УДК 517.5

В. И. Рукасов, канд. физ.-мат. наук (Славян. пед. ин-т)

Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси

Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{C}_{\beta}^{\psi}$ в равномерной метрике.

Одержані асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень операторів Валле Пуссена на класах $\widehat{C}_{\beta}^{\psi}$ у рівномірній метриці.

1. Предварительные сведения. На протяжении ряда лет А. И. Степанец и его последователи изучают аппроксимативные свойства классов $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$, $\widehat{L}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$, определяющихся тем, что обобщенные (ψ, β)-производные их элементов принадлежат некоторому множеству $\mathfrak{N}$. Ряд результатов по этим вопросам изложен в работах [1—11].

Классы $\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ определяются следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество выпуклых вниз при всех $v \geqslant 1$, исчезающих на бесконечности функций $\psi(v)$. Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ продолжим на участок $[0; 1)$ так, чтобы полученная функция (которую, по-прежнему, будем обозначать через $\psi(\cdot)$) была непрерывна при всех $v \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$ и ее производная $\psi'(v) = \psi'(v + 0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0, \infty)$. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{U}$. Подмножество функций $\psi \in \mathfrak{U}$, для которых

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty, \tag{1}$$

обозначим через F. Пусть, далее, $\psi \in F$ и β — фиксированное число. Положим

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv.$$

Обозначим через $\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ множество функций $f(x)$, представимых равенством

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t)\, \widehat{\psi}(t)\, dt, \tag{2}$$

в котором A_0 — некоторая постоянная; интеграл понимается как предел по расширяющимся симметричным промежуткам; $\varphi \in S_{\infty}$; $\psi \in F$ ($S_{\infty} = \{\varphi : \operatorname{esssup} |\varphi(t)| \leqslant 1\}$.

Если $\psi \in F$, то $\forall \beta \in R$, как показано в [6], преобразование $\widehat{\psi}(t)$ суммируемо на всей оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(t)|\, dt$$

и классы $\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ состоят из функций $f(x)$, непрерывных $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

В работе [5] показано, что, если $\varphi(\cdot)$ — 2π-периодические функции, то классы $\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ представляют собой классы $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, (ψ, β)-производные которых $f_{\beta}^{\psi}(\cdot)$ (см. [4]) удовлетворяют условию $\operatorname{esssup} |f_{\beta}^{\psi}(t)| \leqslant 1$.

Следуя [5—8] функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (2) называют (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и полагают $\varphi(\cdot) = f_{\beta}^{\psi}(\cdot)$.

В качестве приближающих агрегатов для функции $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ в работе [5] предложены выражения вида

$$U_\sigma(f;x) = U_\sigma(f;x;\Lambda) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \psi(v) \lambda_\sigma(v) \times$$
$$\times \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt, \tag{3}$$

где $\Lambda = \{\lambda_\sigma(v)\}$ — семейство функций, непрерывных при всех $v \geqslant 0$, зависящих от действительного параметра σ.

В частности, в работе [5] рассмотрен случай, когда функции $\lambda_\sigma(v)$ задаются следующим образом:

$$\lambda_\sigma(v) = \lambda_\sigma(v, c) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant v \leqslant c; \\ \dfrac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c \leqslant v \leqslant \sigma; \\ 0, & v \geqslant \sigma, \end{cases}$$

где c — некоторое число из промежутка $[0, \sigma]$. Семейство $\{\lambda \ (v, c)\}$ обозначают через Λ_C.

В работе [7] показано, что если $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$, а $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geqslant 0$, и ее преобразование $\hat{\psi}(t)$ суммируемо на R, то $\forall c < \sigma$

$$U_\sigma(f;x;\Lambda_C) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \leqslant \sigma} \lambda_\sigma(k, c)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4}$$

где a_k и b_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

В настоящей работе изучаются приближения функций классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ в равномерной метрике операторами $U_\sigma(f;x;\Lambda_c)$ при условии, что $\lim\limits_{\sigma \to \infty}(c/\sigma)$ существует, равен θ и $0 < \theta \leqslant 1$.

