в вопросах приближения $(\psi, \beta)$-дифференцируемых функций одной переменной получено достаточно много результатов, значительная часть которых изложена в [2]. Там же имеются подробные ссылки. В случае приближения функций классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в многомерном случае в первую очередь возникает вопрос о выборе приближающих агрегатов. Так, для приближения классов $W^r_{\beta,p}$ в пространстве $L_p$ (при $p = 2, \infty$ впервые это отметил К. И. Бабенко [3, 4]) оптимальными оказались полиномы, содержащие гармоники с «номерами» из гиперболического креста. Впоследствии аналогичная ситуация возникла при изучении других классов, близких в определенном смысле к $W^r_{\beta,p}$ [5]. В результате выяснилось, что полиномы с «номерами» гармоник из гиперболического креста во многих случаях играют такую же роль, как и обыкновенные тригонометрические полиномы в одномерном случае.

Цель настоящей работы — получить на классах $L^{\psi}_{\beta,p}$ порядковые оценки уклонений сумм Фурье, которые строятся в зависимости от поведения функций $\{\psi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$ и обосновать естественность такого выбора приближающих агрегатов.

1. Пусть $R^m$ — евклидово пространство с элементами $x=(x_1, \dots, x_m)$ и $(x, y)=x_1y_1+\dots+x_my_m$, $L_p(\pi_m)$ —пространство периодических функций, определенных на кубе $\pi_m=\prod_{j=1}^{m}[-\pi;\pi]$ с конечной нормой

$$\|f\|_p=\left((2\pi)^{-m}\int_{\pi_m}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},\quad p\in[1,\infty).$$

В дальнейшем предполагаем, что $p\in(1,\infty)$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx_j=0 \quad \forall j=\overline{1,m}$. Множество таких функций обозначим $L_p^0(\pi_m)$.

Пусть $f\in L_p^0(\pi_m)$ и

$$S[f]=\sum_k c_k(f)\,e^{i(k,x)},\quad k=(k_1,\dots,k_m),$$

$$k_j\in Z,\quad j=\overline{1,m},\quad c_k(f)=(2\pi)^{-m}\int_{\pi_m} f(t)\,e^{-i(k,t)}dt$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\{\psi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$ — множество функций натурального аргумента и $\beta_j\in R$. Рассмотрим ряд

$$\sum_k\prod_{j=1}^{m}\psi_j^{-1}(|k_j|)\,c_k(f)\,e^{i(k,x)}e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn}k_j}. \tag{1}$$

Если ряд (1) является рядом Фурье некоторой функции, то эту функцию. следуя А. И. Степанцу, называем $(\psi,\beta)$-производной $f(x)$ и обозначаем $f_\beta^\psi(x)$. Множество функций $f(x)$, удовлетворяющих такому условию, обозначим $L_\beta^\psi$. Далее, если $f(x)\in L_\beta^\psi$ и при этом $f_\beta^\psi\in\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из $L(\pi_m)$, то будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$. В дальнейшем под $\mathfrak{N}$ будем понимать множество $U_p=\{\varphi:\varphi\in L_p,\ \|\varphi\|_p\leqslant 1\}$ и классы $L_\beta^\psi U_p$ будем обозначать $L_{\beta,p}^\psi$. Определяющие класс $L_{\beta,p}^\psi$ функции $\psi_j(\cdot)$, $j=\overline{1,m}$, подчиним следующим условиям:

а) $\psi_j(\cdot)$ — положительные и $\lim\limits_{|k_j|\to\infty}\psi_j(|k_j|)=0$;

б) $\forall j=\overline{1,m}\ \exists M_j>0$: $\sup\psi_j(|k_j|)/\psi_j(2^{s_j})\leqslant M_j$, $s_j=1,2,\dots$, $2^{s_j-1}\leqslant|k_j|\leqslant 2^{s_j}$. Множество таких функций будем обозначать через $\mathcal{D}$.

Пусть $k=(k_1,\dots,k_m)$, $k_j$ — целые числа, $s=(s_1,\dots,s_m)$, $s_j$ — натуральные числа, $\rho(s)=\{k:2^{s_j-1}\leqslant|k_j|<2^{s_j}\}$ Тогда при каждом $N$ обозначим через $B_N^\psi$ множество векторов $s$, для которых $\prod_{j=1}^{m}\psi_j^{-1}(2^{s_j})<N$ и положим $Q_N^\psi=\bigcup_{s\in B_N^\psi}\rho(s)$. Приближение классов $L_{\beta,p}^\psi$ будем производить с помощью сумм Фурье вида

$$S_N^\psi(f,x)=\sum_{k\in Q_N^\psi}c_k(f)\,e^{i(k,x)},$$

которые, если положить

$$\delta_s(f,x)=\sum_{k\in\rho(s)}c_k(f)\,e^{i(k,x)},$$

можно записать в виде

$$S_N^\psi(f,x)=\sum_{s\in B_N^\psi}\delta_s(f,x).$$

Заметим, что если $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, то $B_N^\psi = \{s : 2^{(s,r)} < N\}$ и тогда множества $Q_N^\psi$ являются «ступенчатыми гиперболическими крестами», которые уже рассматривались (см., например, в [5]).

