УДК 517.927.4

Н. И. Ронто, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Численно-аналитический метод в случае вырожденных матриц в краевых условиях

Предлагается модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для исследования существования и построения решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при двухточечных линейных краевых условиях. Метод ориентирован на случай, когда матрицы, входящие в краевые условия, являются вырожденными, но их линейная комбинация — неособенная.

Пропонується модифікація чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження існування і побудови розв'язків систем звичайних диференціальних нелінійних рівнянь у випадку двоточкових лінійних крайових умов. Метод орієнтовано на випадок, коли матриці, що входять у крайові умови, є виродженими, але їх лінійна комбінація — неособлива.

Введение. В настоящей статье обобщается численно-аналитический метод последовательных приближений [1] для исследования существования и приближенного построения решений нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x, f \in R^n, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

изучаемых при двухточечных неразделяющихся краевых условиях

$$Ax(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

где x, f, d — точки n-мерного евклидова пространства R^n, A, C — такие постоянные матрицы размерности $n \times n$, что для некоторых фиксированных действительных чисел k_1, k_2 $\det(k_1A + k_2C) \neq 0$. Так как матрицы A и C могут быть и вырожденными, то разработанная в [1] численно-аналитическая схема для задачи (1), (2) неприменима. Кроме того, показано, что для задачи (1), (2) можно построить последовательность функций, зависящих от параметра, которая при определенных его значениях сходится к искомому решению. По свойствам построенных приближенных решений делается заключение о разрешимости исследуемых краевых задач.

1. Выбор вида и сходимость последовательных приближений. Пусть правая часть $f(t, x)$ уравнения (1) непрерывна в области

$$f(t, x): [0, T] \times D \to R^n, \tag{3}$$

где D — замкнутая ограниченная область пространства R^n, и удовлетворяет в ней условиям ограниченности вектором $M = (M_1, \ldots, M_n)$, $M_i \geqslant 0$, а также условию Липшица с матрицей $K = \{K_{ij} \geqslant 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}$:

$$|f(t, x)| \leqslant M, \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant K|x' - x''|, \tag{4}$$

где $|f(t, x)| = (|f_1(t, x)|, \ldots, |f|(t, x)|)$ и неравенство между векторами понимается покомпонентно. Ограничим класс рассматриваемых краевых задач такими, для которых параметры M, K, A, C, d, k_1, k_2, а также область определения (3) удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

1) множество D_β точек $x_0 \in R^n$ таких, что точки $x_0 + k_1H[d - (A + C)x_0] = z_0(x_0)$ содержатся в области D вместе со своей β-окрестностью, непусто:

$$D_\beta \neq \varnothing, \tag{5}$$

где $H = (k_1A + k_2C)^{-1}$, $\beta = \dfrac{T}{2}M + \beta_1(x_0)$, $\quad \beta_1(x_0) = |(k_2 - k_1)H[d - (A + C)x_0]|$;

2) наибольшее собственное значение $\lambda(Q)$ матрицы $Q = \frac{T}{\pi} K$ не превышает единицы:

$$\lambda(Q) < 1. \tag{6}$$

Для того чтобы построить последовательность функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), рассмотрим последовательность вида

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0)) \, ds \right] dt +$$
$$+ \alpha [k_1 T + (k_2 - k_1) t], \quad m = 1, 2, \ldots, \quad x_0(t, x_0) = x_0 + \alpha k_1 T, \tag{7}$$

полагая $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ параметрами.

Выберем параметр α таким образом, чтобы функции (7) удовлетворяли краевым условиям (2) для всех $m = 1, 2, \ldots$ при произвольном значении другого параметра $x_0 \in D_\beta$. Подставляя (7) в (2) относительно α, получаем систему алгебраических уравнений, откуда

$$\alpha = \frac{1}{T} H [d - (A + C) x_0].$$

Поэтому все члены последовательности функций

$$x_m(t, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0) + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0)) \, ds \right] dt + \frac{t}{T} (k_2 - k_1) H d(x_0), \tag{8}$$
$$m = 1, 2, \ldots, x_0(t, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0) = z_0(x_0),$$

где $d(x_0) = d - (A + C) x_0$, удовлетворяют краевым условиям (2) при произвольном x_0.