В периодическом случае при $\sigma = n \in N$ и $c = n - p$, $p \in N$, $p < n$, в силу (4) операторы $U_\sigma(f;x;\Lambda_c)$ совпадают с известными суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$, где $S_k(f;x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. Поэтому в дальнейшем функции $U_\sigma(f;x;\Lambda_c)$ будем называть операторами Валле Пуссена и обозначать $V_{\sigma,c}(f;x)$.

Кроме того, получены асимптотические равенства при $\sigma \to \infty$ для величин

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, V_{\sigma,c}) = \sup\{\| f(x) - V_{\sigma,c}(f;x)\|_C : f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}\},$$

доставляющие в ряде важных случаев решения известной задачи Колмогорова — Никольского. Эти равенства при $c = \sigma - 1$ совпадают с одним из результатов А. И. Степанца [8]. В периодическом случае при $\psi(v) = v^{-r}$, $r > 0$ и целых β такие результаты получены Б. Надем [12], для произвольных β — С. А. Теляковским [13], для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ — А. И. Степанцом [1, 2] и автором настоящей статьи [9, 10].

Условимся далее через C обозначать абсолютные постоянные, вообще говоря, различные. Пусть $\psi \in F$, $\lambda \in \Lambda$. Положим

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v) = (1 - \lambda_\sigma(v))\psi(v), \quad v \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv.$$

Тогда, сопоставляя соотношения (2) и (3), получаем

$$f(x)-U_\sigma(f,x;\Lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\,\tau(t)\,dt.$$

Для функции $\tau_\sigma(v)$ введем обозначение

$$A(\tau_\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_\sigma(t)|\,dt.$$

Используя представление (2), а также известный прием построения экстремальных функций, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\psi\in F$, $\lambda\in\Lambda$, функции $\tau_\sigma(v)$ непрерывны и интегралы $A(\tau_\sigma)$ сходятся. Тогда*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty};U_\sigma)=A(\tau_\sigma).$$

В периодическом случае, когда $\psi(v)=v^{-r}$, $r>0$, аналогичная лемма доказана С. А. Теляковским [13], для классов $C^\psi_{\beta,\infty}$ — автором настоящей статьи [6]. Для классов $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$ эта лемма в несколько ином виде приведена в работе [11].

Лемма 2. *Пусть $\psi\in F$, $\lambda\in\Lambda_c$. Тогда преобразование $\hat{\tau}(t)$ суммируемо на всей числовой оси, т. е.*

$$A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}(t)|\,dt<\infty.$$

В справедливости этой леммы убеждаемся на основании равенства

$$\hat{\tau}(t)=\hat{\psi}(t)-\widehat{\lambda(t)\psi}(t),$$

суммируемости на всей оси функции $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\lambda}(t)$ и предложения 4 из работы [7].

Следствие 1. *Пусть $\psi\in F$. Тогда*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty};V_{\sigma,c})=A(\tau_\sigma).$$

Данное утверждение следует из лемм 1 и 2.

2. Асимптотические формулы для верхних граней уклонений операторов Валле Пуссена. Обозначим через F_1 подмножество функций $\psi\in F$, удовлетворяющих при $\sigma\to\infty$ условиям

$$\int_\sigma^\infty t^{-1}\psi(\sigma+t)\,dt=O(\psi(\sigma)),\tag{6}$$

$$\sigma|\psi'(\sigma)|=O(\psi(\sigma)).\tag{7}$$

Если $\psi\in F_1$, то для классов функций $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\psi\in F_1$, $\lambda\in\Lambda_c$, функции $\tau_\sigma(v)$ определены равенством* (5). *Тогда при $\sigma\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty};V_{\sigma,c})=\frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\int_0^1\frac{|\lambda(\sigma v)|}{1-v}\,dv+O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^1\frac{|\tau(\sigma v)|}{1-v}\,dv\right)+$$

$$+O(\psi(\sigma))+O\left(\int_0^1 v(1-v)\,|d\tau'(dv)|\right).\tag{8}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\nu(v) = \nu_\sigma(v)$, которую определим посредством равенств

$$\nu(v) = \begin{cases} \sigma^{-1}\psi(\sigma)\, v, & 0 \leqslant v \leqslant \sigma; \\ \psi(v), & v \geqslant \sigma. \end{cases} \tag{9}$$