В настоящей работе изучаются величины

$$\mathscr{E}_N (L_{\beta,p}^\psi)_p = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \| \rho_N (f, x) \|_p,$$

где $\rho_N(f, x) = f(x) - S_N^\psi(f, x)$, которые в рассматриваемых случаях совпадают по порядку с величинами

$$E_N (L_{\beta,p}^\psi)_p = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \inf_{t \in T_N} \| f(\cdot) - t(\cdot) \|_p,$$

где $T_N$ — множество полиномов, содержащих гармоники с «номерами» из множества $Q_N^\psi$.

В дальнейшем существенно будут использоваться следующие известные утверждения.

Теорема А [6, с. 65] *Пусть $p \in [1, \infty)$. Тогда существуют положительные постоянные $C_1$ и $C_2$ такие, что для любой $f \in L_p^0(\pi_m)$ справедлива оценка*

$$C_1 \| f \|_p \leqslant \Big\| \Big( \sum_s | \delta_s (f, x) |^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leqslant C_2 \| f \|_p.$$

Теорема Б [5, с. 9] *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$,*

$$f(x) \sim \sum_k c_k e^{i(k,x)} \in L_p^0(\pi_m).$$

*Тогда*

$$A_\alpha f \sim \sum_k c_k \prod_{j=1}^m | k_j |^{-\alpha} e^{i(k,x)} \in L_q^0(\pi_m)$$

*и* $\| A_\alpha f \|_q \leqslant C \| f \|_p$.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству полученных результатов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\forall j = \overline{1, m}$ $\psi_j(\cdot) \in \mathscr{D}$, $\beta_j \in R$. Тогда при $p \in (1, \infty)$*

$$\mathscr{E}_N (L_{\beta,p}^\psi)_p \asymp E_N (L_{\beta,p}^\psi)_p \asymp N^{-1}.$$

Доказательство. Вначале заметим следующее. В силу теоремы А

$$\| S_N^\psi (f, x) \|_p = \Big\| \sum_{s \in B_N^\psi} \delta_s (f, x) \Big\|_p \asymp \Big\| \Big( \sum_{s \in B_N^\psi} | \delta_s (f, x) |^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| \Big( \sum_s | \delta_s (f, x) |^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \ll \| f \|_p.$$

Следовательно, оператор $S_N^\psi$, сопоставляющий функции $f(x) \in L_p^0(\pi_m)$ ее частную сумму Фурье $S_N^\psi(f, x)$ ограничен по норме $L_p$. Отсюда следует, что в силу линейности оператора $S_N^\psi$

$$\mathscr{E}_N (L_{\beta,p}^\psi)_p \asymp E_N (L_{\beta,p}^\psi)_p.$$

Пусть $f \in L_{\beta,p}^\psi$, т. е. $S[f_\beta^\psi] = \sum_k c_k (f_\beta^\psi) e^{i(k,x)} \in L_p$, где $c_k(f_\beta^\psi)$ — коэффициенты Фурье $(\psi, \beta)$-производной $f(x)$ и $\| f_\beta^\psi \|_p \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию $g(x)$, для которой

$$S[g] = \sum_{s \overline{\in} B_N^\psi} \prod_{j=1}^m \psi_j(2^{s_j}) \sum_{k\in\rho(s)} c_k(f_\beta^\psi) e^{i(k,x)}$$

и покажем, что

$$\|\rho_N(f, x)\|_p \ll \|g\|_p. \tag{2}$$

С этой целью рассмотрим $m$-кратную последовательность

$$\lambda_k = \begin{cases} \prod_{j=1}^m \psi_j(|k_j|)/\psi_j(2^{s_j}) e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j}, & s \overline{\in} B_N^\psi, \quad k\in\rho(s); \\ 0, & s\in B_N^\psi, \quad k\in\rho(s). \end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что $\forall j = \overline{1, m}$ числа

$$\lambda_{k_j} = \frac{\psi_j(|k_j|)}{\psi_j(2^{s_j})} e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j}, \quad s_j \in N, \quad 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}$$