Справедливо следующее утверждение о сходимости последовательных приближений $x_m(t, x_0)$ вида (8).

Теорема 1. *Предположим, что правая часть $f(t, x)$ системы* (1) *непрерывна в области* (3) *и выполнены условия* (4)—(6).

Тогда последовательность функций $x_m(t, x_0)$ вида (8), *удовлетворяющих краевым условиям* (2), *равномерно сходится при $m \to \infty$ в области $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ к предельной функции $x^*(t, x_0)$. При этом $x^*(t, x_0)$ является решением интегрального уравнения*

$$x(t) = z_0(x_0) + \int_0^t \left[f(t, x(t)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) \, ds + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{T} (k_2 - k_1) H d(x_0) \right] dt \tag{9}$$

таким, что $x^*(0, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0) = z_0(x_0)$ и, кроме того, $x^*(t, x_0)$ удовлетворяет краевым условиям (2), *т. е. является решением возмущенной краевой задачи*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) + \Delta(x_0), \\ Ax(0) + Cx(T) &= d, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} (k_2 - k_1) H d(x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t)) \, dt.$$

Для отклонений $x^*(t, x_0)$ от $x_m(t, x_0)$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ справед-

лива оценка

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \tilde{\alpha}_1(t)\,[Q^m (E-Q)^{-1} M + KQ^{m-1}(E-Q)^{-1}\beta_1(x_0)] =$$

$$= \tilde{\alpha}_1(t)\,W(x_0), \quad m = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

где

$$W(x_0) = Q^m (E-Q)^{-1} M + KQ^{m-1}(E-Q)^{-1}\beta_1(x_0),$$

$$\tilde{\alpha}_1(t) = \frac{\pi}{3}\,\alpha_1(t), \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Доказательство. Покажем, что в пространстве непрерывных вектор-функций последовательность (8) является фундаментальной, а следовательно, и равномерно сходящейся.

Сначала установим, что если $x_0 \in D_\beta$, то все функции $x_m(t, x_0) \in D$. Действительно, с учетом леммы 3.1 [2, с. 13] из (8) следует

$$|x_1(t, x_0) - z_0(x_0)| \leqslant \left| \int_0^t \left[f(t, z_0(x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, z_0(x_0))\, ds \right] dt \right| +$$

$$+ |(k_2 - k_1) H d(x_0)| \leqslant \alpha_1(t) M + \beta_1(x_0), \quad \alpha_1(t) \leqslant T/2. \tag{12}$$

Поэтому $x_1(t, x_0) \in D$, как только $x_0 \in D_\beta$. По методу математической индукции легко установить, что для всех $m = 1, 2, \dots$, $t \in [0, T]$ и любого $x_0 \in D_\beta$ все функции вида (8) также не выходят из области D.

Оценим разность функций

$$x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0) = \int_0^t \Big[f(t, x_m(t, x_0)) - f(t, x_{m-1}(t, x_0)) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T (f(s, x_m(s, x_0)) - f(s, x_{m-1}(s, x_0)))\, ds \Big] dt = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \Big[f(s, x_m(s, x_0)) -$$

$$- f(s, x_{m-1}(s, x_0)) \Big] ds - \frac{t}{T}\int_t^T [f(s, x_m(s, x_0)) - f(s, x_{m-1}(s, x_0))]\, ds.$$

Если обозначить $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$, то с учетом условия Липшица (4) из последнего равенства имеем

$$r_{m+1}(t) \leqslant K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s)\, ds + \frac{t}{T}\int_t^T r_m(s)\, ds\right]. \tag{13}$$

Согласно (12)

$$r_1(t) = |x_1(t, x_0) - x_0(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) M + \beta_1(x_0). \tag{14}$$

Принимая во внимание, что в силу леммы [3] для последовательности функций вида

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)\, ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)\, ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \dots, \tag{15}$$

справедлива оценка

$$\alpha_{m+1}(t) \leqslant \frac{T^m}{\pi^m}\,\tilde{\alpha}_1(t), \quad \tilde{\alpha}_1(t) = \frac{\pi}{3}\,\alpha_1(t), \tag{16}$$