Покажем, что для функций $\nu_\sigma(v)$ интегралы $A(\nu_\sigma)$ удовлетворяют соотношению

$$A(\nu_\sigma) = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma \to \infty. \tag{10}$$

На основании соотношения (9) имеем

$$\hat{\nu}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma \nu(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \nu(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} I_1(t) + I_2(t). \tag{11}$$

Пусть сначала $t \geqslant 0$. Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$I_1(t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{2\psi(\sigma)}{\pi\sigma t^2}\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{\sigma t}{2}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$I_1(t) = \sigma^{-1}\psi(\sigma)\, O(1), \quad t \to 0. \tag{13}$$

Из условия (1) следует, что для любого $\alpha > 0$

$$\int_a^\infty t^{-2}\int_\sigma^{\sigma+t}\psi(v)\, dv dt < \infty. \tag{14}$$

В работе [8] получена оценка

$$|I_2(t)| < \pi^{-1}\int_\sigma^{\sigma+2\pi/t}\psi(v)\, dv.$$

Пользуясь этой оценкой, соотношениями (13) и (14), для любого $\alpha > 0$ находим

$$\int_0^\alpha |\hat{\nu}(t)|\, dt \leqslant C + C\int_0^\alpha \int_\sigma^{\sigma+2\pi/t}\psi(v)\, dv dt. \tag{15}$$

Выполняя теперь интегрирование по частям, находим

$$I_2(t) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi'(v)\sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{16}$$

Сопоставляя равенство (16) с соотношениями (11) и (12), имеем

$$\hat{\nu}(t) = -\frac{2\psi(\sigma)\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{\sigma t}{2}}{\pi\sigma t^2} - \frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi'(v)\sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv.$$

В работе [8] показано, что

$$\left|\frac{1}{\pi t}\int_\sigma^\infty \psi'(v)\sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right| < \frac{2|\psi'(\sigma)|}{t^2}. \tag{17}$$

Далее имеем

$$\int_0^\infty |\hat{\nu}(t)|\, dt = \int_0^{1/\sigma} |\hat{\nu}(t)|\, dt + \int_{1/\sigma}^\infty |\hat{\nu}(t)|\, dt.$$

Из соотношения (11) получаем

$$\int_0^{1/\sigma} |\hat{\nu}(t)|\,dt \leqslant \int_0^{1/\sigma} |I_1(t)|\,dt + \int_0^{1/\sigma} |I_2(t)|\,dt \overset{\mathrm{def}}{=} l_1 + l_2. \tag{18}$$

На основании соотношения (12) находим

$$l_1 \leqslant C\,\frac{\psi(\sigma)}{\pi\sigma} \int_0^{1/\sigma} \frac{\frac{\sigma t}{2} - \sin\frac{\sigma t}{2}}{t^2} < C\psi(\sigma). \tag{19}$$

Выполняя интегрирование по частям и учитывая соотношение (15), условие (6), получаем

$$l_2 < \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\sigma} \int_\sigma^{\sigma+2\pi/t} \psi(v)\,dv\,dt < C\psi(\sigma). \tag{20}$$

На основании соотношений (18)—(20), заключаем, что

$$\int_0^{1/\sigma} |\hat{\nu}(t)|\,dt = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma\to\infty. \tag{21}$$

Далее из соотношений (16) и (17) и условия (7) следует

$$\int_{1/\sigma}^{\infty} |\hat{\nu}(t)|\,dt < \frac{2}{\pi}\,\frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{dt}{t^2} + \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{2\,|\psi'(\sigma)|}{t^2}\,dt < C\psi(\sigma). \tag{22}$$