являются множителями Марцинкевича, т. е. для некоторого числа $C$ выполняются соотношения

$$|\lambda_{k_j}| \leqslant C, \qquad \sum_{2^{s_j-1}\leqslant |k_j| < 2^{s_j}} |\lambda_{k_j+1} - \lambda_{k_j}| \leqslant C, \quad s_j = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, принимая во внимание (3), заключаем, что $m$-кратная последовательность $\lambda_k$ удовлетворяет условиям теоремы Марцинкевича для функций многих переменных [6, с. 67]. Следовательно, в силу теоремы Марцинкевича

$$S[\Lambda g] = \sum_{s \overline{\in} B_N^\psi} \lambda_k \prod_{j=1}^m \psi_j(2^{s_j}) \sum_{k\in\rho(s)} c_k(f_\beta^\psi) e^{i(k,x)} \in L_p$$

и

$$\|\Lambda g\|_p \ll \|g\|_p,$$

а так как $S[\Lambda g] = S[\rho_N]$, то отсюда следует требуемая оценка (2).

В силу (2) и теоремы $A$ имеем

$$\|\rho_N(f, x)\|_p \ll \|g\|_p = \Big\| \sum_{s \overline{\in} B_N^\psi} \prod_{j=1}^m \psi_j(2^{s_j}) \delta_s(f_\beta^\psi, x) \Big\|_p \ll$$

$$\ll \Big\| \Big( \sum_{s \overline{\in} B_N^\psi} \prod_{j=1}^m |\psi_j(2^{s_j}) \delta_s(f_\beta^\psi, x)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \ll N^{-1} \Big\| \Big( \sum_{s \overline{\in} B_N^\psi} |\delta_s(f_\beta^\psi, x)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \ll$$

$$\ll N^{-1} \|f_\beta^\psi\|_p \leqslant N^{-1}.$$

Таким образом, требуемая оценка сверху величины $\|\rho_N(f, x)\|_p$ получена. Найдем теперь оценку снизу.

С этой целью обозначим через $s^* = (s_1^*, \ldots, s_m^*)$ и $s^{**} = (s_1^{**}, \ldots, s_m^{**})$ два вектора с натуральными координатами, обладающие следующими свойствами:

а) $s_1^{**} = s_1^* + 1, \quad s_i^{**} = s_i^*, \quad i = 2, \ldots m;$

б) $s^* \in B_N^\psi$, а $s^{**} \overline{\in} B_N^\psi$. (4)

Тогда, поскольку $\forall j = \overline{1, m}$ $\psi_j(\cdot) \in \mathscr{D}$, то $\psi_1(2^{s_1^*})/\psi_1(2^{s_1^{**}}) \leqslant M_1$, и, следовательно,

$$\prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(2^{\overset{**}{s_j}}) \leqslant M_1 \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(2^{\overset{*}{s_j}}) \leqslant M_1 N. \tag{5}$$

Далее, положим

$$f_N(x) = C_p N^{-1} \prod_{j=1}^{m} \cos\left(2^{\overset{**}{s_j}} x_j - \frac{\beta_j \pi}{2}\right), \quad C_p = M_1^{-1} \left\| \prod_{j=1}^{m} \cos t_j \right\|_p^{-1}.$$

Тогда

$$(f_N(x))_\beta^\psi = C_p N^{-1} \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(2^{\overset{**}{s_j}}) \cos 2^{\overset{**}{s_j}} x_j$$

и в силу (4), (5) получим

$$\| (f_N(x))_\beta^\psi \|_p \ll 1.$$

Кроме того, из условий (4) следует $S_N^\psi(f_N, x) = 0$, откуда получаем

$$\| \rho_N(f_N, x) \|_p = \| f_N \|_p \asymp N^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_N(L_{\beta,p}^\psi)_p \geqslant \mathscr{E}_N(f_N)_p \gg N^{-1}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $\psi_j(\cdot) \in \mathscr{D}$, $\beta_j \in R$. *Тогда*

$$\mathscr{E}_N(L_{\beta,p}^\psi)_q \asymp E_N(L_{\beta,p}^\psi)_q \asymp N^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_{\beta,p}^\psi$, т. е. $f_\beta^\psi \in L_p$ и $\| f_\beta^\psi \|_p \leqslant 1$. Вследствие неравенства Гельдера

$$\| f_\beta^\psi \|_q = \left((2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} | f_\beta^\psi |^q dx\right)^{1/q} \leqslant \left((2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} dx\right)^{1/q-1/p} \times$$

$$\times \left((2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} | f_\beta^\psi |^p dx\right)^{1/p} \leqslant \| f_\beta^\psi \|_p,$$

и, значит, $L_{\beta,p}^\psi \subset L_{\beta,q}^\psi$, а

$$E_N(L_{\beta,p}^\psi)_q \leqslant E_N(L_{\beta,q}^\psi)_q \ll N^{-1}.$$

Оценка снизу получается с помощью таких же рассуждений, как и в теореме 1.