из (13), (14) при $m=1$ находим

$$r_2(t)\leqslant KM\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t\alpha_1(s)\,ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T\alpha_1(s)\,ds\right]+K\beta_1(x_0)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t ds+\right.$$

$$\left.+\frac{t}{T}\int\limits_t^T ds\right]\leqslant K\left[\alpha_2(t)M+\alpha_1(t)\beta_1(x_0)\right]\leqslant\tilde{\alpha}_1(t)\left[\frac{T}{\pi}KM+K\beta_1(x_0)\right].$$

По методу математической индукции с учетом (15), (16) легко получить

$$r_{m+1}(t)\leqslant K^m\left[\alpha_{m+1}(t)M+\alpha_m(t)\beta_1(x_0)\right]\leqslant\tilde{\alpha}_1(t)\left[\left(\frac{T}{\pi}K\right)^mM+\right.$$

$$\left.+K\left(\frac{T}{\pi}K\right)^{m-1}\beta_1(x_0)\right]=\tilde{\alpha}_1(t)\left[Q^mM+KQ^{m-1}\beta_1(x_0)\right]. \tag{17}$$

Далее, из соотношения

$$x_{m+j}(t,x_0)-x_m(t,x_0)=(x_{m+j}(t,x_0)-x_{m+j-1}(t,x_0))+\ldots$$
$$\ldots+(x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0))$$

на основании (17) получаем неравенство

$$|x_{m+j}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leqslant\sum_{i=1}^{j}r_{m+i}(t)\leqslant\tilde{\alpha}_1(t)\left[\sum_{i=0}^{j-1}(Q^{m+i}M+KQ^{m+i-1}\beta_1(x_0))\right]=$$

$$=\tilde{\alpha}_1(t)\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^iM+KQ^{m-1}\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\beta_1(x_0)\right]. \tag{18}$$

Так как с учетом предположения (6)

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\leqslant(E-Q)^{-1},\quad \lim_{m\to\infty}Q^m=0,$$

из (18) легко заключить, что при $m\to\infty$ последовательность функций $x_m(t,x_0)$ в силу критерия Коши равномерно сходится в области $(t,x_0)\in\in[0,T]\times D_\beta$:

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t,x_0)=x^*(t,x_0). \tag{19}$$

Поскольку все функции $x_m(t,x_0)$ последовательности (8) удовлетворяют краевым условиям (2), то и предельная функция $x^*(t,x_0)$ также удовлетворяет им.

Устремляя $j\to\infty$, из (18) при всех $m=1,2,\ldots$ для оценки отклонения $x^*(t,x_0)$ от $x_m(t,x_0)$ получаем искомую оценку (11). Переходя в равенстве (8) к пределу при $m\to\infty$ и учитывая (19), видим, что предельная функция $x^*(t,x_0)$ действительно является решением интегрального уравнения (9) и $x^*(0,x_0)=z_0(x_0)$. Очевидно, $x^*(t,x_0)$ в то же время будет решением возмущенной по отношению к (1), (2) краевой задачи (10).

2. Некоторые свойства предельной функции. Установим, как с помощью специальным образом выбранного управляющего параметра можно таким образом видоизменить правую часть дифференциального уравнения (1), что решение определенной задачи Коши для полученного уравнения будет в то же время удовлетворять краевым условиям (2).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *для любой точки $x_0\in D_\beta$ можно указать такое единственное значение управляющего параметра $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, равное*

$$\mu=\frac{1}{T}(k_2-k_1)Hd(x_0)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,x^*(t,x_0))\,dt, \tag{20}$$

где $x^*(t, x_0)$ — *предельная функция последовательности* (8), *что решение* $x = x(t) = x^*(t, x_0)$ *задачи Коши вида*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + \mu, \\ x(0) = z_0(x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0) \end{cases} \tag{21}$$

будет также удовлетворять и краевым условиям (2), *т. е. являться решением краевой задачи* (10) *при* $\Delta(x_0) = \mu$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция $x(t) = x^*(t, x_0)$, являясь решением интегрального уравнения (9), есть одновременно и решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x) + \frac{1}{T}(k_2 - k_1) H d(x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, x_0))\, dt, \quad x(0) = z_0(x_0), \tag{22}$$

причем удовлетворяющим краевым условиям (2).