Сопоставляя соотношения (21) и (22), заключаем, что

$$\int_0^{\infty} |\hat{\nu}_\sigma(t)|\,dt = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma\to\infty. \tag{23}$$

Аналогично может быть установлено соотношение

$$\int_{-\infty}^{0} |\hat{\nu}(t)|\,dt = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma\to\infty. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) следует справедливость оценки (10). Поскольку $F_1 \subset F$, то согласно следствию 1

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, V_{\sigma,c}) = A(\tau_\sigma).$$

Отсюда в силу соотношения (10)

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}) = A(\tau_\sigma - \nu_\sigma) + O(\psi(\sigma)). \tag{25}$$

Выполняя далее замену переменных под знаком интеграла, находим

$$A(\tau_\sigma - \nu_\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 (\tau_\sigma(\sigma v) - \nu_\sigma(\sigma v)) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt \overset{\mathrm{def}}{=} A(\mu_\sigma), \tag{26}$$

где $\mu_\sigma(v) = \tau_\sigma(\sigma v) - \nu_\sigma(\sigma v)$, $v \in [0, 1)$.

При выводе формулы (8) будем использовать соотношения (25) и (26), а для оценки величины $A(\mu_\sigma)$ — лемму 2 из работы [13].

Заметим, что в силу равенства (9)

$$\int_0^1 \frac{|\mu(v)|}{v}\,dv = \psi(\sigma) \int_0^1 \frac{|\tau(\sigma v)|}{v}\,dv + O(\psi(\sigma)). \tag{27}$$

Далее,

$$\int_0^1 \frac{|\mu(v)|}{1-v}\,dv = \psi(\sigma)\int_0^1 \frac{|\lambda(\sigma v)|}{1-v}\,dv + \gamma_1(\sigma), \tag{28}$$

где

$$\gamma_1(\sigma) = \int_0^1 \frac{[1-\psi(\sigma)/\psi(\sigma v)]\,|\tau(\sigma v)|}{1-v}\,dv + O(\psi(\sigma)).$$

Функция $\dfrac{1-\psi(\sigma)/\psi(\sigma v)}{1-v}$ ограничена при всех $v\in[0,\sigma]$, $\sigma<1$ и, кроме того,

$$\lim_{v\to 1}\frac{1-\psi(\sigma)/\psi(\sigma v)}{1-v} = \frac{\sigma(\psi'(\sigma))}{\psi(\sigma)}.$$

Поэтому в силу условия (7)

$$\gamma_1(\sigma) = O(\max_{0\leqslant v\leqslant 1}|\tau(\sigma v)| + \psi(\sigma)). \tag{29}$$

Согласно лемме 1 из работы [13]

$$\max_{0\leqslant v\leqslant 1}|\tau(\sigma v)| = O\left(\int_0^1 v(1-v)\,|d\tau'(\sigma v)|\right). \tag{30}$$

Объединяя соотношения (28) — (30), получаем

$$\int_0^1 \frac{|\mu(v)|}{1-v}\,dv = \psi(v)\int_0^1 \frac{|\lambda(\sigma v)|}{1-v}\,dv + O(\psi(\sigma)) + O\left(\int_0^1 v(1-v)\,|d\tau'(\sigma v)|\right). \tag{31}$$

Используя соотношения (25)—(27), (29) и лемму 2 из работы [13], получаем формулу (8). Лемма 3 доказана.

В периодическом случае, когда $\psi(v)=v^{-r}$, $r>0$, аналогичное утверждение доказано С. А. Теляковским [13], а для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ — автором настоящей статьи [10].