Теперь рассмотрим случай $1 < p < q < \infty$. Обозначим через $\mathscr{D}_{p,q}$ множество функций $\{\psi\}_{j=1}^m$, удовлетворяющих условиям:

а) $\psi_j(\cdot)$ — положительные и $\lim\limits_{|k_j| \to \infty} \psi_j(|k_j|) |k_j|^{1/p-1/q} = 0$;

б) $\forall j = \overline{1, m}$ $\exists M_j > 0$ $\sup\limits_{s_j} \psi_j(|k_j|)/\psi_j(2^{s_j}) \leqslant M_j$, $s_j = 1, 2, \ldots, 2^{s_j-1} \leqslant$ $\leqslant |k_j| \leqslant 2^{s_j}$. Кроме того, при каждом $N$ положим

$$B_{N,p,q}^\psi = \left\{ s : \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) 2^{-s_j(1/p-1/q)} < N \right\},$$

$$Q_{N,p,q}^\psi = \left\{ k : k \in \bigcup_{s \in B_{N,p,q}^\psi} \rho(s) \right\},$$

$$S^{\psi}_{N,p,q}(f, x) = \sum_{k \in Q^{\psi}_{N,p,q}} c_k(f)\, e^{i(k,x)} = \sum_{s \in B^{\psi}_{N,p,q}} \delta_s(f, x),$$

$$\mathcal{E}_{N,p,q}(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \| f(x) - S^{\psi}_{N,p,q}(f, x)\|_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \| \rho_N(f, x)\|_q,$$

$$E_{N,p,q}(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t \in T_{N,p,q}} \| f(x) - t(x)\|_q,$$

где $T_{N,p,q}$ — множество полиномов с «номерами» гармоник из множества $Q^{\psi}_{N,p,q}$.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $\psi_j(\cdot) \in \mathcal{D}_{p,q}$, $\beta_j \in R$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_{N,p,q}(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp E_{N,p,q}(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp N^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, т. е. $f^{\psi}_{\beta} \in L_p$, $\| f^{\psi}_{\beta}\|_p \leqslant 1$. Рассмотрим оператор $A_{\alpha}$ ($\alpha = 1/p - 1/q$), который определен в соответствии с теоремой Б. Применив этот оператор к функции $f^{\psi}_{\beta}(x)$, в силу теоремы Б будем иметь

$$S[A_{\alpha} f^{\psi}_{\beta}] = \sum_{k} c_k(f) \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(|k_j|)\, |k_j|^{-\alpha} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j} e^{i(k,x)} \in L_q. \qquad (6)$$

Или, полагая $\widetilde{\psi}_j(|k_j|) = \psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{\alpha}$, согласно определению $(\psi, \beta)$-производной, соотношение (6) можно записать

$$S[A_{\alpha} f^{\psi}_{\beta}] = S[f^{\widetilde{\psi}}_{\beta}] \in L_q$$

и, таким образом, согласно теореме Б

$$\| f^{\widetilde{\psi}}_{\beta}\|_q = \| A_{\alpha} f^{\psi}_{\beta}\|_q \ll \| f^{\psi}_{\beta}\|_p.$$

Следовательно, $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L^{\widetilde{\psi}}_{\beta,q}$, и поэтому оценка сверху величины $\mathcal{E}_{N,p,q}(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ сводится к оценке величины $\mathcal{E}_N(L^{\widetilde{\psi}}_{\beta,q})_q$. Отсюда, проводя рассуждения, аналогичные используемым в теореме 1, получаем соотношение

$$\| \rho_N(f, x)\|_q \ll \| g_{\alpha}(x)\|_q,$$

где $g_{\alpha}(x)$ — функция, для которой

$$S[g_{\alpha}] = \sum_{s \in B^{\psi}_{N,p,q}} \prod_{j=1}^{m} \psi_j(2^{s_j})\, 2^{s_j \alpha} \delta_s(f^{\psi}_{\beta}, x), \quad \alpha = 1/p - 1/q.$$

Следовательно, в силу теоремы $A$

$$\| \rho_N(f, x)\|_q \ll \Big\| \sum_{s \overline{\in} B^{\psi}_{N,p,q}} \psi_j(2^{s_j})\, 2^{s_j \alpha} \delta_s(f^{\widetilde{\psi}}_{\beta}, x) \Big\|_q \ll$$

$$\ll \Big\| \Big( \sum_{s \overline{\in} B^{\psi}_{N,p,q}} \prod_{j=1}^{m} \psi_j^2(2^{s_j})\, 2^{2 s_j \alpha} \,|\delta_s(f^{\widetilde{\psi}}_{\beta}, x)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_q \ll$$

$$\ll N^{-1} \Big\| \Big( \sum_{s \overline{\in} B^{\psi}_{N,p,q}} |\delta_s(f^{\widetilde{\psi}}_{\beta}, x)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_q \ll N^{-1} \| f^{\widetilde{\psi}}_{\beta}\|_q \ll N^{-1}.$$