Итак, мы нашли значение параметра μ вида (20), при котором $x(t) = x^*(t, x_0)$ есть решение краевой задачи (22), (2). Остается показать, что это значение параметра единственно, т. е. при всяком другом, отличном от значения μ вида (20), решение задачи Коши (21) не будет удовлетворять краевым условиям (2).

Предположим противное. Пусть существуют два значения μ', μ'', $\mu' \neq \mu''$ такие, что решения $x(t, x_0, \mu')$ и $x(t, x_0, \mu'')$ задачи Коши (21) при $\mu = \mu'$, $\mu = \mu''$ удовлетворяют и краевым условиям (2). Тогда для разности этих решений из (9) получаем тождество

$$x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu') = \int_0^t \Big[(f(t, x(t, x_0, \mu'')) - f(t, x(t, x_0, \mu'))) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T (f(s, x(s, x_0 \mu'')) - f(s, x(s, x_0, \mu')))\, ds\Big]\, dt.$$

Положив $x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu') = r(t)$, из последнего соотношения с учетом условия Липшица (4) так же, как и при получении (13), будем иметь

$$r(t) \leqslant K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t r(s)\, ds + \frac{t}{T}\int_t^T r(s)\, ds\right]. \tag{23}$$

Из (23) находим, что для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$r(t) \leqslant \alpha_{m+1}(t) K^{m+1} |r(t)|_0, \tag{24}$$

где $|r(t)|_0 = (\sup_t |r_1(t)|, \ldots, \sup_t |r_n(t)|)$, $\alpha_{m+1}(t)$ — положительные функции, определяемые согласно (15).

Принимая во внимание (16), из (24) находим

$$|r(t)|_0 \leqslant \widetilde{\alpha}_1(t) K Q^m |r(t)|_0 \leqslant \frac{\pi T}{6} K Q^m |r(t)|_0.$$

Так как все собственные числа матрицы Q лежат в круге единичного радиуса, то последнее неравенство возможно лишь при $|r(t)|_0 = 0$, т. е. при $\mu'' = \mu'$. Противоречие доказывает единственность управляющего параметра μ.

Выясним, при каких необходимых и достаточных условиях предельная функция последовательности (8) будет решением рассматриваемой краевой задачи (1), (2).

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то для того чтобы решение* $x = x^*(t)$ *уравнения* (1), *принимающее при* $t = 0$ *значение* $x^*(0) = z_0(x_0)$, *было и решением исходной краевой задачи* (1), (2), *необходи-*

мо и достаточно, чтобы определяющая функция $\Delta(x_0)$ *в точке* x_0 *обращалась в нуль:*

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1) Hd(x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, x_0))\, dt = 0, \tag{25}$$

где $x^*(t, x_0)$ — *предельная функция последовательности* (8). *В этом случае* $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ *и для отклонения* $x^*(t)$ *от приближенного решения* $x_m(t, x_0)$ *вида* (8) *верна оценка* (11).

Доказательство. Достаточность условия (25) непосредственно следует из того, что функция $x^*(t, x_0)$, удовлетворяющая краевым условиям (2), есть решение задачи Коши (22). Очевидно, что если выполняется (25), то этого достаточно, чтобы $x^*(t, x_0)$ было решением краевой задачи (1), (2).

Необходимость выполнения условия (25) вытекает из того, что если $x = x^*(t)$ является решением краевой задачи (1), (2) с начальным значением $x^*(0) = z_0(x_0)$, $x_0 \in D_\beta$, то решение $x = x(t, x_0, \mu)$ задачи Коши (21) будет удовлетворять краевым условиям (2) именно при $\mu = \Delta(x_0) = 0$, ибо в этом случае $x(t, x_0, \mu) = x^*(t)$ и такое значение параметра μ вида (20), согласно теореме 2, единственно. В этом случае $x^*(t) = x^*(t, x_0)$, что и ведет к неравенству (11).