3. Приближение операторами Валле Пуссена. Рассмотрим поведение величины $\mathscr{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c})$ в предположении, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\dfrac{c}{\sigma}$ существует и равен θ, $0<\theta\leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть* $\theta=1$ *и* $\psi\in F_1$. *Тогда при* $\sigma\to\infty$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\frac{\sigma}{\sigma-c} + O(\psi(\sigma)). \tag{32}$$

Доказательство. При выводе формулы (32) будем использовать соотношение (8). Имеем

$$\int_0^1 \frac{|\lambda(\sigma v)|}{1-v}\,dv = \ln\frac{\sigma}{\sigma-c} + 1. \tag{33}$$

Если $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, то

$$\int_0^1 \frac{|\tau(\sigma v)|}{v}\,dv \leqslant \left(\frac{\sigma}{c}-1\right)\psi(c). \tag{34}$$

Так как $\theta = 1$, то в силу условия (7)

$$\psi(c) = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma \to \infty. \tag{35}$$

Сопоставляя соотношения (34) и (35), получаем

$$\int_0^1 \frac{|\tau(\sigma v)}{v} dv = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma \to \infty. \tag{36}$$

Далее, нетрудно показать, что

$$\int_0^1 v(1-v)\,|d\tau'(\sigma v)| = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma \to \infty. \tag{37}$$

На основании соотношений (33), (36) и (37), принадлежности функции $\psi(v)$ множеству F_1, а также формулы (8), заключаем, что справедливо равенство (32). Теорема 1 доказана.

Отметим, что в периодическом случае при $\psi(n) = n^{-r}$, $r > 0$, когда $\sigma = n$, $1 - \frac{c}{\sigma} = \frac{p}{n}$, $n \in N$, $p \in N$, $p < n$, формула (32), соответствующая приближению суммами Фурье и суммами Валле Пуссена, близкими к ним, известна (см. работы [13 — 18]). Для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ эта формула получена в работах [1, 9]. В работе [6] впервые получена формула (32) при $c = \sigma - 1$ для классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < \theta < 1$. Обозначим через $\bar{F}_1$ подмножество функций $\psi \in F$, удовлетворяющих условиям:

а) при $\sigma \to \infty$ выполняется соотношение

$$\int_\sigma^\infty \frac{\psi(\sigma + t)}{t} dt = O(\psi(\sigma));$$

б) для любого фиксированного ξ, $0 < \xi < 1$, существует постоянная K такая, что

$$\psi(\sigma\xi) < K\psi(\sigma), \quad \sigma \to \infty. \tag{38}$$

Нетрудно показать, что если выпуклая вниз и исчезающая на бесконечности функция $\psi(v)$ удовлетворяет условию (38), то для нее всегда будет выполняться и условие (7). Таким образом, простое сопоставление показывает, что справедливы включения: $\bar{F}_1 \subset F_1 \subset F$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $0 < \theta < 1$ и $\psi \in \bar{F}_1$. *Тогда при* $\sigma \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}) = A(\tau^{(\theta)}_\sigma) + O(\psi(\sigma)\,|\theta - c/\sigma|\,\ln(1/|\theta - c/\sigma|)), \tag{39}$$

где

$$\tau^{(\theta)}_\sigma(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant \theta; \\ \dfrac{v-\theta}{1-\theta}\psi(\sigma v), & \theta \leqslant v \leqslant 1; \\ \psi(\sigma v), & v \geqslant 1, \end{cases}$$

причем

$$A(\tau^{(\theta)}_\sigma) = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma \to \infty. \tag{40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании леммы 1 для $\lambda \in \Lambda_c$ имеем

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}) = A(\tau_\sigma).$$

Производя замену переменной, отсюда получаем

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{\theta}^{1}\tau(\sigma v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt, \qquad (41)$$

где

$$\tau(\sigma v) \overset{\text{def}}{=} \tau^*_\sigma(v) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant v\leqslant \frac{c}{\sigma}; \\ \dfrac{v-\frac{c}{\sigma},}{1+\frac{c}{\sigma},} & \frac{c}{\sigma}\leqslant v\leqslant 1; \\ \psi(\sigma v), & v\geqslant 1. \end{cases}$$

Из соотношения (41) следует

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}) = A(\tau^{(\theta)}_\sigma) + O(A(\tau^* - \tau^{(\theta)}_\sigma)). \qquad (42)$$