Для получения оценки снизу, как и при доказательстве теоремы 1, обозначим через $\bar{s}=(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m)$ и $\tilde{s}=(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$ два вектора, обладающие свойствами: *а*) $\tilde{s}_1=\bar{s}_1+1$, $\tilde{s}_i=\bar{s}_i$, $i=2, \ldots, m$; б) $\bar{s}\in B^{\psi}_{N,p,q}$, а $\tilde{s}\notin B^{\psi}_{N,p,q}$. Тогда, поскольку $\psi_1(\cdot)\in\mathcal{D}_{p,q}$, то

$$\psi_1(2^{\tilde{s}_1})\,2^{\tilde{s}_1(1/p-1/q)}\gg\psi_1(2^{\bar{s}_1})\,2^{\bar{s}_1(1/p-1/q)}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g_{\tilde{s}}(x)=\sum_{\substack{k\in\rho(\tilde{s})\\ k_j>0}}\prod_{j=1}^{m}\psi_j(2^{\tilde{s}_j})\cos\left(k_jx_j-\frac{\beta_j\pi}{2}\right).$$

Ясно, что $S^{\psi}_{N,p,q}(g_{\tilde{s}}, x)=0$. Кроме того, для $(\psi, \beta)$-производной функции $g_{\tilde{s}}(x)$ будем иметь

$$(g_{\tilde{s}}(x))^{\psi}_{\beta}=\sum_{\substack{k\in\rho(\tilde{s})\\ k_j>0}}\prod_{j=1}^{m}\frac{\psi_j(2^{\tilde{s}_j})}{\psi_j(k_j)}\cos k_jx_j=A_{\tilde{s}}\left(\sum_{\substack{k\in\rho(\tilde{s})\\ k_j>0}}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=}A_{\tilde{s}}d_{\tilde{s}}(x), \tag{8}$$

где $A_{\tilde{s}}$ — мультипликатор, порожденный последовательностью

$$\mu_{\tilde{s}}(k)=\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\psi_j(2^{\tilde{s}_j})}{\psi_j(k_j)}, & k_j>0,\quad k\in\rho(\tilde{s});\\[2ex] 0, & k\notin\rho(\tilde{s}).\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что числа $\mu_{\tilde{s}}(k)$ удовлетворяют условиям теоремы Марцинкевича [6, с. 67] и поэтому

$$\|A_{\tilde{s}}d_{\tilde{s}}(x)\|_p\ll\|A_{\tilde{s}}\|_p\,\|d_{\tilde{s}}(x)\|_p\ll\|d_{\tilde{s}}(x)\|_p. \tag{9}$$

Известно (см., например, [2, с. 214]), что

$$\|d_{\tilde{s}}(x)\|_p\asymp 2^{\|\tilde{s}\|_1(1-1/p)}, \tag{10}$$

где $\|\tilde{s}\|_1=\tilde{s}_1+\ldots+\tilde{s}_m$.

Поэтому, сопоставляя (9) и (10), получаем

$$\|(g_{\tilde{s}}(x))^{\psi}_{\beta}\|_p\ll 2^{\|\tilde{s}\|_1(1-1/p)},$$

откуда следует, что функция

$$g(x)=C2^{-\|\tilde{s}\|_1(1-1/p)}g_{\tilde{s}}(x)$$

с некоторой постоянной $C$ принадлежит классу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Далее, приняв во внимание (8) и воспользовавшись соотношениями (7) и (10), будем иметь

$$\mathcal{E}_{N,p,q}(L^{\psi}_{\beta,p})_q\geqslant\mathcal{E}_{N,p,q}(g)_q=\|g\|_q\asymp 2^{-\|\tilde{s}\|_1(1-1/p)}\|g_{\tilde{s}}(x)\|_q\gg$$

$$\gg N^{-1}2^{-\|\widetilde{s}\|_1(1/p-1/q)}2^{-\|\widetilde{s}\|_1(1-1/p)}\left\|\sum_{k\in\rho(\widetilde{s})}\prod_{j=1}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{\beta_j\pi}{2}\right)\right\|_q\asymp$$

$$\asymp N^{-1}2^{-\|\widetilde{s}\|_1(1-1/q)}\|d_{\widetilde{s}}(x)\|_q\gg N^{-1}2^{-\|\widetilde{s}\|_1(1-1/q)}2^{\|\widetilde{s}\|_1(1-1/q)}=N^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В случае, когда $\psi_j(|k_j|)=|k_j|^{-r_j}$, $r_j>0$, классы $L^{\psi}_{\beta,p}$ совпадают с классами $W^r_{\beta,p}$, и теоремы, аналогичные 1 — 3, известны. При $q=p$, $r$ — целочисленный вектор, теорема доказана Б. С. Митягиным [7], при $q=p$, $r$ — произвольный вектор,— Н. С. Никольской [8], в общем случае — Э. М. Галеевым [9].