3. Достаточные условия существования решений. Для исследования разрешимости краевой задачи (1), (2) наряду с точным определяющим уравнением (25) введем в рассмотрение приближенное определяющее уравнение

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1) Hd(x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t, x_0))\, dt = 0, \tag{26}$$

которое отличается лишь тем, что вместо $x^*(t, x_0)$ фигурирует $x_m(t, x_0)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1, *и, кроме того:*

1) *существует выпуклая, замкнутая область* $D_1 \subset D_\beta$ *такая, что для некоторого фиксированного* $m \geqslant 1$ *приближенное определяющее уравнение* (26) *обладает в* D_1 *единственным решением* $x_0 = x_{0m}$ *ненулевого индекса;*

2) *на границе* S_1 *области* D_1 *выполнено условие*

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(x_0). \tag{27}$$

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет решение* $x = x^*(t)$ *с начальным значением*

$$x^*(0) = x_0^* + k_1 Hd(x_0^*).$$

При этом $x_0^* \in D_1$.

Доказательство. Так как по условию 1 точка $x_0 = x_{0m}$ является в области D_1 единственной особой точкой с ненулевым индексом отображения $\Delta_m(x_0) : D_\beta \to R^n$, порожденной (26), то согласно [4, с. 166] вращение векторного поля $\Delta_m(x_0)$ на границе S_1 отлично от нуля.

Если бы показать, что векторные поля $\Delta(x_0)$ и $\Delta_m(x_0)$ вида (25) и (26) являются гомотопными, то на основании свойств вращений гомотопных полей вращение векторного поля $\Delta(x_0)$ на S_1 также было бы отлично от нуля. Тогда на основании свойств вращений по крайней мере в одной точке $x_0 = x_0^*$ области D векторное поле $\Delta(x_0)$ обращается в нуль. Это означает, что определяющее уравнение (25) имеет в D_1 по крайней мере одно решение $x_0 = x_0^*$. Следовательно, по теореме 3 решение $x = x^*(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x^*(0) = x_0^* + k_1 Hd(x_0^*)$ является также решением краевой задачи (1), (2).

Для завершения доказательства теоремы остается установить гомотопность векторных полей $\Delta(x_0)$ и $\Delta_m(x_0)$. Для этого рассмотрим непрерывное по совокупности переменных семейство всюду непрерывных на S_1 векторных полей

$$P(\theta, x_0) = \Delta_m(x_0) + \theta[\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)], \tag{28}$$

соединяющие поля $P(0, x_0) = \Delta_m(x_0)$ и $P(1, x_0) = \Delta(x_0)$. Покажем, что для $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $x_0 \in S_1$ при выполнении условия (27) вектор-функция $P(\theta, x_0) \neq 0$. Действительно, при $m \geqslant 1$ из (25), (26) с учетом условия Липшица (4) и оценки (11) имеем

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(t, x^*(t, x_0)) - f(t, x_m(t, x_0))|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T} KW(x_0) \int_0^T \tilde{\alpha}_1(t)\,dt = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(x_0). \tag{29}$$

Следовательно, на S_1 в силу (27)—(29) всегда справедливо неравенство

$$|P(\theta, x_0)| \geqslant |\Delta_m(x_0)| - |\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| > 0,$$

т. е. вектор-функция $P(\theta, x_0)$ на S_1 действительно нигде при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ не принимает нулевое значение, что означает гомотопность векторных полей $\Delta(x_0)$, $\Delta_m(x_0)$.

4. Необходимые условия существования решения. Предварительно докажем лемму, оценивающую близость предельных функций $x^*(t, x_0')$ и $x^*(t, x_0'')$ для точек $x_0', x_0'' \in D_\beta$, а также теорему о непрерывной зависимости определяющей функции $\Delta(x_0)$ вида (25) от x_0.

Лемма. *Пусть для краевой задачи* (1), (2) *выполнены условия* (4)—(6). *Тогда для любых точек* $x_0', x_0'' \in D_\beta$ *для отклонения предельных функций последовательностей* $x_m(t, x_0')$, $x_m(t, x_0'')$ *вида* (8) *справедливо неравенство*

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \leqslant [E + \tilde{\alpha}_1(t) K (E - Q)^{-1}] (R_1 + R_2) |x_0' - x_0''|, \tag{30}$$