Оценим сначала величину $A(\tau^*_\sigma - \tau^{(\theta)}_\sigma)$. Если $\theta = \frac{c}{\sigma}$, то $A(\tau^*_\sigma - \tau^{(\theta)}_\sigma) = 0$. Пусть $\theta \neq \frac{c}{\sigma}$. Положим $\min\left(\frac{c}{\sigma};\theta\right)=\theta_1$, $\max\left(\frac{c}{\sigma},\theta\right)=\theta_2$, $\bar\tau(v) = \tau^*_{(\sigma)}(v) - \tau^{(\theta)}_\sigma(v)$, т. е.

$$\bar\tau(v) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant v\leqslant\theta,\quad v\geqslant 1; \\ \pm\dfrac{v-\theta_1}{}\psi(\sigma v), & \theta_1\leqslant v\leqslant\theta_2; \\ \pm\dfrac{(1-v)(\theta_2-\theta_1)}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)}\psi(\sigma v), & \theta_2\leqslant v\leqslant 1. \end{cases}$$

Далее имеем

$$A(\tau^*_\sigma - \tau^{(\theta)}_\sigma) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{\theta_1}^{1}\bar\tau(1-v+\theta_1)\cos vtdt\right|dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{\theta_1}^{1}\bar\tau(1-v+\theta_1)\sin vtdt\right|dt \overset{\text{def}}{=} A_1(\bar\tau_0) + A_2(\bar\tau_0). \qquad (43)$$

Для оценки величин $A_1(\bar\tau_0)$ и $A_2(\bar\tau_0)$ будем применять лемму 2 из работы [5]. Прежде всего запишем аналитическое выражение для функции $\bar\tau_0(v) \overset{\text{def}}{=} \bar\tau(1+\theta_1-v)$. Имеем

$$\bar\tau(v) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant v\leqslant\theta_1,\quad 1\leqslant v\leqslant 1+\theta_1; \\ \dfrac{(v-\theta_1)(\theta_2-\theta_1)}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)}\psi(\sigma(1+\theta_1-v)), & \theta_1\leqslant v\leqslant 1-(\theta_2-\theta_1); \\ \dfrac{1-v}{1-\theta_1}\psi(\sigma(1+\theta_1-v)), & 1-(\theta_2-\theta_1)\leqslant v\leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда, принимая во внимание монотонность функции $\psi(v)$ и условие (38), находим

$$\int_{\theta_1}^{1}\frac{|\bar\tau_0(v)|}{1-v}dv = \frac{(\theta_2-\theta_1)}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)}\int_{\theta_1}^{1-(\theta_2-\theta_1)}\frac{(v-\theta_1)}{1-v}\psi(\sigma(1-v+\theta_1))dv +$$

$$+\frac{1}{(1-\theta_1)}\int\limits_{1-(\theta_2-\theta_1)}^{1}\psi(\sigma(1+\theta_1-v)\,dv\overset{\text{def}}{=}J_1+J_2, \tag{44}$$

где

$$J_1<C(\theta_2-\theta_1)\psi(\sigma)\ln\frac{1}{\theta_2-\theta_1}, \tag{45}$$

$$J_2<C\psi(\sigma)\ (\theta_2-\theta_1). \tag{46}$$

Таким образом, из соотношений (44) — (46) следует

$$\int\limits_{\theta_1}^{1}\frac{|\bar{\tau}_0(v)|}{1-v}dv\leqslant C(\theta_2-\theta_1)\psi(\sigma)\ln\frac{1}{\theta_2-\theta_1}. \tag{47}$$

Учитывая монотонность функций $\psi(v)$ и $\psi'(v)$ при $v\geqslant 1$, условие (38), нетрудно показать, что

$$\int\limits_{\theta_1}^{1}v(1-v)\,|d\bar{\tau}_0'(v)|\leqslant C(\theta_2-\theta_1)\psi(\sigma). \tag{48}$$

Сопоставляя лемму 2 из работы [13] и соотношения (47), (48), на основании (43) заключаем, что

$$A(\tau_0^*-\tau_\sigma^{(\theta)})=O(\psi(\sigma)(\theta_2-\theta_1)\ln(1/(\theta_2-\theta_1)),\quad \sigma\to\infty. \tag{49}$$

Объединяя соотношения (42) и (49), получаем формулу (39).