2. Целью наших дальнейших исследований является обоснование целесообразности приближения классов функций $L^{\psi}_{\beta,p}$ суммами Фурье $S^{\psi}_N(f, x)$ и $S^{\psi}_{N,p,q}(f, x)$. Для этого решим экстремальную задачу о нахождении величины

$$d_M(F, X)=\inf_{L_M}\sup_{x\in F}\inf_{a\in L_M}\|x-a\|, \tag{11}$$

где нижняя грань берется по всем $L_M$ — $M$-мерным линейным многообразиям в $X$. Величина (11) впервые рассмотрена в 1936 г. А. Н. Колмогоровым [10] и получила название $M$-мерного поперечника по Колмогорову множества $F$ в пространстве $X$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\forall j=\overline{1, m}$ $\psi_j(\cdot)\in\mathcal{D}$, $\beta_j\in R$. *Тогда при* $p\in(1, \infty)$ *справедлива оценка*

$$d_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_p)\asymp N^{-1},$$

*при этом числа* $M$ *и* $N$ *связаны посредством соотношения* $M\asymp|Q^{\psi}_N|$, *где* $|Q^{\psi}_N|$ — *количество элементов множества* $Q^{\psi}_N$.

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 1, если по заданному $M$ число $N$ подобрать так, чтобы сумма Фурье $S^{\psi}_N(f, x)$ содержала по порядку $M$ гармоник. Поэтому перейдем к получению оценки снизу. Пусть $T_N$ — множество полиномов, содержащих гармоники с «номерами» из множества $Q^{\psi}_N$. При этом для количества элементов множества $Q^{\psi}_N$ выполняется соотношение $|Q^{\psi}_N|\asymp M$.

Покажем, что для $(\psi, \beta)$-производной произвольного полинома $t$ из $T_N$ выполняется неравенство

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p\ll N\|t\|_p, \tag{12}$$

являющееся аналогом неравенства Бернштейна для дробных производных [5, 8].

Действительно, пусть $t\in T_N$, т. е. $t(\cdot)=\sum_{s\in B^{\psi}_N}\delta_s(t, \cdot)$. Положим

$$\tau(\cdot)=\sum_{s\in B^{\psi}_N}\prod_{j=1}^{m}\psi_j^{-1}(2^{s_j})\,\delta_s(t, \cdot)$$

и расссмотрим кратную последовательность

$$\widetilde{\lambda}_k=\begin{cases}\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\frac{\psi_j(2^{s_j})}{\psi_j(|k_j|)}e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn}k_j}, & s\in B^{\psi}_N,\quad k\in\rho(s);\\ 0, & s\,\overline{\in}\,B^{\psi}_N,\quad k\in\rho(s),\end{cases}$$

которая, как нетрудно проверить, удовлетворяет условиям теоремы Марцинкевича [6, с. 67].

Далее, поскольку

$$\widetilde{\Lambda}\tau = \sum_{s\in B_N^\psi} \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \sum_{k\in\rho(s)} \widetilde{\lambda}_k c_k(t, \cdot) e^{i(k,\cdot)} = t_\beta^\psi,$$

то в силу теоремы Марцинкевича и теоремы $A$ имеем

$$\| t_\beta^\psi \|_p = \| \widetilde{\Lambda}\tau \|_p \ll \| \tau \|_p \asymp \Big\| \Big( \sum_{s\in B_N^\psi} \Big| \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \delta_s(t, \cdot) \Big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leqslant$$

$$\leqslant N \Big\| \Big( \sum_{s\in B_N^\psi} |\delta_s(t, \cdot)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \ll N \| t \|_p,$$

и, таким образом, оценка (12) установлена.

Из оценки (12) следует, что множество функций

$$U_{p,N} = \Big\{ f : f(\cdot) = \sum_{s\in B_N^\psi} \delta_s(f, \cdot), \ \| f \|_p \ll N^{-1} \Big\}$$

принадлежит классу $CL_{\beta,p}^\psi$, где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Для завершения доказательства воспользуемся предложением [11, с. 258]: *если множество $\mathfrak{M}$ линейного нормированного пространства $X$ содержит шар $\gamma U_{n+1} = \{x : x \in M_{n+1}, \ \|x\| \leqslant \gamma\}$ радиуса $\gamma$ некоторого $n+1$-мерного подпространства $M_{n+1}$, то $d_n(\mathfrak{M}, X) \geqslant \gamma$.*

В силу этого предложения будем иметь

$$d_{M-1}(L_{\beta,p}^\psi, L_p) \geqslant d_{M-1}(U_{p,N}, L_p) \gg N^{-1},$$

откуда следует требуемая оценка. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $j = \overline{1, m}$, $r_j > 0$ оценка $d_M(L_{\beta,p}^\psi, L_p)$ получена в [9]. При этом было установлено, что подпространство тригонометрических полиномов с «номерами» гармоник из «ступенчатого гиперболического креста» является экстремальным. В более общей ситуации, как следует из доказанной теоремы, оптимальными оказались полиномы, построенные по множествам $Q_N^\psi$.