где

$$R_1 = |E - k_1 H (A + C)|, \quad R_2 = |(k_2 - k_1) H (A + C)|.$$

Доказательство. Непосредственно из (8), выполняя аналогичные преобразования, как при установлении (13), имеем

$$|x_1(t, x_0') - x_1(t, x_0'')| \leqslant (R_1 + R_2)|x_0' - x_0''| + K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^T |z_0(x_0') -\right.$$

$$\left. - z_0(x_0'')|\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T |z_0(x_0') - z_0(x_0'')|\,ds\right] = (E + \alpha_1(t) K) R_1 |x_0' - x_0''| +$$

$$+ R_2 |x_0' - x_0''|. \tag{31}$$

По методу математической индукции на основании (15), (31) можно получить

$$|x_m(t, x_0') - x_m(x_0'')| \leqslant [(E + \alpha_1(t) K + \ldots + \alpha_m(t) K^m) R_1 + (E + \alpha_1(t) K + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{m-1}(t) K^{m-1}) R_2] |x_0' - x_0''|.$$

Из последнего соотношения при $m \to \infty$ с учетом неравенств (6), (16) имеем

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \leqslant \left[\left(E + \tilde{\alpha}_1(t) \sum_{i=0}^{\infty} KQ^i\right) R_1 + \left(E + \tilde{\alpha}_1(t) \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{i=0}^{\infty} KQ^i\right) R_2\right] |x_0' - x_0''| = [E + \tilde{\alpha}_1(t) K (E - Q)^{-1}] (R_1 + R_2) |x_0' - x_0''|,$$

т. е. (30) действительно выполняется.

Теорема 5. *Если краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет условиям* (4)—(6), *то определяющая функция* $\Delta(x_0)$ *вида* (25) *непрерывна в области*

D_β *и для всех* $x_0', x_0'' \in D_\beta$ *выполняется оценка*

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \leqslant \left[\frac{1}{T} R_2 + K\left(E + \frac{\pi T}{9} K (E-Q)^{-1}\right)(R_1 + R_2)\right] |x_0' - x_0''|. \tag{32}$$

Доказательство. Для всех точек $x_0 \in D_\beta$ существует предел равномерно сходящейся последовательности функций (8), являющейся также непрерывной функцией. Поэтому при изменении x_0 в области D_β функция $\Delta(x_0)$ также непрерывна и ограничена:

$$\Delta(x_0) \leqslant \frac{1}{T} |(k_2 - k_1) Hd(x_0)| + M.$$

Из (25) имеем

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \leqslant \left|\frac{1}{T}(k_2 - k_1) H(A + C)\right| |x_0' - x_0''| +$$

$$+ \frac{1}{T} K \int_0^T |x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \, dt.$$

Подставив в последнее соотношение неравенство (30), после несложных преобразований получаем (32).

Необходимые условия разрешимости краевой задачи (1), (2) вытекают из следующего утверждения.

Теорема 6. *Предположим, что краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет условиям* (4)—(6). *Тогда для того чтобы некоторая область* $D_2 \subset D_\beta$ *содержала точку* $x_0 = x_0^*$, *определяющую при* $t = 0$ *начальное значение*

$$x^*(0) = x_0^* + k_1 Hd(x_0^*) = z_0(x_0^*) \tag{33}$$

решения этой задачи, необходимо, чтобы для всех m *и произвольного* $\bar{x}_0 \in D_2$ *выполнялось неравенство*

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant \sup_{x_0 \in D_2} \left[\frac{1}{T} R_2 + K\left(E + \frac{\pi T}{9} K(E-Q)^{-1}\right) \times\right.$$

$$\left. \times (R_1 + R_2)\right] |x_0 - \bar{x}_0| + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(\bar{x}_0). \tag{34}$$

Доказательство. Пусть в точке $x_0 = x_0^*$ определяющая функция $\Delta(x_0)$ вида (25) сбращается в нуль, $\Delta(x_0^*) = 0$. Следовательно, в силу теоремы 3 начальное значение решения краевой задачи (1), (2) вычисляется согласно (33).

Применив теорему 5 в случае, когда $x_0' = \bar{x}_0$, $x_0'' = x_0^*$, из (32) получаем

$$|\Delta(\bar{x}_0)| \leqslant \left[\frac{1}{T} R_2 + K\left(E + \frac{\pi T}{9} K(E-Q)^{-1}\right)(R_1 + R_2)\right] |\bar{x}_0 - x_0^*|.$$

Но на основании неравенства (29)

$$|\Delta(\bar{x}_0) - \Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(\bar{x}_0),$$

т. е.