Покажем, наконец, что справедливо соотношение (40). Пусть

$$\delta_\sigma^{(\theta)}(v)=\begin{cases}0, & 0\leqslant v\leqslant\theta;\\ \dfrac{v-\theta}{1-\theta}\psi(\sigma), & \theta\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi(\sigma v), & v\geqslant 1.\end{cases}$$

Тогда

$$A(\tau_\sigma^{(\theta)})\leqslant A(\delta_\sigma^{(\theta)})+A(\delta_\sigma^{(\theta)}-\tau_\sigma^{(\theta)}).$$

Отсюда видим, что для установления оценки (40) достаточно показать, что

$$A(\delta_\sigma^{(\theta)})=O(\psi(\sigma)),\quad \sigma\to\infty, \tag{50}$$

$$A(\delta_\sigma^{(\theta)}-\tau_\sigma^{(\theta)})=O(\psi(\sigma)),\quad \sigma\to\infty. \tag{51}$$

Для доказательства соотношения (50) можно использовать рассуждения аналогичные тем, с помощью которых получена оценка (10), а для установления оценки (51) можно воспользоваться леммой 2 из работы [13], учитывая при этом монотонность функций $\psi(v)$, $\psi'(v)$, $v\psi''(v)$ и условие (38). Теорема 2 доказана.

Отметим, что в периодическом случае при $\psi(n)=n^{-r}$, $r>0$, когда $\sigma=n$, $\frac{c}{\sigma}=1-\frac{p}{n}$, $n\in N$, $p\in N$, $p<n$, формула (39) получена С. А. Теляковским [13]. При этом если $\beta=r$ и $\beta=r-1$ (т. е. для классов W^r и $\tilde{W}^r$) при целых r аналогичная формула была получена в работе [19]. Причем, интегралы, входящие в константы $A(\tau)$, приведены в [19] в другом виде. Для классов $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ аналогичная формула получена автором настоящей статьи [9].

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— 50, № 1.— С. 101—136.
3. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье в пространствах L_β^ψ.— Киев, 1986.— С. 3—48.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.66).

4. *Степанец А. И*. Классификация и приближение периодических функций.— Киев: Наук. думка, 1987.— 268 с.
5. *Степанец А. И*. Приближение целыми функциями в равномерной метрике.— Киев, 1988.— С. 3—41.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
6. *Степанец А. И*. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 2.— С. 198—209.
7. *Степанец А. И*. Классы функций, заданных на действительной оси и их приближения целыми функциями. I // Там же.— 1990.— **42**, № 1.— С. 102—112.
8. *Степанец А. И*. Классы функций, заданные на действительной оси и их приближения целыми функциями. II // Там же.— № 2.— С. 210—222.
9. *Рукасов В. И*. Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье.— Киев, 1983.— 55 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
10. *Рукасов В. И*. Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 478—483.
11. *Дзимистаришвили М. Г*. Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда.— Киев, 1989.— С. 3—42.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.25).
12. *Nady B*. Sur une classe generale de procedes de sommation pour les Series de Fourier // Hung. Acta. Math.— 1948.— **1**, N 3.— P. 14—62.
13. *Теляковский С. А*. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1961.— **62**.— С. 61—97.
14. *Kolmogoroff A*. Zur Grossenordnung des Restgludes Fourierchen differenzier barer Funktionen // Ann. Math.— 1935.— **36**.— P. 521—526.
15. *Пинкевич В. Т*. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— **4**, № 5.— С. 521—528.
16. *Никольский С. М*. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— **15**.— С. 3—73.
17. *Тиман А. Ф*. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1953.— **17**.— С. 99—134.
18. *Ефимов А. В*. О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II // Там же.— 1960.— **24**.— С. 431—468.
19. *Теляковский С. А*. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Там же.— С. 213—242.

Получено 22.10.90