Теорема 5. *Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $\forall j = \overline{1, m}$ $\psi_j(\cdot) \in \mathcal{D}_{p,2}$, $\beta_j \in R$. Тогда*

$$d_M(L_{\beta,p}^\psi, L_2) \asymp N^{-1},$$

*где $N$ подобрано так, чтобы для количества точек множества $Q_{N,p,2}^\psi$ выполнялось соотношение $|Q_{N,p,2}^\psi| \asymp M$.*

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 3 при $q = 2$ и при $N$, удовлетворяющему соотношению $|Q_{N,p,2}^\psi| \asymp M$.

При доказательстве оценки снизу используем метод, который применялся В. Н. Темляковым при нахождении оценки снизу поперечника класса $W_{\beta,p}^r$ [5].

По заданному числу $M$ подберем $N$ таким образом, чтобы $|Q_{N,p,2}^\psi| = K > 2M$ и $|Q_{N,p,2}^\psi| \asymp M$.

Обозначим через $\mathcal{T}_N$ множество функций, «номера» гармоник которых лежат в множестве $Q_{N,p,2}^\psi$. Тогда из определения поперечника следует оценка

$$d_M(L_{\beta,p}^\psi, L_2) \geqslant d_M(L_{\beta,p}^\psi \cap \mathcal{T}_N, L_2). \tag{13}$$

Далее, пусть $P_N$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{T}_N$. Тогда для $f \in L_2$ справедлива оценка

$$\| P_N f \|_2 \leqslant \| f \|_2,$$

вследствие которой для $t \in \mathscr{T}_N$

$$\| t - f \|_2 \gg \| P_N (t - f) \|_2 = \| t - P_N f \|_2. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) получаем

$$d_M (L^{\psi}_{\beta,p}, L_2) \gg d_M (L^{\psi}_{\beta,p} \cap \mathscr{T}_N, L_2 \cap \mathscr{T}_N). \qquad (15)$$

Пусть $L_M \subset \mathscr{T}_N$ — $M$-мерное линейное подпространство, порожденное ортонормированной системой функций $f_1(\tau), \ldots, f_M(\tau)$. Дополним эту систему до полной ортонормированной системы в $\mathscr{T}_N$ функциями $f_{M+1}(\tau), \ldots$ $\ldots, f_K(\tau)$.

Рассмотрим затем для некоторого $k \in Q^{\psi}_{N,p,2}$ функцию $e^{i(k,\tau)}$. Запишем ее разложение по системе $\{f_r(\tau)\}_{r=1}^{K}$, т. е.

$$e_k(\tau) = e^{i(k,\tau)} = \sum_{r=1}^{K} f_{rk} f_r(\tau),$$

где $f_{rk}$ — коэффициенты разложения.

Заметим, что поскольку системы $\{f_r(\tau)\}_r$ и $\{e^{i(k,\tau)}\}_k$ ортонормированы, то

$$\sum_{k \in Q^{\psi}_{N,p,2}} | f_{rk} |^2 = \sum_{r=1}^{K} | f_{rk} |^2 = 1. \qquad (16)$$

Для приближения функции $e_k(\tau)$ ее $M$-й суммой Фурье в пространстве $L_2$ справедливы равенства

$$\Big\| e_k(\cdot) - \sum_{r=1}^{M} f_{rk} f_r(\cdot) \Big\|_2^2 = \Big\| \sum_{r=M+1}^{K} f_{rk} f_r(\cdot) \Big\|_2^2 = \sum_{r=M+1}^{K} | f_{rk} |^2,$$

и в силу (16)

$$\sum_{k \in Q^{\psi}_{N,p,2}} \Big\| e_k(\cdot) - \sum_{r=1}^{M} f_{rk} f_r(\cdot) \Big\|_2^2 = \sum_{k \in Q^{\psi}_{N,p,2}} \sum_{r=M+1}^{K} | f_{rk} |^2 = \sum_{k \in Q^{\psi}_{N,p,2}} \sum_{r=1}^{K} | f_{rk} |^2 -$$

$$- \sum_{k \in Q^{\psi}_{N,p,2}} \sum_{r=1}^{M} | f_{rk} |^2 = K - M \geqslant \frac{K}{2} \asymp \frac{1}{2} \sum_{s \in B^{\psi}_{N,p,2}} 2^{(s,1)}.$$