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant |\Delta(\bar{x}_0)| + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(\bar{x}_0).$$

Объединение двух последних неравенств доказывает справедливость соотношения (34):

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant \left[\frac{1}{T} R_2 + K\left(E + \frac{\pi T}{9} K(E-Q)^{-1}\right)(R_1 + R_2)|\bar{x}_0 - x_0^*| +\right.$$

$$+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(\overline{x}_0) \leqslant \sup_{x_0\in D_2}\left[\frac{1}{T}R_2 + K\left(E+\frac{\pi T}{9}K(E-Q)^{-1}\right)(R_1+R_2)\right]\times$$
$$\times|\overline{x}_0 - x_0| + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 QW(\overline{x}_0).$$

5. Пример. Пусть в области

$$t\in[0, T],\quad D: |x_1|\leqslant 0{,}5,\quad |x_2|\leqslant 0{,}5 \tag{35}$$

задана краевая задача

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0{,}5x_2 + 0{,}1 - 0{,}05t,\\ \dot{x}_2 &= 0{,}5x_1 - x_2^2 + 0{,}1 - 0{,}05t + 0{,}01t^2,\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(0) + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(1) = \begin{bmatrix}0\\ 0{,}1\end{bmatrix}. \tag{37}$$

Легко видеть, что при $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\det(A+2C)\neq 0$

$$H = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}5\end{bmatrix},\quad \beta_1(x_0) = \left|\begin{matrix}-x_{01}\\ 0{,}05 - 0{,}5x_{02}\end{matrix}\right|.$$

В качестве вектора M и матрицы K можно выбрать

$$M = \begin{bmatrix}0{,}4\\ 0{,}66\end{bmatrix},\quad K = \begin{bmatrix}0 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{bmatrix},$$

тогда

$$Q = \frac{1}{\pi}K,\quad \lambda(Q) = \frac{1+\sqrt{2}}{2\pi} < 1,$$

$$\beta = \begin{bmatrix}0{,}2\\ 0{,}33\end{bmatrix} + \left|\begin{matrix}-x_{01}\\ 0{,}05 - 0{,}5x_{02}\end{matrix}\right| = \begin{bmatrix}\beta^{(1)}(x_0)\\ \beta^{(2)}(x_0)\end{bmatrix},$$

$$D_\beta: |x_1|\leqslant 0{,}5 - \beta^{(1)}(x_0),\quad |x_2|\leqslant 0{,}5 - \beta^{(2)}(x_0),$$

и D_β непусто для тех точек x_0, для которых $\beta^{(1)}(x_0)\leqslant 0{,}5$; $\beta^{(2)}(x_0)\leqslant 0{,}5$. Следовательно, в области (35) для краевой задачи правомочно применение рассматриваемого численно-аналитического метода.

По итерационной схеме (8) для задачи (36), (37) получаем первое приближение $x_1(t, x_0) = (x_{11}(t, x_0), x_{32}(t, x_0))$ вида

$$x_{11}(t, x_0) = -0{,}025t^2 + (0{,}025 - x_{01})t,$$

$$x_{12}(t, x_0) = 0{,}0033t^3 - 0{,}025t^2 + (0{,}0717 - 0{,}5x_{02})t + 0{,}5x_{02} + 0{,}05.$$

Решением приближенного определяющего уравнения (26) при $m = 0$ является $x_0 = x_0^{(0)} = (0{,}0975;\ 0{,}045)$. Эта точка задает следующее приближенное начальное значение решения задачи (36), (37):

$$z_0(x_0^{(0)}) = x_0^{(0)} + k_1Hd(x_0^{(0)}) = (0;\ 0{,}0725).$$

Расчеты показывают, что значения точного решения $x = x^*(t) = (0{,}1t;\ 0{,}1t)$ достаточно хорошо аппроксимируются даже приближениями невысокого порядка.

1. *Самойленко А. М.*, *Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.— Киев : Наук. думка, 1985.— 224 с.
2. *Самойленко А. М.*, *Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
3. *Самойленко А. М.*, *Ронто Н. И.* Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 8.— С. 1107—1116.
4. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.— М. : Наука, 1969.— 455 с.

Получено 11.06.91