Из полученной оценки следует, что существует вектор $s^0 \in B_{N,p,2}$, для которого

$$\sum_{k \in \rho(s^0)} \Big\| e_k(\cdot) - \sum_{r=1}^{M} f_{rk} f_r(\cdot) \Big\|_2^2 = \sum_{k \in \rho(s^0)} \sum_{r=M+1}^{K} | f_{rk} |^2 \geqslant \frac{1}{2} 2^{(s^0,1)}. \qquad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\tau) = \sum_{k \in \rho(s^0)} e^{i(k,\tau)}$$

и оценим ее $(\psi, \beta)$-производную в пространстве $L_p$.

Поскольку $\psi_j(\cdot) \in \mathscr{D}_{p,2}$, то нетрудно убедиться, что

$$\| g^{\psi}_{\beta} \|_p \ll \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1} (2^{s_j^0}) \| g \|_p$$

и, принимая во внимание, что

$$\| g \|_p \ll 2^{\| s^0 \|_1 (1 - 1/p)}$$

будем иметь

$$\| g^{\psi}_{\beta} \|_p \ll \prod_{j=1}^{m} \psi_j^{-1} (2^{s_j^0}) 2^{\| s^0 \|_1 (1 - 1/p)}.$$

Следовательно, функция

$$g^*(\tau) = C \prod_{j=1}^{m} \psi_j (2^{s_j^0}) 2^{-\|s^0\|_1(1-1/p)} g(\tau) \tag{18}$$

с некоторой постоянной $C$ принадлежит классу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

В завершение рассмотрим приближение функций $g^*(\tau + y)$, $y \in \pi_m$, $M$-й суммой Фурье по системе $\{f_r\}$. Имеем

$$g(\tau + y) - S_M(g(\tau + y), f_r) = \sum_{k \in \rho(s^0)} e^{i(k,y)} \sum_{r=1}^{K} f_{rk} f_r(\tau) -$$

$$\sum_{k \in \rho(s^0)} e^{i(k,y)} \sum_{r=1}^{M} f_{rk} f_r(\tau) = \sum_{k \in \rho(s^0)} e^{i(k,y)} \sum_{r=M+1}^{K} f_{rk} f_r(\tau),$$

и, следовательно,

$$\| g(\cdot + y) - S_M(g(\cdot + y), f_r) \|_2^2 = \sum_{r=M+1}^{K} \Big| \sum_{k \in \rho(s^0)} f_{rk} e^{i(k,y)} \Big|^2.$$

Отсюда, принимая во внимание (17), получаем

$$(2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} \| g(\cdot + y) - S_M(g(\cdot + y), f_r) \|_2^2 dy = \sum_{k \in \rho(s^0)} \sum_{r=M+1}^{K} |f_{rk}|^2 \geqslant \frac{1}{2} 2^{\|s^0\|_1}.$$

Из этой оценки следует, что существует такое $y_0 \in \pi_m$, что

$$\| g(\cdot + y_0) - S_M(g(\cdot + y_0), f_r) \|_2^2 \geqslant \frac{1}{2} 2^{\|s^0\|_1}. \tag{19}$$

И значит, в силу (18) и (19) имеем

$$d_M(L^{\psi}_{\beta,p} \cap \mathscr{T}_N, L_2 \cap \mathscr{T}_N) \gg 2^{\frac{\|s^0\|_1}{2}} \prod_{j=1}^{m} \psi_j (2^{s_j^0}) 2^{-\|s^0\|_1(1-1/p)} \asymp$$

$$\asymp \prod_{j=1}^{m} \psi_j (2^{s_j^0}) 2^{\|s^0\|_1(1/p-1/2)} \geqslant N^{-1}. \tag{20}$$

Наконец, сопоставив (15) и (20), приходим к требуемой оценке снизу. Теорема доказана.


1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев: Наук. думка, 1987.— 268 с.
3. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР.— 1960.— **132**, № 2.— С. 247—250.
4. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Там же.— № 5.— С. 982—985.
5. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— **178**.— С. 1—112.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1969.— 480 с.
7. *Митягин Б. С.* Приближение функций в пространствах $L_p$ и $G$ на торе // Мат. сб.— 1962.— **58**, № 3.— С. 397—414.
8. *Никольская Н. С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике $L_p$ // Сиб. мат. журн.— 1974.— **15**, № 2.— С. 395—412.
9. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки.— 1978.— **23**, № 2.— С. 197—212.
10. *Kolmogoroff A. N.* Uber die besste Annaherung von Functionen einer gegebenen Functionclassen // Ann. Math.— 1936.— **37**.— P. 107—111.
11. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.


Получено 31.10.90